مسئله ۱

شکل مسئله ۱

الف- نشان دهید که به ازای تمام مقادیر مثبت عناصر و هر نوع شرایط اولیه، پاسخ $v(t)$ همیشه از نوع میرایی شدید خواهد بود.

ب- اگر L_1 و L_2 با خازنهای C_1 و C_2 تعویض شوند درستی بیان بالا را بار دیگر اثبات کنید.

پ- اگر تنها یکی از سلفها با خازن تعویض شود آیا بیان فوق باز هم معتبر خواهد بود.

حل : الف ـ با توجه به شکل مسئله داریم

$$i_{L_2} = \frac{v}{R_2} \rightarrow v_{L_2} = L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{L_2}{R_2}\frac{dv}{dt} \quad , \quad v_{L_1} = v_{R_1} = v_{L_2} + v = \frac{L_2}{R_2}\frac{dv}{dt} + v$$

$$KCL \text{ برای گره } A \rightarrow L_1 \frac{dv_{L_1}}{dt} + \frac{v_{R_1}}{R_1} + \frac{v}{R_2} = 0$$

$$\rightarrow L_1 \frac{d\left(\frac{L_2}{R_2}\frac{dv}{dt} + v\right)}{dt} + \frac{\frac{L_2}{R_2}\frac{dv}{dt} + v}{R_1} + \frac{v}{R_2} = 0 \rightarrow \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R_2R_1L_1 + L_2}{R_2L_1L_2}\frac{dv}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_2L_1L_2}v = 0$$

$$\rightarrow 2\alpha = \frac{R_2R_1L_1 + L_2}{R_2L_1L_2} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_2L_1L_2}} \qquad \alpha > \omega_0 \rightarrow \frac{R_2R_1L_1 + L_2}{2R_2L_1L_2} > \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_2L_1L_2}}$$

$$\rightarrow 2(R_1 + R_2)(R_2L_1L_2) < (R_2R_1L_1 + L_2)^2$$

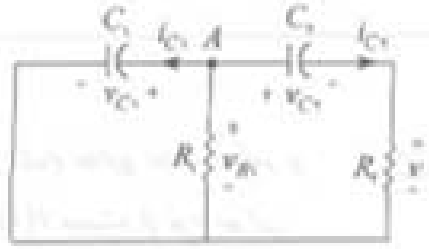
از طرفی واضح است که $R_1 + R_2 > R_2$ می باشند بنابراین داریم

$$2R_2R_1L_1L_2 < (R_2R_1L_1 + L_2)^2 \rightarrow 2R_2R_1L_1L_2 < R_2^2R_1^2L_1^2 + 2R_2R_1L_1L_2 + L_2^2$$

$$\rightarrow R_2^2R_1^2L_1^2 - 2R_2R_1L_1L_2 + L_2^2 > 0 \rightarrow (R_2R_1L_1 - L_2)^2 > 0$$

نامساوی فوق که با فرض $\alpha > \omega_0$ بدست آمده همواره بر قرار است بنابراین $\alpha > \omega_0$ بوده و پاسخ ولتاژ $v(t)$ از نوع میرایی شدید خواهد بود.

ب ـ با جایگذاری C_1 و C_2 بجای L_1 و L_2 مدار بصورت زیر خواهد شد.



با توجه به شکل فوق داریم

$$i_{C_1} = \frac{v}{R_1} \rightarrow v_{C_1} = v_{C_1}(0) + \frac{1}{C_1}\int \frac{v}{R_1}\,dt$$

$$\rightarrow v_{C_2} = v_{R_1} = v_{C_1} + v = v_{C_1}(0) + \frac{1}{C_1}\int \frac{v}{R_1}\,dt + v$$

$$\text{KCL برای گره ۵} \rightarrow C_2 \frac{d\left(v_{C_1}(0) + \frac{1}{C_1}\int \frac{v}{R_1}\,dt + v\right)}{dt} + \frac{v_{C_1}(0) + \frac{1}{C_1}\int \frac{v}{R_1}\,dt + v}{R_2} + \frac{v}{R_3} = 0$$

$$\rightarrow \frac{C_2}{R_1C_1}v + C_2\frac{dv}{dt} + \frac{v_{C_1}(0)}{R_2} + \frac{1}{R_2C_1}\int \frac{v}{R_1}\,dt + \frac{v}{R_2} + \frac{v}{R_3} = 0$$

$$\rightarrow \frac{C_2}{R_1C_1}\frac{dv}{dt} + C_2\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R_1R_2C_1}v + \frac{1}{R_2}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{R_3}\frac{dv}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1} + \frac{1}{R_3C_2}\right)\frac{dv}{dt} + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}v = 0$$

$$\rightarrow 2\alpha = \left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1} + \frac{1}{R_3C_2}\right) \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

$$\alpha > \omega_0 \rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1} + \frac{1}{R_3C_2}\right) > \sqrt{\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

$$\rightarrow (R_1C_2 + R_2C_1 + R_3C_1)^2 > 4(R_1R_2C_1C_2)$$

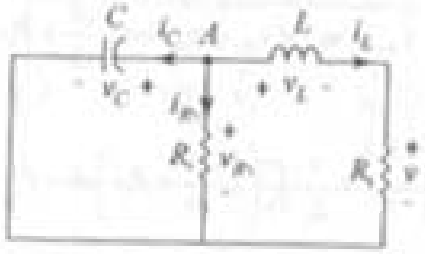
$$\rightarrow R_1^2C_2^2 + R_2^2C_1^2 + R_3^2C_1^2 + 2R_1R_2C_1C_2 + 2R_1R_3C_1^2 + 2R_2^2C_1C_2 > 4(R_1R_2C_1C_2)$$

$$\rightarrow \left(R_1^2C_2^2 - 2R_1R_2C_1C_2 + R_2^2C_1^2\right) + R_3^2C_1^2 + 2R_1R_3C_1^2 + 2R_2^2C_1C_2 > 0$$

$$\rightarrow \left(R_1C_2 - R_2C_1\right)^2 + R_3^2C_1^2 + 2R_1R_3C_1^2 + 2R_2^2C_1C_2 > 0$$

از آنجا که مقادیر همه عناصر مثبت است لذا نامساوی فوق که با فرض $\alpha > \omega_0$ به دست آمده همواره برقرار می باشد. بنابراین پاسخ ولتاژ $v(t)$ همیشه از نوع میرای شدید است.

پ ـ فرض کنید به جای سلف L_1 ، خازن C را جایگزین کرده ایم. بنابراین داریم :



با توجه به شکل خواهیم داشت:

$$i_L = \frac{v}{R_2} \rightarrow v_L = L\frac{di_L}{dt} = \frac{L}{R_2}\frac{dv}{dt} \rightarrow v_C = v_{R_1} = v_L + v = \frac{L}{R_2}\frac{dv}{dt} + v$$

$$\text{KCL برای گره (A)} \rightarrow L_1\frac{d\left(\frac{L}{R_2}\frac{dv}{dt} + v\right)}{dt} + \frac{\frac{L}{R_2}\frac{dv}{dt} + v}{R_1} + \frac{v}{R_2} = 0$$

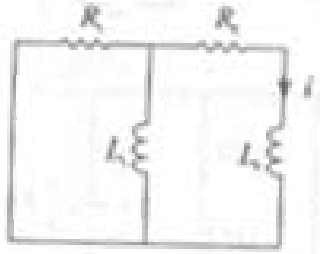
$$\rightarrow \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R_1R_2C + L}{R_1L}\frac{dv}{dt} + \frac{C}{L}(R_1 + R_2)v = 0$$

$$\rightarrow 2\alpha = \frac{R_1R_2C + L}{R_1L} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{L}(R_1 + R_2)}$$

$$\alpha > \omega_0 \rightarrow \frac{R_1R_2C + L}{2R_1L} > \sqrt{\frac{C}{L}(R_1 + R_2)} \rightarrow (R_1R_2C + L)^2 - 4R_1^2LC(R_1 + R_2) > 0$$

واضح است که نا مساوی فوق که با فرض $\alpha > \omega_0$ بدست آمده همواره صحیح نبوده و لذا همیشه $\alpha > \omega_0$ نخواهد بود. پس پاسخ ولتاژ $v(t)$ همیشه میرایی شدید نمی باشد.

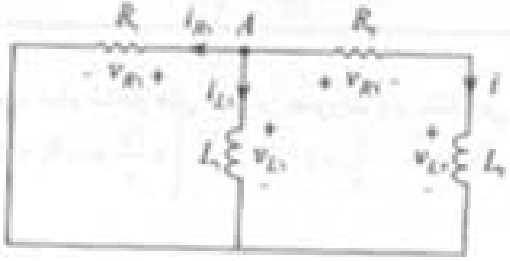
مسئله ۲



شکل مسئله ۲

- معادله دیفرانسیلی بر حسب i بدست آورید.
- ثابت کنید به ازای تمام مقادیر مثبت R_1 و R_2 و L_1 و L_2 ورودی صفر i همواره میرایی شدید است.

حل : ابتدا ولتاژ و جریان عناصر مدار را بصورت زیر مشخص می کنیم.



با توجه به شکل داریم

$$v_{R_1} = R_1 i \ , \ v_{L_1} = L_1 \frac{di}{dt} \quad , \quad v_{R_1} = v_{L_1} = v_{R_2} + v_{L_2} = L_2 \frac{di}{dt} + R_2 i$$

$$KCL \text{ برای گره } A \rightarrow \frac{L_2 \frac{di}{dt} + R_2 i}{R_1} + \frac{1}{L_1}\int_0^t \left(L_2 \frac{di}{dt} + R_2 i \right) dt + i = 0$$

$$\rightarrow \frac{L_2}{R_1}\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R_2}{R_1}\frac{di}{dt} + \frac{L_2}{L_1}\frac{di}{dt} + \frac{R_2}{L_1} i + \frac{di}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R_2}{L_2}\left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{L_2}{L_1}\right)\frac{di}{dt} + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} i = 0$$

$$\rightarrow 2\alpha = \frac{R_2}{L_2}\left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{L_2}{L_1}\right) = \frac{R_2^2 L_1 + R_1 L_1 + R_2 L_2}{R_2 L_1 L_2} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 R_2}{L_1 L_2}}$$

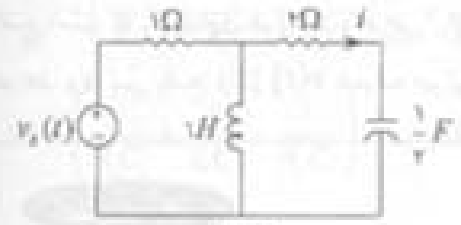
$$\alpha > \omega_0 \rightarrow \frac{R_2^2 L_1 + R_1 L_1 + R_2 L_2}{2 R_2 L_1 L_2} > \sqrt{\frac{R_1 R_2}{L_1 L_2}} \rightarrow \left(R_2^2 L_1 + R_1 L_1 + R_2 L_2\right)^2 > 4 R_2^2 L_1 L_2$$

$$\rightarrow \left(R_2^2 L_1 - R_1 L_2\right)^2 + R_1^2 L_1^2 + 4 R_2^2 R_1 L_1^2 + 4 R_1 R_2 L_1 L_2 > 0$$

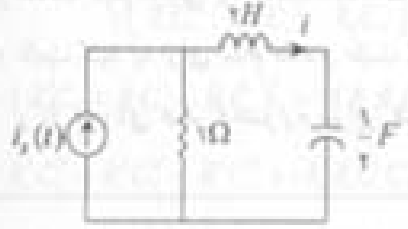
نامساوی فوق که با فرض $\alpha > \omega_0$ بدست آمده همواره برقرار است لذا پاسخ همواره میرایی شدید خواهد بود.

مسئله ۳

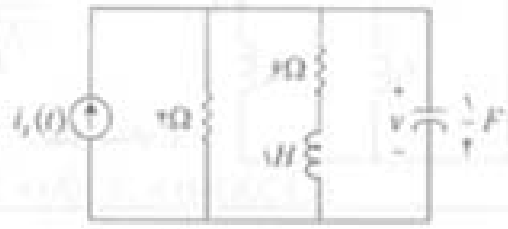
معادله دیفرانسیلی برای هر یک از مدار ها بر حسب متغیر مشخص شده بدست آورید. پاسخ پله هر مدار را تعیین کنید.



(الف)



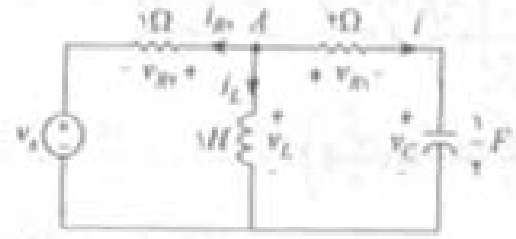
(ب)



(پ)

شکل مسئله ۳

حل : الف ـ ابتدا ولتاژ و جریان تمام شاخه های مدار را بصورت زیر نشان می دهیم.



$$v_{R_1} = 2i \ , \ v_C = v_C(0) + \frac{1}{\frac{1}{2}}\int i\,dt = 2\int i\,dt \quad , \quad v_s = v_{R_1} + v_C = 2i + 2\int i\,dt$$

KCL برای گره A $\rightarrow$ $$\frac{2i + 2\int i\,dt - v_s}{1} + i_L(0) + \int\left(2i + 2\int i\,dt\right)dt + i = 0$$

با دو بار مشتق گیری از معادله فوق داریم

$$\rightarrow \ 2\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\frac{di}{dt} - \frac{d^2 v_s}{dt^2} + 2\frac{di}{dt} + 2i + \frac{d^2 i}{dt} = 0 \ \rightarrow \ 3\frac{d^2 i}{dt^2} + 4\frac{di}{dt} + 2i = \frac{d^2 v_s}{dt}$$

در ادامه با جایگذاری $v_s(t) = u(t)$ پاسخ پله مدار را بدست خواهیم آورد

$$\rightarrow \ 3\frac{d^2 i}{dt^2} + 4\frac{di}{dt} + 2i = \delta'(t)$$

در $t = 0^-$ هیچ منبعی به مدار متصل نیست لذا $\frac{di_L(0^-)}{dt} = i(0^-) = 0$ می باشد و از $t = 0^+$ خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز است لذا $i(0^+) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}A$ می باشد. با انتگرال گیری از طرفین معادله فوق از 0^- تا 0^+ خواهیم داشت

$$\rightarrow \ 3\frac{di(0^+)}{dt} - 3\frac{di(0^-)}{dt} + 4i(0^+) - 4i(0^-) + 4\int_{0^-}^{0^+} i\,dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta'(t)\,dt$$

$$\rightarrow \ 3\frac{di(0^+)}{dt} - 0 + \frac{4}{3} - 0 + 0 = 0 \ \rightarrow \ \frac{di(0^+)}{dt} = -\frac{4}{9}$$

بنابراین معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر معادل کرد

$$\rightarrow \ 3\frac{d^2 i}{dt^2} + 4\frac{di}{dt} + 2i = 0 \ , \ i(0^+) = \frac{1}{3} \ , \ \frac{di(0^+)}{dt} = -\frac{4}{9}$$

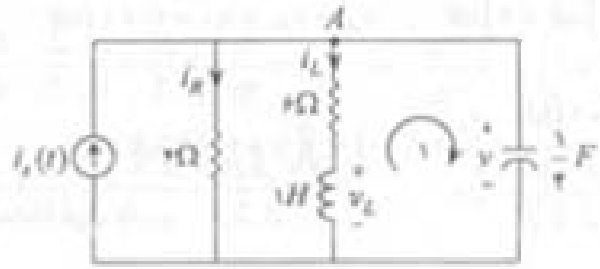
معادله مشخصه : $3s^2 + 4s + 2 = 0 \ \rightarrow \ s = -\frac{3}{4} \pm j\frac{\sqrt{2}}{3}$

$$\rightarrow \ i(t) = e^{-\frac{3}{4}t}\left(A\sin\frac{\sqrt{2}}{3}t + B\cos\frac{\sqrt{2}}{3}t\right) \ , \ i(0^+) = \frac{1}{3} \ \rightarrow \ B = \frac{1}{3}$$

$$\frac{di(0^+)}{dt} = -\frac{2}{9} \quad \rightarrow \quad -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{\sqrt{2}}{3}A = -\frac{2}{9} \quad \rightarrow \quad A = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$\rightarrow \quad i(t) = e^{-2t}\left(\frac{\sqrt{2}}{12}\sin\frac{\sqrt{2}}{3}t + \frac{1}{3}\cos\frac{\sqrt{2}}{3}t\right)$$

پ ـ شکل مدار را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



با توجه به شکل می توان نوشت.

$$KCL \text{ برای گره } A \rightarrow \quad -i_s + \frac{v}{2} + i_L + \frac{1}{2}\frac{dv}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad i_L = i_s - \frac{v}{2} - \frac{1}{2}\frac{dv}{dt}$$

$$KVL \text{ برای مش } 1 \quad \rightarrow \quad -\frac{di_L}{dt} - 6i_L + v = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{d\left(i_s - \frac{v}{2} - \frac{1}{2}\frac{dv}{dt}\right)}{dt} - 6\left(i_s - \frac{v}{2} - \frac{1}{2}\frac{dv}{dt}\right) + v = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{d^2v}{dt} + 7\frac{dv}{dt} + 10v = 2\frac{di_s}{dt} + 22i_s$$

به ازای $i_s(t) = u(t)$ پاسخ پله را محاسبه خواهیم کرد.

$$v\frac{d^2v}{dt} + 7\frac{dv}{dt} + 10V = 2\delta(t) + 22u(t)$$

در $t = 0^+$ خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز است لذا $v(0^+) = v(0^-) = 0$ خواهد بود و با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

$$\frac{dv(0^+)}{dt} - \frac{dv(0^-)}{dt} + 7v(0^+) - 7v(0^-) + \int_{0^-}^{0^+} 10v = 2\int_{0^-}^{0^+}\delta(t) + 2\int_{0^-}^{0^+} u(t)dt$$

$$\rightarrow \quad \frac{dv(0^+)}{dt} - 0 + 0 - 0 + 0 = 2 + 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dv(0^+)}{dt} = 2$$

بنابراین معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر نوشت.

$$\frac{d^2v}{dt} + 7\frac{dv}{dt} + 10v = 22 \quad , \quad v(0^+) = 0 \quad , \quad \frac{dv(0^+)}{dt} = 2 \; , \; t > 0$$

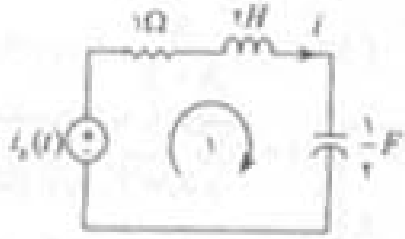
معادله مشخصه : $s^2+7s+10=0 \rightarrow s=-2,-5 \rightarrow v(t)=\underbrace{K_1e^{-2t}+K_2e^{-5t}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_3}_{\text{پاسخ خصوصی}}$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $10K_3=22$ و یا $K_3=\frac{22}{10}$ شده و داریم.

$$\begin{cases} v(0^+)=0 \rightarrow K_1+K_2+\frac{22}{10}=0 \\ \frac{dv(0^+)}{dt}=2 \rightarrow -2K_1-5K_2=2 \end{cases} \rightarrow K_1=-\frac{8}{3}\ ,\ K_2=\frac{2}{15}$$

$$\rightarrow v(t)=-\frac{8}{3}e^{-2t}+\frac{2}{15}e^{-5t}+\frac{22}{10}\ ,\ t>0$$

پ ـ با استفاده از تبدیل تونن - نورتن مدار را بصورت زیر رسم می کنیم.



KVL برای مش ۱ $\rightarrow i+2\frac{di}{dt}+i(0)+\frac{1}{2}\int i\,dt=i_s \rightarrow \frac{di}{dt}+2\frac{d^2i}{dt}+2i=\frac{di_s}{dt}$

با جایگذاری $i_s(t)=u(t)$ پاسخ پله مدار را بصورت زیر بدست می آوریم.

$$2\frac{d^2i}{dt}+\frac{di}{dt}+2i=\delta(t)$$

از آنجا که $i_s(t)=0\ ,\ t<0$ لذا $\frac{di(0^-)}{dt}=i(0^-)=0$ بوده و در $t=0^+$ خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز خواهد شد بنابراین $i(0^+)=0$ بوده و با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

$$2\frac{di(0^+)}{dt}-2\frac{di(0^-)}{dt}+i(0^+)-i(0^-)+\int_{0^-}^{0^+}2i\,dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t) \rightarrow 2\frac{di(0^+)}{dt}-0+0-0+0=1$$

$$\rightarrow \frac{di(0^+)}{dt}=\frac{1}{2}$$

همچنین در $\delta(t)=0\ ,\ t>0$ بوده بنابراین معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر نوشت.

$$2\frac{d^2i}{dt}+\frac{di}{dt}+2i=0\ ,\ i(0^+)=0\ ,\ \frac{di(0^+)}{dt}=\frac{1}{2}\ ,\ t>0$$

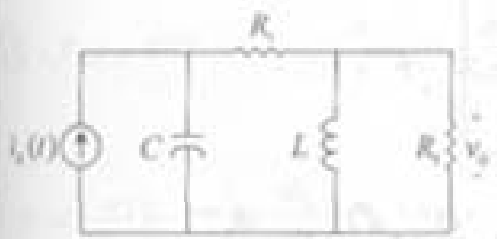
معادله مشخصه : $2s^2+s+2=0 \rightarrow s=-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{15}}{2}$

$$\rightarrow i(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\sin\frac{\sqrt{15}}{2}t+B\cos\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)$$

$$\begin{cases} i(0^+)=0 \rightarrow B=0 \\ \frac{di(0^+)}{dt}=\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}B+\frac{\sqrt{15}}{2}A=\frac{1}{2} \rightarrow A=\frac{2\sqrt{15}}{15} \end{cases}$$

$$\rightarrow i(t)=\frac{2\sqrt{15}}{15}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{15}}{2}t\ ,\ t>0$$

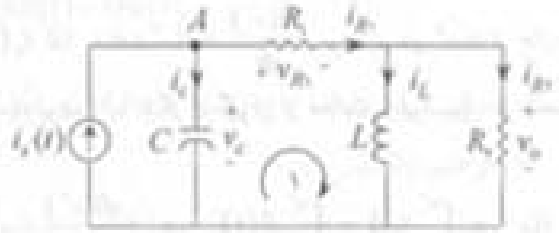
مسئله ۴



شکل مسئله ۴

- معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده v_o را به i_s بنویسید.
- شرایط اولیه را بر حسب ولتاژ اولیه V_o خازن و جریان اولیه I_o سلف مشخص کنید.
- به ازای $R_s=R_o=L=C=1$ پاسخ پله را محاسبه کنید.

حل : شکل فوق را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



$$i_{R_s}=i_L+i_{R_o}=\frac{1}{L}\int v_o dt+\frac{v_o}{R_o} \rightarrow v_{R_s}=R_s i_{R_s}=\frac{R_s}{L}\int v_o dt+\frac{R_s}{R_o}v_o$$

$$v_c=v_{R_s}+v_o=\frac{R_s}{L}\int v_o dt+\frac{R_s+R_o}{R_o}v_o$$

KCL برای گره ⓐ $\rightarrow -i_s+C\frac{d}{dt}\left(\frac{R_s}{L}\int v_o dt+\frac{R_s+R_o}{R_o}v_o\right)+\frac{R_s}{L}\int v_o dt+\frac{v_o}{R_o}=0$

$$\rightarrow \quad -i_s + \frac{R_1 C}{L} v_c + \frac{R_1 + R_2}{R_2} C \frac{dv_c}{dt} + \frac{R_1}{L} \int v_c dt + \frac{v_c}{R_2} = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{-di_s}{dt} + \frac{R_1 C}{L} \frac{dv_c}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_2} C \frac{d^2 v_c}{dt^2} + \frac{R_1}{L} v_c + \frac{1}{R_2} \frac{dv_c}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{R_1 + R_2}{R_2} C \frac{d^2 v_c}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{R_1 C}{L} \right) \frac{dv_c}{dt} + \frac{R_1}{L} v_c = \frac{di_s}{dt}$$

برای محاسبه شرط اولیه $v_c(t)$ می توان نوشت.

$$i_{R_1} = i_L + \frac{v_c}{R_2} \quad \rightarrow \quad v_{R_1} = R_1 i_L + \frac{R_1}{R_2} v_c$$

$$KVL \text{ برای مش ۱} \quad \rightarrow \quad -v_s + v_{R_1} + v_c = 0 \quad \rightarrow \quad -v_s + R_1 i_L + \frac{R_1}{R_2} v_c + v_c = 0$$

$$\rightarrow \quad v_c(0) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(v_s(0) - R_1 i_L(0) \right) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(V_0 - R_1 I_0 \right)$$

در ادامه به ازای $R_1 = R_2 = L = C = 1$ و $i_s(t) = u(t)$ پاسخ پله را محاسبه خواهیم کرد.

$$\rightarrow \quad 2 \frac{d^2 v_c}{dt^2} + 2 \frac{dv_c}{dt} + v_c = \delta(t) \quad , \quad v_c(0) = \frac{1}{2} (V_0 - I_0)$$

با انتگرال گیری از معادله فوق در فاصله 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

$$2 \frac{dv_c(0^+)}{dt} - 2 \frac{dv_c(0^-)}{dt} + 2 v_c(0^+) - 2 v_c(0^-) + \int_{0^-}^{0^+} v_c dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt$$

$$2 \frac{dv_c(0^+)}{dt} - 0 + (V_0 - I_0) - 0 + 0 = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = \frac{I_0 - V_0 + 1}{2}$$

همچنین به ازای $t > 0$ ، $\delta(t) = 0$ بوده بنابراین معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر نوشت.

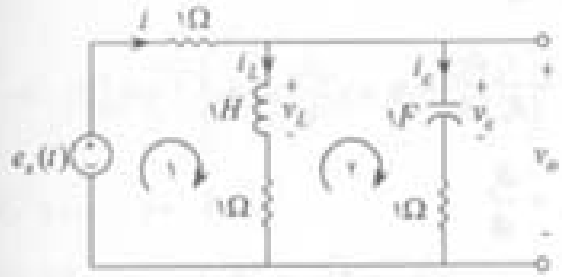
$$2 \frac{d^2 v_c}{dt^2} + 2 \frac{dv_c}{dt} + v_c = 0 \quad , \quad v_c(0^+) = \frac{V_0 - I_0}{2} \quad , \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = \frac{I_0 - V_0 + 1}{2}$$

$$\text{معادله مشخصه}: 2s^2 + 2s + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad v_c(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left(A \sin \frac{1}{2} t + B \cos \frac{1}{2} t \right)$$

$$v_c(0^+) = \frac{V_0 - I_0}{2} \quad \rightarrow \quad B = \frac{V_0 - I_0}{2} \quad , \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = \frac{I_0 - V_0 + 1}{2} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2} B + \frac{1}{2} A = \frac{I_0 - V_0 + 1}{2}$$

$$\rightarrow \quad A = 1 - \frac{V_0 - I_0}{2} \quad , \quad v_c(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left(\left(1 - \frac{V_0 - I_0}{2} \right) \sin \frac{1}{2} t + \left(\frac{V_0 - I_0}{2} \right) \cos \frac{1}{2} t \right) \quad , \quad t > 0$$

مسئله ۵



شکل مسئله ۵

- معادله دیفرانسیلی بنویسید که :
- الف- v_c را به e_s ارتباط دهد.
- ب- i_L را به e_s ارتباط دهد.
- پ- v_o را به e_s ارتباط دهد.
- ت- i را به e_s ارتباط دهد.

حل : الف ـ با توجه به شکل فوق داریم.

$$v_o = v_c + i_c = v_c + \frac{dv_c}{dt} \quad , \quad i = \frac{e_s - v_o}{۱} = e_s - v_o = e_s - v_c - \frac{dv_c}{dt}$$

$$i = i_L + i_c \quad \rightarrow \quad i_L = i - i_c = e_s - v_c - \frac{dv_c}{dt} - \frac{dv_c}{dt} = e_s - v_c - ۲\frac{dv_c}{dt}$$

$$KVL \text{ برای مش ۱} \quad \rightarrow \quad -e_s + i - \frac{di_L}{dt} + i_L = ۰$$

$$\rightarrow \quad -e_s + e_s - v_c - \frac{dv_c}{dt} + \frac{de_s}{dt} - \frac{dv_c}{dt} - ۲\frac{d^۲v_c}{dt} + e_s - v_c - ۲\frac{dv_c}{dt} = ۰$$

$$\rightarrow \quad \frac{d^۲v_c}{dt} + ۲\frac{dv_c}{dt} + v_c = \frac{۱}{۲}\frac{de_s}{dt} + \frac{۱}{۲}e_s$$

ب ـ با توجه به شکل می توان نوشت.

$$v_o = v_L + i_L = \frac{di_L}{dt} + i_L \quad , \quad i = \frac{e_s - v_o}{۱} = e_s - \frac{di_L}{dt} - i_L$$

$$v_o = i_L + i_c \quad \rightarrow \quad i_c = i - i_L = e_s - \frac{di_L}{dt} - ۲i_L$$

$$KVL \text{ برای حلقه شامل مشهای ۱ و ۲} \quad \rightarrow \quad -e_s + i + \int_0^t i_c dt + i_c = ۰ \quad \rightarrow \quad -\frac{de_s}{dt} + \frac{di}{dt} + i_c + \frac{di_c}{dt} = ۰$$

$$\rightarrow \quad -\frac{de_s}{dt} + \frac{de_s}{dt} - \frac{d^۲i_L}{dt} - \frac{di_L}{dt} + e_s - \frac{di_L}{dt} - ۲i_L + \frac{de_s}{dt} - \frac{d^۲i_L}{dt} - ۲\frac{di_L}{dt} = ۰$$

$$\rightarrow \quad \frac{d^۲i_L}{dt} + ۲\frac{di_L}{dt} + i_L = \frac{۱}{۲}\frac{de_s}{dt} + \frac{۱}{۲}e_s$$

پ ـ با توجه به قسمت (الف) می توان نوشت.

$$v_o = v_c + \frac{dv_c}{dt} \rightarrow \frac{dv_o}{dt} = \frac{dv_c}{dt} + \frac{d^2 v_c}{dt}$$

$$\frac{d^2 v_c}{dt} + 2\frac{dv_c}{dt} + v_c = \frac{1}{2}\frac{de_s}{dt} + \frac{1}{2}e_s \rightarrow \left(\frac{d^2 v_c}{dt} + \frac{dv_c}{dt}\right) + \left(\frac{dv_c}{dt} + v_c\right) = \frac{1}{2}\frac{de_s}{dt} + \frac{1}{2}e_s$$

$$\rightarrow \frac{dv_o}{dt} + v_o = \frac{1}{2}\frac{de_s}{dt} + \frac{1}{2}e_s$$

ت ـ با توجه به قسمت (ب) و (پ) می توان نوشت.

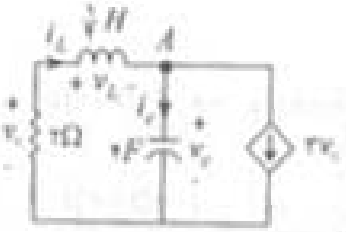
$$i = e_s - v_o \rightarrow v_o = e_s - i$$

$$\frac{dv_o}{dt} + v_o = \frac{1}{2}\frac{de_s}{dt} + \frac{1}{2}e_s \rightarrow \frac{d(e_s - i)}{dt} + e_s - i = \frac{1}{2}\frac{de_s}{dt} + \frac{1}{2}e_s \rightarrow \frac{di}{dt} + i = \frac{1}{2}\frac{de_s}{dt} + \frac{1}{2}e_s$$

مسئله ۶

معادله دیفرانسیلی بر حسب i_L تشکیل داده و پاسخ ورودی صفر را بیابید.

$(v_c(0) = 2V$ و $i_L(0) = 1A)$



شکل مسئله ۶

حل : با توجه به شکل داریم.

$$v_1 = -2i_L \ , \ v_c = v_1 - v_L = 2i_L - \frac{1}{2}\frac{di_L}{dt} \rightarrow v_c(0) = 2i_L(0) - \frac{1}{2}\frac{di_L(0)}{dt} \rightarrow \frac{di_L(0)}{dt} = 0$$

KCL برای گره (A) $\rightarrow -i_L + 2\frac{d}{dt}\left(2i_L - \frac{1}{2}\frac{di_L}{dt}\right) + 2(-2i_L) = 0 \rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt} - 8\frac{di_L}{dt} + 7i_L = 0$

معادله مشخصه : $s^2 - 8s + 7 = 0 \rightarrow s = -1 \ , \ -7 \rightarrow i_L(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-7t}$

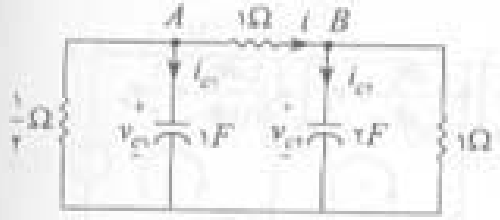
$$\begin{cases} i_L(0) = 1 \rightarrow K_1 + K_2 = 1 \\ \frac{di_L(0)}{dt} = 0 \rightarrow K_1 + 7K_2 = 0 \end{cases} \rightarrow K_1 = \frac{7}{6} \ , \ K_2 = -\frac{1}{6}$$

$$\rightarrow i_L(t) = \frac{7}{6}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-7t} \ , \ t > 0$$

مسئله ۷

معادله معادله دیفرانسیلی بر حسب i تشکیل داده و پاسخ ورودی صفر را بدست آورید.

$(v_{c_1}(0)=1V$ و $v_{c_2}(0)=2V)$



شکل مسئله ۷

حل : با توجه به شکل مسئله و با استفاده از روش نمایش اپراتوری در معادلات دیفرانسیل داریم.

$$i=\frac{v_{c_1}-v_{c_2}}{1}=v_{c_1}-v_{c_2}$$

KCL برای گره (A) $\rightarrow \frac{v_{c_1}}{\frac{1}{2}}+\frac{dv_{c_1}}{dt}+i=0 \rightarrow 2v_{c_1}+\frac{dv_{c_1}}{dt}+i=0 \rightarrow (2+D)v_{c_1}+i=0$

KCL برای گره (B) $\rightarrow \frac{v_{c_2}}{1}+2\frac{dv_{c_2}}{dt}-i=0 \rightarrow v_{c_2}+2\frac{dv_{c_2}}{dt}-i=0 \rightarrow (2D+1)v_{c_2}-i=0$

$$\rightarrow v_{c_1}=\frac{-i}{D+2}\ ,\quad v_{c_2}=\frac{i}{2D+1}\ ,\quad i=v_{c_1}-v_{c_2}=-\frac{i}{D+2}-\frac{i}{2D+1}=\frac{(-3D-3)i}{2D^2+5D+2}$$

$$\rightarrow (2D^2+5D+2)i=(-3D-3)i \rightarrow (2D^2+8D+5)i=0$$

$$\rightarrow 2\frac{d^2i}{dt^2}+8\frac{di}{dt}+5i=0$$

معادله مشخصه : $2s^2+8s+5=0 \rightarrow s=-2\pm\frac{\sqrt{6}}{2}=+0/77\ ,\ -3/22$

$$\rightarrow i(t)=K_1e^{-0/77t}+K_2e^{-3/22t}$$

$$i=v_{c_1}-v_{c_2} \rightarrow i(0)=v_{c_1}(0)-v_{c_2}(0)=1-2=-1 \rightarrow K_1+K_2=-1$$

$$2v_{c_1}(0)+\frac{dv_{c_1}(0)}{dt}+i(0)=0 \rightarrow 2+\frac{dv_{c_1}(0)}{dt}-1=0 \rightarrow \frac{dv_{c_1}(0)}{dt}=-1$$

$$v_{c_2}(0)+\frac{2dv_{c_2}(0)}{dt}-i(0)=0 \rightarrow 2+2\frac{dv_{c_2}(0)}{dt}+1=0 \rightarrow \frac{dv_{c_2}(0)}{dt}=-\frac{3}{2}$$

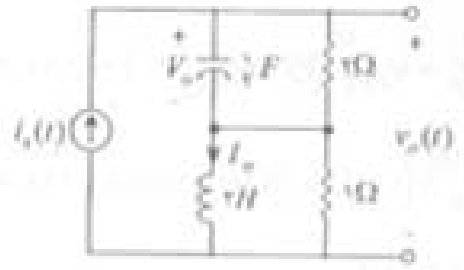
$$i=v_{c_1}-v_{c_2} \rightarrow \frac{di}{dt}=\frac{dv_{c_1}}{dt}-\frac{dv_{c_2}}{dt} \rightarrow \frac{di(0)}{dt}=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2} \rightarrow -0/77K_1-3/22K_2=\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} K_1 + K_2 = -1 \\ -0/77K_1 - 3/22K_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow K_1 = -1/11 \ , \ K_2 = 0/11$$

$$\rightarrow i(t) = -1/11e^{-0/77t} - 0/11e^{-3/22t} \ , \ t > 0$$

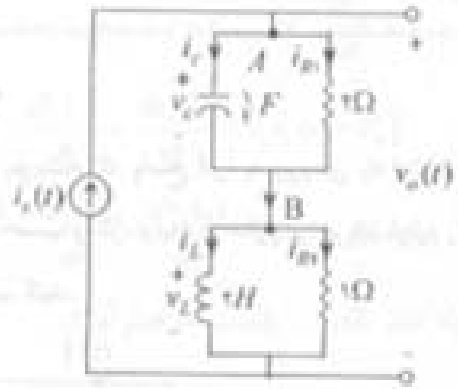
مسئله ۸

معادله دیفرانسیلی بر حسب v_o تشکیل داده و شرایط اولیه را بر حسب V_o و I_o و احیاناً $i_s(0)$ بدست آورید.



شکل مسئله ۸

حل: شکل فوق را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



با توجه به شکل فوق و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

KCL برای گره (A) $\rightarrow -i_s + \frac{1}{2}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{2} = 0 \rightarrow \frac{dv_C}{dt} + v_C = 2i_s \rightarrow (1+D)v_C = 2i_s$

$$\rightarrow v_C = \frac{2}{1+D}i_s$$

KCL برای گره (B) $\rightarrow -i_s + \frac{1}{2}\int v_L dt + \frac{v_L}{1} = 0 \rightarrow -\frac{di_s}{dt} + \frac{v_L}{2} + \frac{dv_L}{dt} = 0$

$$\rightarrow 2\frac{dv_L}{dt} + v_L = 2\frac{di_s}{dt} \rightarrow (2D+1)v_L = 2Di_s \rightarrow v_L = \frac{2D}{(2D+1)}i_s$$

$$\rightarrow v_o = v_C + v_L = \frac{2}{D+1}i_s + \frac{2D}{2D+1}i_s = \frac{2(2D+1)+2D(D+1)}{(D+1)(2D+1)}i_s = \frac{2D^2+2D+2}{2D^2+3D+1}i_s$$

$$\rightarrow \left(2D^2+3D+1\right)v_o=\left(2D^2+6D+2\right)i_s \quad \rightarrow \quad 2\frac{d^2v_o}{dt^2}+3\frac{dv_o}{dt}+v_o=2\frac{d^2i_s}{dt^2}+6\frac{di_s}{dt}+2i_s$$

در ادامه به محاسبه شرایط اولیه می پردازیم.

$$v_L=Ri_{g_1}=\left(i_s-i_L\right) \quad \rightarrow \quad v_o=v_c+v_L=v_c+\left(i_s-i_L\right)$$

$$\rightarrow \quad v_o(0)=v_c(0)+\left(i_s(0)-i_L(0)\right)=V_0+\left(i_s(0)-I_0\right)$$

$$\frac{dv_c}{dt}+v_c=2i_s \quad \rightarrow \quad \frac{dv_c(0)}{dt}=2i_s(0)-v_c(0)=2i_s(0)-V_0=2i_s(0)-V_0$$

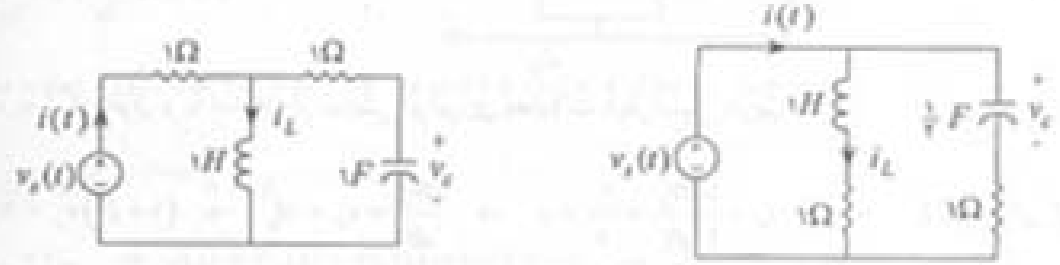
$$v_L=i_s-i_L=i_s-\frac{1}{2}\int v_L\,dt \quad \rightarrow \quad \frac{dv_L(0)}{dt}=\frac{di_s(0)}{dt}-\frac{v_L(0)}{2}$$

$$\rightarrow \quad \frac{dv_L(0)}{dt}=\frac{di_s(0)}{dt}-\frac{1}{2}\left(i_s(0)-i_L(0)\right)=\frac{di_s(0)}{dt}-\frac{1}{2}\left(i_s(0)-I_0\right)$$

$$\rightarrow \quad \frac{dv_o(0)}{dt}=\frac{dv_c(0)}{dt}+\frac{dv_L(0)}{dt}=\frac{di_s(0)}{dt}+\frac{3}{2}i_s(0)-V_0+\frac{1}{2}I_0$$

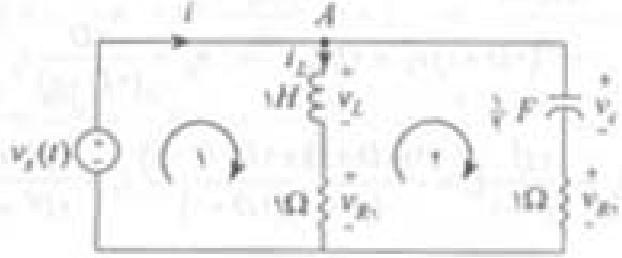
مسئله ۹

- معادله دیفرانسیلی بنویسید که پاسخ i را به ورودی v_s ارتباط دهد.
- شرایط اولیه را بر حسب ولتاژ اولیه V_0 خازن و جریان اولیه I_0 سلف مشخص کنید.
- پاسخ پله را حساب کنید.



(ب) شکل مسئله ۹ (الف)

حل : الف ـ با توجه به شکل زیر و با استفاده از روش نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.



$$KVL \text{ برای مش ۱} \rightarrow -v_s + \frac{di}{dt} + i_L = 0 \rightarrow -v_s + Di_L + i_L = 0 \rightarrow i_L = \frac{1}{D+1}v_s$$

$$KVL \text{ برای حلقه شامل مشهای ۱ و ۲} \rightarrow -v_s + 2\int_0^t i_c dt + i_c = 0 \rightarrow -\frac{dv_s}{dt} + 2i_c + \frac{di_c}{dt} = 0$$

$$\rightarrow -Dv_s + 2i_c + Di_c = 0 \rightarrow i_c = \frac{D}{D+2}v_s$$

$$\rightarrow i = i_L + i_c = \frac{1}{D+1}v_s + \frac{D}{D+2}v_s = \frac{D+2+D(D+1)}{(D+1)(D+2)}v_s = \frac{D^2+2D+2}{D^2+3D+2}v_s$$

$$\rightarrow \left(D^2+3D+2\right)i = \left(D^2+2D+2\right)v_s \rightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + 3\frac{di}{dt} + 2i = \frac{d^2v_s}{dt^2} + 2\frac{dv_s}{dt} + 2v_s$$

برای محاسبه شرایط اولیه داریم :

$$i_c = \frac{v_{ac}}{1} = \frac{v_a - v_c}{1} \rightarrow i_c(0) = v_a(0) - v_c(0) = v_a(0) - V_0$$

$$\rightarrow i(0) = i_L(0) + i_c(0) = I_0 + v_a(0) - V_0 \rightarrow \frac{di_L}{dt} = v_s - i_L \rightarrow \frac{di_L(0)}{dt} = v_s(0) - I_0$$

$$\frac{di_c}{dt} = \frac{dv_s}{dt} - 2i_c \rightarrow \frac{di_c(0)}{dt} = \frac{dv_s(0)}{dt} - 2\left(v_s(0) - V_0\right)$$

$$\rightarrow \frac{di(0)}{dt} = \frac{di_L(0)}{dt} + \frac{di_c(0)}{dt} = \frac{dv_s(0)}{dt} - v_s(0) - I_0 + 2V_0$$

در ادامه با جایگذاری $v_s(t) = u(t)$ پاسخ پله مدار (الف) را بدست خواهیم آورد.

$$v_s(t) = u(t) = 1 \ , \ t > 0 \ , \ \frac{dv_s(t)}{dt} = \delta(t) = 0 \ , \ t > 0 \ , \ \frac{dv_s^2(t)}{dt^2} = \delta'(t) = 0 \ , \ t > 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2i}{dt} + 3\frac{di}{dt} + 2i = 2 \ , \ t > 0$$

$$\text{معادله مشخصه}: s^2 + 3s + 2 = 0 \rightarrow s = -1, -2 \rightarrow v(t) = \underbrace{K_1e^{-t} + K_2e^{-2t}}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K_p}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $2K_p = 2$ و یا $K_p = 1$ شده و با اعمال شرایط اولیه خواهیم داشت.

$$v_s(0^-) = \frac{dv_s(0^-)}{dt} = \frac{dv_s(0^+)}{dt} = 0 \ , \ v_s(0^+) = 1$$

$$\rightarrow i(0^-) = I_0 - V_0 \ , \ i(0^+) = I_0 - V_0 + 1 \ , \ \frac{di(0^-)}{dt} = -I_0 + 2V_0$$

برای محاسبه $\frac{di(0^+)}{dt}$ از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- و 0^+ انتگرال می گیریم

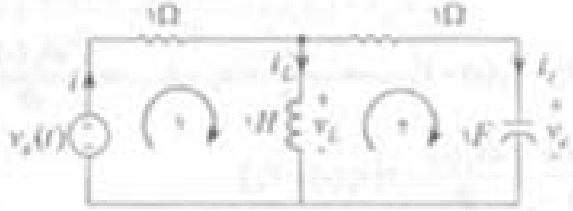
$$\frac{di(0^+)}{dt}-\frac{di(0^-)}{dt}+\left(3i(0^+)-3i(0^-)\right)+\int_{0^-}^{0^+}4i\,dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta'(t)dt+\int_{0^-}^{0^+}2\delta(t)dt+\int_{0^-}^{0^+}2u(t)dt$$

$$\rightarrow\ \frac{di(0^+)}{dt}-\left(-I_0+2V_0\right)+3+0=0+2+0\ \rightarrow\ \frac{di(0^+)}{dt}=2V_0-I_0-1$$

$$\begin{cases} i(0^+)=I_0-V_0+1 \ \rightarrow\ K_1+K_2+1=I_0-V_0+1 \\ \frac{di(0^+)}{dt}=2V_0-I_0-2 \ \rightarrow\ -K_1-2K_2=2V_0-I_0-1 \end{cases}$$

$$\rightarrow\ K_1=I_0-1\ ,\ \ K_2=1-V_0\ \rightarrow\ i(t)=(I_0-1)e^{-t}+(1-V_0)e^{-3t}+1\ ,\ \ t>0$$

ب ـ با توجه به شکل زیر و با استفاده از نمایش تپ توری معادلات دیفرانسیل داریم



$$KVL\ \text{برای مش ۱}\ \rightarrow\ -v_s+\frac{di_L}{dt}+i=0\ \rightarrow\ -v_s+Di_L+i=0\ \rightarrow\ i_L=\frac{v_s-i}{D}$$

$$KVL\ \text{برای حلقه شامل مشهای ۱ و ۲}\ \rightarrow\ -v_s+i+i_c+\int i_c dt+i_c=0\ \rightarrow\ -\frac{dv_s}{dt}+\frac{di}{dt}+\frac{di_c}{dt}+i_c=0$$

$$\rightarrow\ i_c=\frac{D}{D+1}(v_s-i)$$

$$i=i_L+i_c=\frac{v_s-i}{D}+\frac{D}{D+1}(v_s-i)=\frac{D+1+D^2}{D(D+1)}(v_s-i)$$

$$\rightarrow\ \left(D^2+D\right)i=\left(D^2+D+1\right)(v_s-i)\ \rightarrow\ \left(2D^2+2D+1\right)i=\left(D^2+D+1\right)v_s$$

$$\rightarrow\ 2\frac{d^2i}{dt^2}+2\frac{di}{dt}+i=\frac{d^2v_s}{dt^2}+\frac{dv_s}{dt}+v_s$$

برای محاسبه شرایط اولیه داریم

$$i=i_c+i_L\ \rightarrow\ i_c=i-i_L$$

$$KVL\ \text{برای حلقه شامل مشهای ۱ و ۲}\ \rightarrow\ -v_s+i+i_c+v_c=0\ \rightarrow\ -v_s+i+i-i_L+v_c=0$$

$$\rightarrow i=\frac{1}{2}(i_L-v_C+v_s) \quad \rightarrow i(0)=\frac{1}{2}\left(I_0-V_0+v_s(0)\right)$$

$$\rightarrow \frac{di}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{di_L}{dt}-\frac{dv_C}{dt}+\frac{dv_s}{dt}\right)=\frac{1}{2}\left(v_L-i_C+\frac{dv_s}{dt}\right)=\frac{1}{2}\left((v_s-i)-(i-i_L)+\frac{dv_s}{dt}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(v_s+i_L)+\frac{1}{2}\frac{dv_s}{dt}-i$$

$$\rightarrow \frac{di(0)}{dt}=\frac{1}{2}\left(v_s(0)+i_L(0)\right)+\frac{1}{2}\frac{dv_s(0)}{dt}-i(0)$$

$$\frac{di(0)}{dt}=\frac{1}{2}\left(v_s(0)+I_0\right)+\frac{1}{2}\frac{dv_s(0)}{dt}-\frac{1}{2}\left(I_0-V_0+v_s(0)\right)=\frac{1}{2}\left(V_0+\frac{dv_s(0)}{dt}\right)$$

در ادامه با جایگذاری $v_s(t)=u(t)$ پاسخ پله را بدست خواهیم آورد.

$$v_s(t)=u(t)=1 \ , \ t>0 \quad , \quad \frac{dv_s(t)}{dt}=\delta(t)=0 \ , \ t>0 \quad , \quad \frac{dv_s^2(t)}{dt^2}=\delta'(t)=0 \ , \ t>0$$

$$\rightarrow 2\frac{d^2i}{dt}+2\frac{di}{dt}+i=1 \quad , \quad t>0$$

معادله مشخصه : $2s^2+2s+1=0 \quad \rightarrow s=-\frac{1}{2}\pm j\frac{1}{2} \quad \rightarrow i(t)=\underbrace{e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\sin\frac{t}{2}+B\cos\frac{t}{2}\right)}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{C}_{\text{پاسخ خصوصی}}$

با جایگذاری پاسخ خصوصی C در معادله دیفرانسیل $C=1$ شده و با اعمال شرایط اولیه خواهیم داشت.

$$v_s(0^-)=\frac{dv_s(0^-)}{dt}=\frac{dv_s(0^+)}{dt}=0 \quad , \quad v_s(0^+)=1$$

$$\rightarrow i(0^-)=\frac{1}{2}(I_0-V_0) \quad , \quad i(0^+)=\frac{1}{2}(I_0-V_0+1) \quad , \quad \frac{di(0^-)}{dt}=\frac{1}{2}V_0$$

با انتگرال گیری از طرفین معادله در فاصله 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

$$2\frac{di(0^+)}{dt}-2\frac{di(0^-)}{dt}+\left(2i(0^+)-2i(0^-)\right)+\int_{0^-}^{0^+} i\,dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta'(t)\,dt+\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\,dt+\int_{0^-}^{0^+}u(t)\,dt$$

$$\rightarrow 2\frac{di(0^+)}{dt}-V_0+1+0=0+1+0 \quad \rightarrow \frac{di(0^+)}{dt}=\frac{1}{2}V_0$$

$$i(0^+)=\frac{1}{2}(I_0-V_0+1) \quad \rightarrow B+1=\frac{1}{2}(I_0-V_0+1) \quad \rightarrow B=\frac{1}{2}(I_0-V_0-1)$$

$$\frac{di(0^+)}{dt}=\frac{V_0}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}V_0 \rightarrow A=\frac{1}{2}(I_0+V_0-1)$$

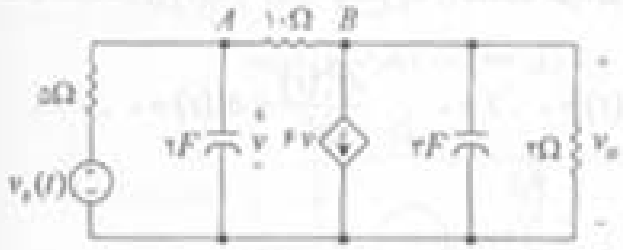
$$\rightarrow i(t)=e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{2}(I_0+V_0-1)\sin\frac{t}{2}+\frac{1}{2}(I_0-V_0-1)\cos\frac{t}{2}\right)+1 \quad , \quad t>0$$

مسئله ۱۰

الف- معادله دیفرانسیل v_0 بر حسب v_s را بنویسید.

ب- پاسخ پله و ضربه را تعیین کنید.

پ- فرض کنید متغیر های حالت را ولتاژهای خازنها انتخاب کنیم. معادلات حالت را بنویسید و آن را بصورت ماتریسی در آورید.



شکل مسئله ۱۰

حل: الف ـ با توجه به شکل مسئله داریم

$$KCL \text{ برای گره } B \rightarrow \frac{v_0-v}{10}+6v+2\frac{dv_0}{dt}+\frac{v_0}{2}=0 \rightarrow v=-\frac{30}{50}\frac{dv_0}{dt}-\frac{6}{59}v_0$$

$$KCL \text{ برای گره } A \rightarrow \frac{v-v_s}{5}+2\frac{dv}{dt}+\frac{v-v_0}{10}=0 \rightarrow 20\frac{dv}{dt}+3v-v_0=2v_s$$

$$\rightarrow 20\frac{d}{dt}\left(-\frac{30}{59}\frac{dv_0}{dt}-\frac{6}{59}v_0\right)+3\left(-\frac{30}{59}\frac{dv_0}{dt}-\frac{6}{59}v_0\right)-v_0=2v_s$$

$$\rightarrow 600\frac{d^2v_0}{dt^2}+210\frac{dv_0}{dt}+77v_0=-118v_s$$

ب ـ با جایگذاری $v_s(t)=u(t)=1 \ , \ t>0$ و با فرض شرایط اولیه صفر پاسخ پله را محاسبه خواهیم کرد.

$$\rightarrow 600\frac{d^2v_0}{dt^2}+210\frac{dv_0}{dt}+77v_0=-118 \quad , \quad t>0$$

معادله مشخصه: $600s^2+210s+77=0 \rightarrow s=-0.175\pm j0.312$

$$\rightarrow v_0(t)=\underbrace{e^{-0.175t}(A\cos 0.312t+B\sin 0.312t)}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{C}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی C در معادله دیفرانسیل $۷۷C = -۱۱۸$ و یا $C = \frac{-۱۱۸}{۷۷} = -۱/۵۳$ شده و با اعمال شرایط اولیه خواهیم داشت.

$$v_c(۰) = ۰ \quad \rightarrow \quad A - ۱/۵۳ = ۰ \quad \rightarrow \quad A = ۱/۵۳$$

$$\frac{dv_c(۰)}{dt} = ۰ \quad \rightarrow \quad -۰/۱۷۵A + ۰/۳۱۲B = ۰ \quad \rightarrow \quad B = ۰/۸۶$$

$$\rightarrow \quad v_c(t) = s(t) = e^{-۰/۱۷۵t}\left(۱/۵۳\cos ۰/۳۱۲t + ۰/۸۶\sin ۰/۳۱۲t\right) - ۱/۵۳ \quad , \quad t > ۰$$

از آنجا که مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان است لذا با مشتق گیری از پاسخ پله، پاسخ ضربه بدست خواهد آمد.

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = ۰/۱۷۵e^{-۰/۱۷۵t}\left(۱/۵۳\cos ۰/۳۱۲t + ۰/۸۶\sin ۰/۳۱۲t\right)$$

$$+e^{-۰/۱۷۵t}\left(-(۱/۵۳)(۰/۳۱۲)\sin ۰/۳۱۲t + (۰/۸۶)(۰/۳۱۲)\cos ۰/۳۱۲t\right) = -۰/۶۲۸e^{-۰/۱۷۵t}\sin ۰/۳۱۲t$$

پ ـ با توجه به معادلات بدست آمده از KCL های قسمت (الف) داریم.

$$v = -\frac{۳۰}{۵۹}\frac{dv_c}{dt} - \frac{۶}{۵۹}v_c \quad \rightarrow \quad \frac{dv_c}{dt} = \frac{۱}{۵}v_c - \frac{۵۹}{۳۰}v \quad , \quad ۲۰\frac{dv}{dt} + ۳v - v_c = ۲v_s$$

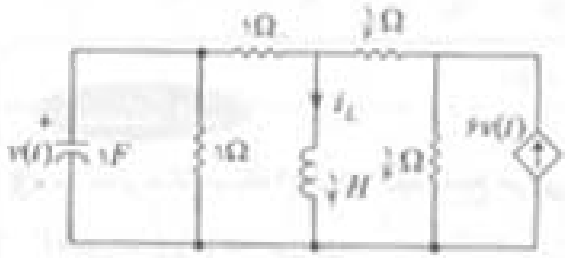
$$\rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \frac{۱}{۲۰}v_c - \frac{۳}{۲۰}v + \frac{۱}{۱۰}v_s \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \frac{dv_c}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} & -\frac{۵۹}{۳۰} \\ \frac{۱}{۲۰} & -\frac{۳}{۲۰} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_c \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ \frac{۱}{۱۰} \end{bmatrix}v_s$$

مسئله ۱۱

معادله دیفرانسیلی بر حسب v بدست آورید.

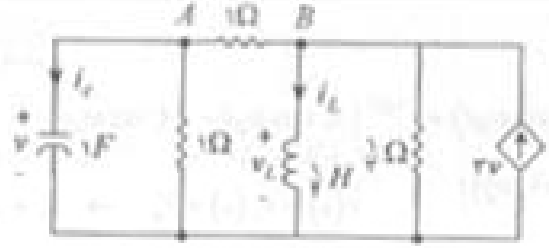
پاسخ ورودی صفر v را تعیین کنید.

($v_c(۰) = ۱V$ و $i_L(۰) = -۸A$)



شکل مسئله ۱۱

حل : با استفاده از تبدیل تونن - نرتن مدار را بصورت زیر ساده می کنیم.



KCL برای گره (A) $\rightarrow \frac{dv}{dt}+\frac{v}{1}+\frac{v-v_L}{1}=0 \rightarrow v_L=\frac{dv}{dt}+2v$

KCL برای گره (B) $\rightarrow \frac{v_L-v}{1}+\frac{1}{2}\int v_L dt+\frac{v_L}{2}-3v=0 \rightarrow \frac{dv_L}{dt}-\frac{v_L}{dt}+2v_L+3\frac{dv_L}{dt}-3\frac{dv}{dt}=0$

$$\rightarrow 2\frac{dv_L}{dt}+2v_L-2\frac{dv}{dt}=0$$

$$\rightarrow 2\frac{d}{dt}\left(\frac{dv}{dt}+2v\right)+2\left(\frac{dv}{dt}+2v\right)-2\frac{dv}{dt}=0 \rightarrow 2\frac{d^2v}{dt^2}+8\frac{dv}{dt}+8v=0 \rightarrow \frac{d^2v}{dt^2}+2\frac{dv}{dt}+2v=0$$

معادله مشخصه : $s^2+2s+2=0 \rightarrow s=-1\pm j \rightarrow v(t)=e^{-t}(A\cos t+B\sin t)$

KCL برای گره B در $t=0$ $\rightarrow \frac{v_L(0)-v(0)}{1}-i_L(0)+\frac{v_L(0)}{2}-3v(0)=0$

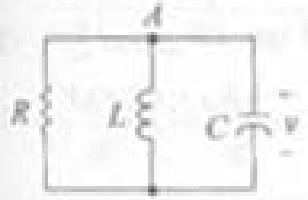
$$\rightarrow v_L(0)-1-8+3v_L(0)-3=0 \rightarrow v_L(0)=2V$$

KCL برای گره A در $t=0$ $\rightarrow \frac{dv(0)}{dt}+\frac{v(0)}{1}+\frac{v(0)-v_L(0)}{1}=0 \rightarrow \frac{dv(0)}{dt}+1+\frac{1-2}{2}=0$

$$\rightarrow \frac{dv(0)}{dt}=1 \quad , \quad \begin{cases} v(0)=1 \rightarrow A=1 \\ \frac{dv(0)}{dt}=1 \rightarrow -A+B=1 \rightarrow B=2 \end{cases}$$

$$\rightarrow v(t)=e^{-t}(\cos t+2\sin t) \quad , \quad t>0$$

مسئله ۱۲



شکل مسئله ۱۲

در مدار شکل مسئله۱۲ فرض کنید پاسخ میرایی ضعیف داریم و بصورت زیر نوشته می شود.

$$v(t)=(A_1+A_2)e^{-\alpha t}\cos\omega_d t+j(A_1+A_2)e^{-\alpha t}\sin\omega_d t$$

ثابت کنید A_1 مزدوج مختلط A_2 است. ($i_L(0)=I_0$ و $v_c(0)=V_0$)

حل : می توان نوشت

$$v(t)=e^{-\alpha t}(A_1\cos\omega_d t+jA_1\sin\omega_d t)+e^{-\alpha t}(A_2\cos\omega_d t-jA_2\sin\omega_d t)$$

$$=A_1e^{-(\alpha-j\omega_d)t}+A_2e^{-(\alpha+j\omega_d)t} \quad , \quad v(0)=v_c(0)=V_0 \rightarrow A_1+A_2=V_0$$

KCL برای گره ⓐ $\rightarrow C\frac{dv}{dt}+i_L+\frac{v}{R}=0 \rightarrow \frac{dv}{dt}=-\frac{i_L}{C}-\frac{v}{RC} \rightarrow \frac{dv(0^-)}{dt}=-\left(\frac{I_0}{C}+\frac{V_0}{RC}\right)$

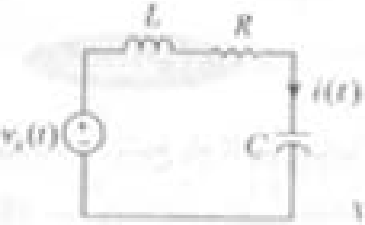
$$\rightarrow (\alpha-j\omega_d)A_1+(\alpha+j\omega_d)A_2=\frac{I_0}{C}+\frac{V_0}{RC}$$

$$\rightarrow (\alpha-j\omega_d)A_1+(\alpha+j\omega_d)(V_0-A_1)=\frac{I_0}{C}+\frac{V_0}{RC} \rightarrow A_1=\frac{V_0}{2}+j\frac{1}{2\omega_d}\left(\frac{I_0}{C}+\frac{V_0}{RC}-\alpha V_0\right)$$

$$\rightarrow A_2=V_0-A_1=\frac{V_0}{2}-j\frac{1}{2\omega_d}\left(\frac{I_0}{C}+\frac{V_0}{RC}-\alpha V_0\right)$$

بنابراین A_1 و A_2 مزدوج مختلط هم می باشند.

مسئله ۱۳



شکل مسئله ۱۳

$v_s(t)=-2e^{-2t}u(t)$ و $i(t)=e^{-t}+e^{-t}\cos 2t$ ، $R,L,C=?$

شرایط اولیه $i_L(0^-)$ و $v_C(0^-)$ را تعیین کنید.

حل : با توجه به شکل مسئله داریم:

$$-e_s+L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int i\,dt=0 \rightarrow -\frac{de_s}{dt}+L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0$$

$$\rightarrow L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\frac{de_s}{dt} \rightarrow L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=4e^{-2t}\ ,\ t>0$$

معادله مشخصه : $Ls^2+Rs+\frac{1}{C}=0 \rightarrow s=\frac{-R\pm j\sqrt{4\frac{L}{C}-R^2}}{2L}=-\frac{R}{2L}\pm j\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$

$$\rightarrow i(t)=e^{-\frac{R}{2L}t}\left(A\cos\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\,t+B\sin\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\right)+Ke^{-2t}$$

$$\rightarrow -\frac{R}{2L}=-1 \rightarrow R=2L\ ,\ \sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}=2 \rightarrow 4L-R^2C-16L^2C=0$$

با توجه به پاسخ خصوصی $K=1$ بوده و با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم:

$$4Le^{-2t}-2Re^{-2t}+\frac{1}{C}e^{-2t}=4e^{-2t} \rightarrow 4L-2R+\frac{1}{C}=4\ ,\ \begin{cases}R=2L\\4L-2R+\frac{1}{C}=4\end{cases} \rightarrow C=\frac{1}{4-2L}$$

$$2L - R^2C - 16LC = 0 \rightarrow 2L - \frac{4L^2}{9-3L} - \frac{16L^2}{9-3L} = 0 \rightarrow 20L = 36 - 12L \rightarrow L = \frac{9}{8}H$$

$$\rightarrow R = 2L = \frac{9}{4}\Omega \ , \ C = \frac{1}{9-3L} = \frac{1}{9-\frac{27}{8}} = \frac{8}{45}F$$

ازآنجا که جریان و یا ولتاژ بی نهایتی به المانهای مدار اعمال نمی شود لذا $i_L(0^-) = i_L(0^+)$ ، $v_C(0^-) = v_C(0^+)$ می باشد.

$$\rightarrow i(t) = e^{-3t} + e^{-t}\cos 2t \ , \ t > 0 \rightarrow i_L(0^-) = i_L(0^+) = e^{-3t} + e^{-t}\cos 2t\Big|_{t=0} = 2A$$

$$\frac{di(t)}{dt} = -3e^{-3t} - e^{-t}\cos 2t + 2e^{-t}\sin 2t \rightarrow \frac{di(0^+)}{dt} = -2$$

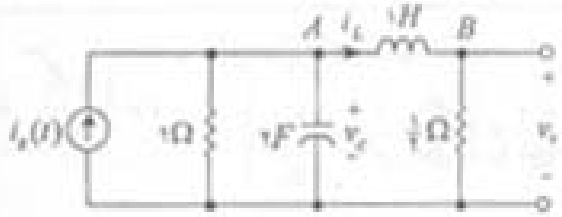
$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = \frac{8}{45}\frac{di(0^+)}{dt} = -\frac{32}{45}V$$

مسئله ۱۴

الف- پاسخ پله v_o را حساب کنید.

ب- پاسخ ضربه v_o را حساب کنید.

$(v_C(0) = 1V \ , \ i_L(0) = 1A)$



شکل مسئله ۱۴

حل : الف ـ با توجه به شکل مدار داریم

$$KCL \text{ برای گره } B \rightarrow \int(v_o - v_C)dt + \frac{v_o}{\frac{1}{2}} = 0 \rightarrow \int(v_C - v_o)dt = 2v_o \rightarrow v_C = 2\frac{dv_o}{dt} + v_o$$

$$KCL \text{ برای گره } A \rightarrow -i_s + \frac{v_C}{1} + 2\frac{dv_C}{dt} + \int(v_C - v_o)dt = 0$$

$$\rightarrow -i_s + 2\frac{dv_o}{dt} + v_o + 2\frac{d\left(2\frac{dv_o}{dt} + v_o\right)}{dt} + 2v_o = 0 \rightarrow 4\frac{d^2v_o}{dt^2} + 4\frac{dv_o}{dt} + 3v_o = i_s$$

$$i_s(t) = u(t) = 1 \ , \ t > 0 \rightarrow 4\frac{d^2v_o}{dt^2} + 4\frac{dv_o}{dt} + 3v_o = 1 \ , \ t > 0$$

معادله مشخصه : $4s^2 + 4s + 3 = 0 \rightarrow s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\rightarrow \quad v_1(t) = \underbrace{e^{-\frac{t}{2}}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{C}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی C در معادله دیفرانسیل $3C = 1$ و یا $C = \frac{1}{3}$ شده و با اعمال شرایط اولیه داریم

$$v_1(0) = \frac{1}{2}i_L(0) = \frac{1}{2}V \rightarrow A + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \rightarrow A = \frac{1}{6}$$

$$\frac{dv_1(0)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{di_L(0)}{dt} = \frac{1}{2}v_L(0) = \frac{1}{2}\left(v_s(0) - v_1(0)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \rightarrow -\frac{A}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}B = \frac{1}{4} \rightarrow B = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\rightarrow \quad v_1(t) = s(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{6}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{3} \quad , \quad t > 0$$

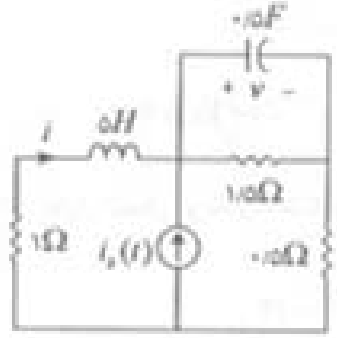
ب ـ با توجه به خطی وتغییرناپذیر با زمان بودن مدار از پاسخ پله مشتق گرفته و پاسخ ضربه را بدست می آوریم

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{6}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + e^{-\frac{t}{2}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{12}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$= \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

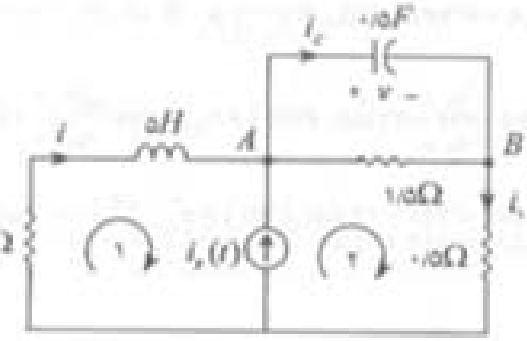
مسئله ۱۵

$v(t), i(t) = ?$ ، $i_s(t) = \left(9 + 3e^{-3t}\right)u(t)$ (شرایط اولیه صفراند)



شکل مسئله ۱۵

حل : با توجه به شکل زیر و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم



KCL برای گره (B) $\rightarrow -0.5\frac{dv}{dt}-\frac{v}{1.5}+i_L=0 \rightarrow i_L=0.5\frac{dv}{dt}+\frac{v}{1.5}$

KVL برای حلقه شامل منبعهای ۱ و ۲ $\rightarrow i+5\frac{di}{dt}+v+0.5\left(0.5\frac{dv}{dt}+\frac{v}{1.5}\right)=0$

$$\rightarrow i+5Di+v+0.25Dv+\frac{2}{3}v=0 \rightarrow i=-\frac{3D+20}{60D+12}v$$

KCL برای گره (A) $\rightarrow -i_s-i+0.5\frac{dv}{dt}+\frac{v}{1.5}=0 \rightarrow -i_s+\frac{3D+20}{60D+12}v+0.5Dv+\frac{v}{1.5}=0$

$$\rightarrow \left(\frac{3D+20}{60D+12}+\frac{1}{2}D+\frac{2}{3}\right)v=i_s \rightarrow \left(30D^2+29D+22\right)v=\left(60D+12\right)i_s$$

$$\rightarrow 30\frac{d^2v}{dt^2}+29\frac{dv}{dt}+22v=60\frac{di_s}{dt}+12i_s=108-324e^{-t}$$

معادله مشخصه: $30s^2+29s+22=0 \rightarrow s=-0.82\pm j0.36$

$$\rightarrow v(t)=\underbrace{e^{-0.82t}\left(A\cos 0.36t+B\sin 0.36t\right)}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_1+K_2e^{-t}}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل خواهیم داشت

$$12K_2e^{-t}-98K_2e^{-t}+22K_2e^{-t}+22K_1=108-324e^{-t}$$

$$\rightarrow 12K_2-98K_2+22K_2=-324 \rightarrow K_2=-7 \;,\; 22K_1=108 \rightarrow K_1=4.5$$

در $t=0^+$ خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز خواهد بود بنابراین داریم

$$v(0^+)=0 \;,\; i_L(0)=i_s(0)=12 \rightarrow 0.5\frac{dv(0)}{dt}=12 \rightarrow \frac{dv(0)}{dt}=24$$

$$v(0^+)=0 \rightarrow A+4.5-7=0 \rightarrow A=2.5$$

$$\frac{dv(0)}{dt}=24 \rightarrow -0.82A+0.36B-2K_2=0 \rightarrow B=-22$$

$$\rightarrow v(t)=e^{-0.82t}\left(2.5\cos 0.36t-22\sin 0.36t\right)+4.5-7e^{-t} \;,\; i=0.5\frac{dv}{dt}+\frac{v}{1.5}-i_s$$

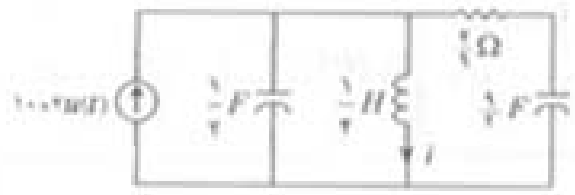
$$=0.5\left[-0.82e^{-0.82t}\left(2.5\cos 0.36t-22\sin 0.36t\right)+e^{-0.82t}\left(-0.9\sin 0.36t-15.82\cos 0.36t\right)\right.$$

$$+12e^{-2t}\Big]+\frac{9}{1.5}\Big[e^{-0.8t}\left(2.5\cos 0.36t-22\sin 0.36t\right)+2.5-7e^{-2t}\Big]-9-3e^{-2t}$$

$$\rightarrow\ i(t)=e^{-0.8t}\left(-16.22\cos 0.36t-2.17\sin 0.36t\right)-6-6.3e^{-2t}$$

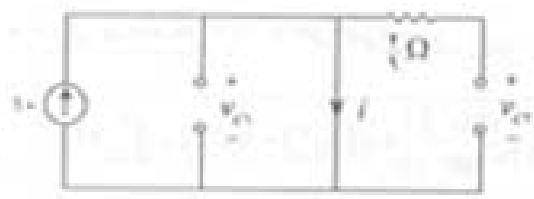
مسئله ۱۶

$i=?$

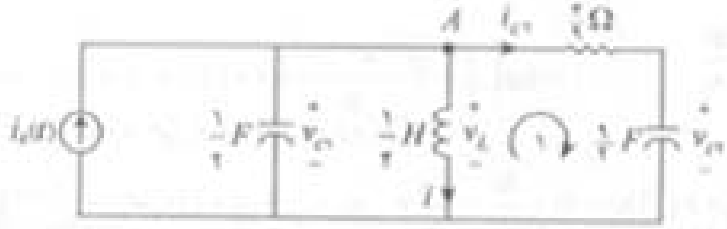


شکل مسئله ۱۶

حل : به ازای $t<0$ ، $10+2u(t)=10$ بوده و در $t=0^-$ مدار به حالت دائمی خود می رسد. لذا خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه خواهد بود.



بنابراین $i(0^-)=10A$ و $\frac{di(0^-)}{dt}=0$ خواهد بود. مدار را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$KVL \text{ برای مش } 1 \rightarrow -\frac{1}{2}\frac{di}{dt}+\frac{2}{9}i_{C_2}+\frac{1}{2}\int i_{C_2}dt=0 \rightarrow -\frac{1}{2}\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{2}{9}\frac{di_{C_2}}{dt}+\frac{2}{9}i_{C_2}=0$$

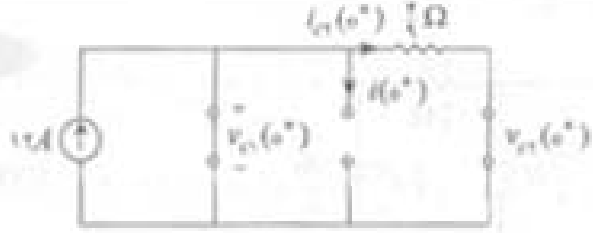
$$\rightarrow -\frac{1}{2}D^2i+\frac{2}{9}Di_{C_2}+\frac{2}{9}i_{C_2}=0 \rightarrow i_{C_2}=\frac{9}{8D+1}D^2i \quad , \quad v_{C_1}=v_L=\frac{1}{4}\frac{di}{dt}$$

$$KCL \text{ برای گره } A \rightarrow -i_s+\frac{1}{2}\frac{dv_{C_1}}{dt}+i+i_{C_2}=0 \rightarrow -i_s+\frac{1}{8}\frac{d^2i}{dt^2}+i+i_{C_2}=0$$

$$\rightarrow -i_s+\frac{1}{8}D^2i+i+\frac{9}{8D+1}D^2i=0 \rightarrow \left(D^3+5D^2+8D+2\right)i=\left(8D+2\right)i_s$$

$$i_s(t) = 10 + 24u(t) \quad \rightarrow \quad \frac{d^3 i}{dt^3} + 5\frac{d^2 i}{dt^2} + 8\frac{di}{dt} + 4i = 16\delta(t) + 8u(t) + 40$$

در $t = 0^-$ ، $i_s(t) = 12$ و سقف مدار باز و خازنها اتصال کوتاه می باشند.



$$i(0^+) = i(0^-) = 10A \quad \rightarrow \quad i_{v_1}(0^+) = 2A \quad \rightarrow \quad v_L(0^+) = \frac{2}{3} i_{v_1}(0^+) + v_{v_2}(0^+) = \frac{2}{3}(2) = \frac{8}{3}$$

$$v_L(0^+) = \frac{1}{4}\frac{di(0^+)}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{di(0^+)}{dt} = 4v_L(0^+) = \frac{32}{3}$$

با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

$$\frac{d^2 i(0^+)}{dt^2} - \frac{d^2 i(0^-)}{dt^2} + 5\left(\frac{di(0^+)}{dt} - \frac{di(0^-)}{dt}\right) + 8\left(i(0^+) - i(0^-)\right) + \int_{0^-}^{0^+} 4i$$

$$= 16\int_{0^-}^{0^+} \delta(t) + \int_{0^-}^{0^+} \left(8u(t) + 40\right)dt \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 i(0^+)}{dt^2} - 0 + 5\left(\frac{32}{3} - 0\right) + 8(10 - 10) + 0 = 16 + 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{d^2 i(0^+)}{dt^2} = -\frac{51}{3}$$

بنابر این معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر نوشت.

$$\frac{d^3 i}{dt^3} + 5\frac{d^2 i}{dt^2} + 8\frac{di}{dt} + 4i = 48 \ , \quad i(0^+) = 10 \ , \quad \frac{di(0^+)}{dt} = \frac{32}{3} \ , \quad \frac{d^2 i(0^+)}{dt^2} = -\frac{51}{3} \ , \quad t > 0$$

معادله مشخصه : $s^3 + 5s^2 + 8s + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad (s+1)(s+2)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad s = -1 \ , \ -2$

$$\rightarrow \quad i(t) = \underbrace{K_1 e^{-t} + (K_2 + K_3 t)e^{-2t}}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K_4}_{\text{پاسخ خصوصی}} \ , \quad t > 0$$

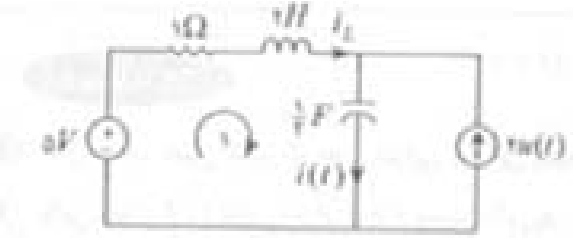
با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $4K_4 = 48$ و یا $K_4 = 12$ شده و با اعمال شرایط اولیه خواهیم داشت.

$$\begin{cases} i(0^+)=10 \rightarrow K_1+K_2+12=10 \rightarrow K_1+K_2=-2 \\ \dfrac{di(0^+)}{dt}=\dfrac{32}{9} \rightarrow -9K_1-8K_2+9K_3=32 \\ \dfrac{d^2i(0^+)}{dt^2}=-\dfrac{51}{9} \rightarrow 9K_1+36K_2-36K_3=-51 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_1=\dfrac{71}{9} \\ K_2=-\dfrac{89}{9} \\ K_3=-\dfrac{75}{9} \end{cases}$$

$$\rightarrow i(t)=\frac{71}{9}e^{-2}+\left(-\frac{89}{9}-\frac{75}{9}t\right)e^{-3t}+12 \ , \ t>0$$

مسئله ۱۷

$i(t)=?$



شکل مسئله ۱۷

حل : به ازای $t<0$ ، $u(t)=0$ بوده و در $t=0^-$ مدار به حالت دایمی خود رسیده بنابراین خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه خواهد بود. بنابراین $i(0^-)=0$ و $\frac{di(0^-)}{dt}=0$ می باشد. با توجه به شکل مسئله داریم:

$$i_L=i-2u(t)$$

$$KVL \text{ برای مش ۱} \rightarrow -5+i-2u(t)+2\frac{d(i-2u(t))}{dt}+\frac{1}{2}\int i\,dt=0$$

$$\rightarrow \frac{di}{dt}-2\delta(t)+2\frac{d^2i}{dt^2}-2\delta'(t)+2i=0 \rightarrow 2\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{di}{dt}+2i=2\delta(t)+2\delta'(t)$$

در $t=0^-$ ، $u(t)=0$ و خازن اتصال کوتاه می باشد بنابراین $i(0^-)=2A$ بوده و همچنین با انتگرال گیری از 0^- تا 0^+ خواهیم داشت:

$$2\frac{di(0^+)}{dt}-2\frac{di(0^-)}{dt}+i(0^+)-i(0^-)+\int_{0^-}^{0^+}i\,dt=2\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\,dt+2\int_{0^-}^{0^+}\delta'(t)\,dt$$

$$\rightarrow 2\frac{di(0^+)}{dt}-0+0+0=2+0 \rightarrow \frac{di(0^+)}{dt}=1$$

بنابراین معادله دیفرانسیل بدست آمده را می توان بصورت زیر نوشت:

$$2\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{di}{dt}+2i=0 \ , \ i(0^+)=0 \ , \ \frac{di(0^+)}{dt}=1 \ , \ t>0$$

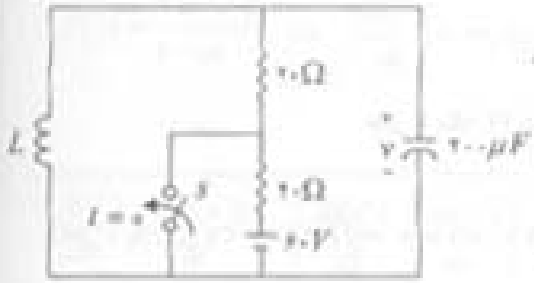
معادله مشخصه : $2s^2+s+2=0 \rightarrow s=-\frac{1}{4}\pm j\frac{\sqrt{15}}{4}$

$$\rightarrow i(t)=e^{-\frac{1}{4}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{15}}{4}t+B\sin\frac{\sqrt{15}}{4}t\right) \rightarrow i(0^+)=2 \rightarrow A=2$$

$$\frac{di(0^+)}{dt}=1 \rightarrow -\frac{1}{4}A+\frac{\sqrt{15}}{4}B=1 \rightarrow B=2\frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$\rightarrow i(t)=e^{-\frac{1}{4}t}\left(2\cos\frac{\sqrt{15}}{4}t+2\frac{\sqrt{15}}{3}\sin\frac{\sqrt{15}}{4}t\right),\ t>0$$

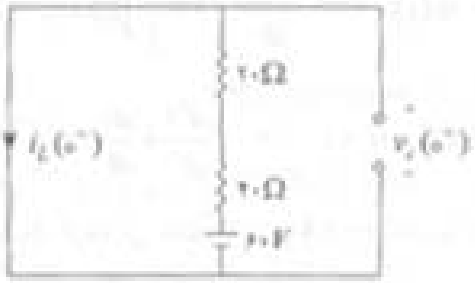
مسئله ۱۸



شکل مسئله ۱۸

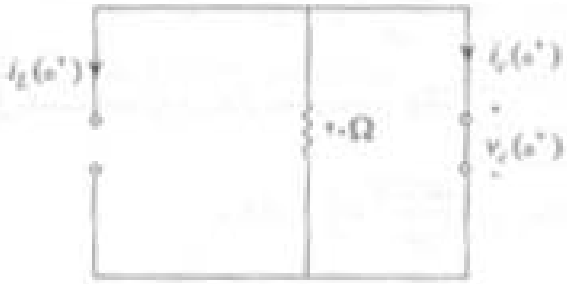
- L را چنان تعیین کنید که مدار میرایی بحرانی باشد.
- با این مقدار L، $v(t)$ را برای $t \geq 0$ بدست آورید.

حل : به ازای $t<0$ کلید باز بوده و در $t=0^-$ مدار به حالت دایمی خود می رسد. بنابراین سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز خواهد بود.



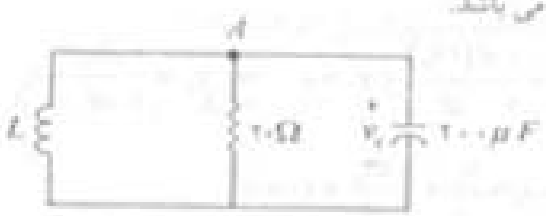
$$\rightarrow i_L(0^-)=\frac{60}{20+20}=1A\ ,\ v_c(0^-)=0$$

در $t=0^+$ کلید بسته شده و خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه خواهد شد.



$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1A \rightarrow i_L(0^-) = -1A \rightarrow 200 \times 10^{-6}\frac{dv_c(0^+)}{dt} = -1 \rightarrow \frac{dv_c(0^-)}{dt} = -5000$$

برای $t \geq 0$ مدار بصورت زیر می باشد.



$$KCL \text{ برای گره } (A) \rightarrow \frac{1}{L}\int v_c dt + \frac{v_c}{20} + 200 \times 10^{-6}\frac{dv_c}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2 v_c}{dt^2} + 250\frac{dv_c}{dt} + \frac{5000}{L}v_c = 0 \quad , \quad 2\alpha = 250 \rightarrow \alpha = 125 \ , \ w_0^2 = \frac{5000}{L} \rightarrow w_0 = \sqrt{\frac{5000}{L}}$$

در حالت میرایی بحرانی $\alpha = w_0$ می باشد بنابراین داریم

$$125 = \sqrt{\frac{5000}{L}} \rightarrow L = 0/32H$$

در ادامه به ازای L بدست آمده ولتاژ دو سر خازن را محاسبه خواهیم کرد.

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + 250\frac{dv_c}{dt} + 15625v_c = 0 \quad , \quad v_c(0^+) = 0 \quad , \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = -5000$$

معادله مشخصه : $s^2 + 250s + 15625 = 0 \rightarrow (s+125)^2 = 0 \rightarrow s = -125$ (ریشه مضاعف)

$$\rightarrow v_c(t) = (K_1 + K_2 t)e^{-125t} \quad , \quad v_c(0^+) = 0 \rightarrow K_1 = 0 \quad , \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = -5000$$

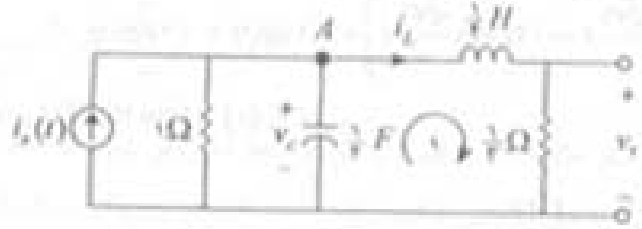
$$-125K_1 + K_2 = -5000 \rightarrow K_2 = -5000 \rightarrow v_c(t) = -5000te^{-125t} \ , \ t \geq 0$$

مسئله ۱۹

پاسخ v_o را محاسبه کنید. (حالت اولیه صفر است).

الف- $i_s(t) = (\cos 2t)u(t)$ ب- $i_s(t) = (\sin 2t)u(t)$ پ- $i_s(t) = \delta(t)$

ث- چه رابطه ای بین پاسخهای قسمتهای الف، ب و پ وجود دارد.



شکل مسئله ۱۹

حل : با توجه به شکل مسئله داریم

$$i_L = \frac{v_c}{\frac{1}{2}} = 3v_c$$

$$KVL \text{ برای مش ۱} \rightarrow -v_c + \frac{1}{2}\frac{d(3v_c)}{dt} + v_c = 0 \rightarrow v_c = \frac{3}{2}\frac{dv_c}{dt} + v_c$$

$$KCL \text{ برای گره } A \rightarrow -i_s + \frac{v_c}{1} + \frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt} + i_L = 0$$

$$\rightarrow -i_s + \frac{3}{2}\frac{dv_c}{dt} + v_c + \frac{1}{2}\frac{d\left(\frac{3}{2}\frac{dv_c}{dt} + v_c\right)}{dt} + 3v_c = 0 \rightarrow 3\frac{d^2v_c}{dt^2} + 10\frac{dv_c}{dt} + 32v_c = 8i_s(t)$$

الف ـ به ازای ورودی $i_s(t) = (\cos 4t)u(t)$ داریم

$$3\frac{d^2v_c}{dt^2} + 10\frac{dv_c}{dt} + 32v_c = 8\cos 4t \quad , \quad t > 0$$

$$\text{معادله مشخصه} : 3s^2 + 10s + 32 = 0 \rightarrow s = -\frac{5}{3} \pm j\frac{\sqrt{71}}{3}$$

$$\rightarrow v_c(t) = \underbrace{e^{-\frac{5}{3}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{71}}{3}t + B\sin\frac{\sqrt{71}}{3}t\right)}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K_1\sin 4t + K_2\cos 4t}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم

$$(20K_1 - 20K_2)\sin 4t + (20K_1 + 20K_2)\cos 4t = 8\cos 4t \rightarrow \begin{cases} 20K_1 - 20K_2 = 0 \\ 20K_1 + 20K_2 = 8 \end{cases} \rightarrow K_1 = K_2 = 0/2$$

و با اعمال شرایط اول خواهیم داشت

$$v_c(0) = 0 \rightarrow A + K_2 = 0 \rightarrow A = -K_2 = -0/2$$

$$\frac{dv_c(0)}{dt} = 0 \rightarrow -\frac{5}{3}A + \frac{\sqrt{71}}{3}B + 2K_1 = 0 \rightarrow B = -0/24$$

$$\rightarrow v_c(t) = e^{-\frac{5}{3}t}\left(-0/2\cos\frac{\sqrt{71}}{3}t - 0/24\sin\frac{\sqrt{71}}{3}t\right) + 0/2\sin 4t + 0/2\cos 4t$$

ب ـ به ازای ورودی $i_s(t) = (\sin 4t)u(t)$ داریم

$$3\frac{d^2v_c}{dt^2} + 10\frac{dv_c}{dt} + 32v_c = 8\sin 4t \quad , \quad t > 0$$

$$\rightarrow \quad v_c(t) = e^{-\frac{5t}{3}}\left(A\cos\frac{\sqrt{71}}{3}t + B\sin\frac{\sqrt{71}}{3}t\right) + K_1\sin 12t + K_2\cos 12t$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل خواهیم داشت.

$$\begin{cases} 20K_1 - 20K_2 = 8 \\ 20K_1 + 20K_2 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad K_1 = 0/2 \quad , \quad K_2 = -0/2$$

و با اعمال شرایط اول خواهیم داشت.

$$v_c(0) = 0 \quad \rightarrow \quad A + K_2 = 0 \quad \rightarrow \quad A = -K_2 = 0/2$$

$$\frac{dv_c(0)}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{5}{3}A + \frac{\sqrt{71}}{3}B + 2K_1 = 0 \quad \rightarrow \quad B = 0/022$$

$$\rightarrow \quad v_c(t) = e^{-\frac{5t}{3}}\left(0/2\cos\frac{\sqrt{71}}{3}t + 0/022\sin\frac{\sqrt{71}}{3}t\right) + 0/2\sin 12t - 0/2\cos 12t$$

ب ـ به ازای ورودی $i_s(t) = \delta(t)$ داریم

$$3\frac{d^2v_c}{dt^2} + 10\frac{dv_c}{dt} + 32v_c = \delta(t)$$

با انتگرال گیری از طرفین معادله بالا در فاصله 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

$$3\frac{d^2v_c(0^+)}{dt} - 3\frac{d_c(0^+)}{dt} + 10\left(v_c(0^+) - v_c(0^-)\right) + \int_{0^-}^{0^+} 32V_c dt = \int_{0^-}^{0^+}\delta(t)$$

$$3\frac{dv_c(0^+)}{dt} - 0 + 0 + 0 = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{d_c(0^+)}{dt} = \frac{1}{3}$$

بنابراین معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر نوشت.

$$3\frac{d^2v_c}{dt^2} + 10\frac{dv_c}{dt} + 32v_c = 0 \quad , \quad v_c(0^+) = 0 \quad , \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = \frac{1}{3}$$

$$v_c(t) = e^{-\frac{5t}{3}}\left(A\cos\frac{\sqrt{71}}{3}t + B\sin\frac{\sqrt{71}}{3}t\right) \quad , \quad v_c(0^+) = 0 \quad \rightarrow \quad A = 0$$

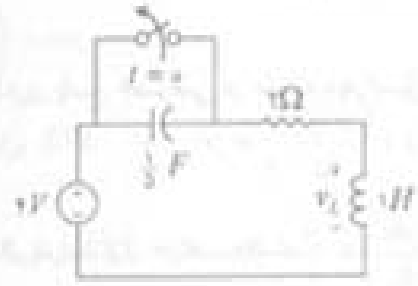
$$\frac{d_c(0^+)}{dt} = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad -\frac{5}{3}A + \frac{\sqrt{71}}{3}B = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad B = \frac{1}{\sqrt{71}}$$

$$\rightarrow \quad v_c(t) = \frac{1}{\sqrt{71}}e^{-\frac{5t}{3}}\sin\frac{\sqrt{71}}{3}t \quad , \quad t > 0$$

ت ـ پاسخ حالت (ب) مشتق پاسخ حالت (الف) است و این از آنجا ناشی می شود که مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان بوده و ورودی حالت (ب) مشتق ورودی حالت (الف) است (برای زمانهای بزرگتر از صفر)

مسئله ۲۰

$v_L(t) = ?$ برای $t \geq 0$ (کلید برای مدت طولانی بسته بوده است)

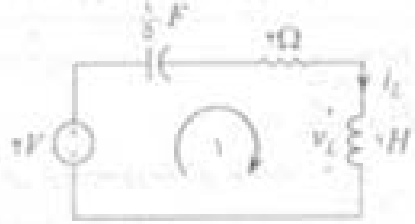


شکل مسئله ۲۰

حل : به ازای $t < 0$ کلید بسته بوده و در $t = 0^-$ مدار به حالت دایمی می رسد بنابراین منبع اتصال کوتاه خواهد بود.

$$i_L(0^-) = \frac{12}{2} = 2A \quad , \quad v_L(0^-) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{di_L(0^-)}{dt} = 0$$

به ازای $t \geq 0$ کلید باز خواهد شد و مدار بصورت زیر می شود



$$KVL \text{ برای مش ۱} \rightarrow -12 + \frac{1}{5}\int i_L dt + 2i_L + \frac{di_L}{dt} = 0 \rightarrow 2\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\frac{di_L}{dt} + 5i_L = 0$$

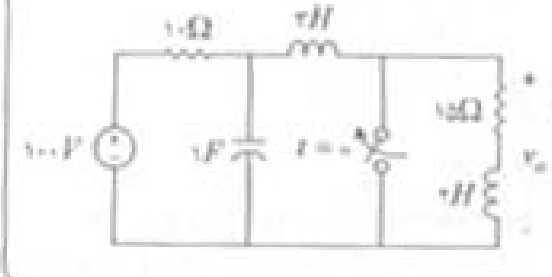
$$\text{معادله مشخصه} : s^2 + 2s + 5 = 0 \rightarrow s = -1 \pm j2 \rightarrow i_L(t) = e^{-t}\left(A\cos 2t + B\sin 2t\right)$$

$$\begin{cases} i_L(0) = 2 \rightarrow A = 2 \\ \dfrac{di_L(0)}{dt} = 0 \rightarrow -A + 2B = 0 \rightarrow B = 1 \end{cases} \rightarrow i_L(t) = e^{-t}\left(2\cos 2t + \sin 2t\right)$$

$$v_L(t) = \frac{di_L(t)}{dt} = -e^{-t}\left(2\cos 2t + \sin 2t\right) + e^{-t}\left(-2\sin 2t + 2\cos 2t\right) = -5e^{-t}\sin 2t \quad , \quad t > 0$$

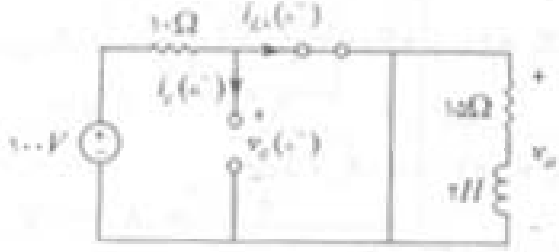
مسئله ۳۱

$v_o(t) = ?$ برای $t \geq 0$. (کلید برای مدت طولانی بسته بوده است)



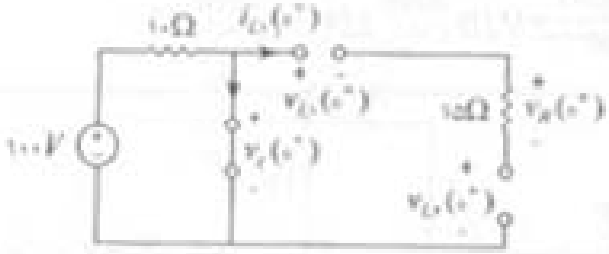
شکل مسئله ۳۱

حل : به ازای $t < 0$ کلید به مدت طولانی بسته است پس در $t = 0^-$ مدار به حالت دایمی رسیده ، خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه خواهد شد.



$$i_{L_1}(0^-) = \frac{100}{10} = 10A \quad , \quad v_c(0^-) = 0$$

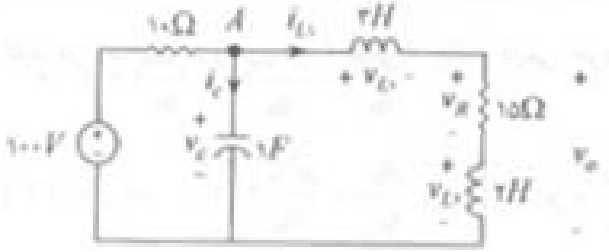
در $t = 0^+$ کلید باز شده سلف مدار باز و خازن اتصال کوتاه خواهد بود.



$$i_{L_1}(0^+) = i_{L_1}(0^-) = 10A \quad , \quad v_c(0^+) = v_c(0^-) = 0 \quad , \quad -v_c(0^+) + v_{L_1}(0^+) + v_R(0^+) + v_{L_2}(0^+) = 0$$

$$\rightarrow \quad 0 + 2\frac{di_{L_1}(0^+)}{dt} + 15i_{L_1}(0^+) + 2\frac{di_{L_1}(0^+)}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{di_{L_1}(0^+)}{dt} = -\frac{15 \times 10}{5} = -30$$

به ازای $t > 0$ مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$v_C = v_{L_1} + v_R + v_{L_2} = 3\frac{di_{L_1}}{dt} + 15i_{L_1} + 2\frac{di_{L_1}}{dt} = 5\frac{di_{L_1}}{dt} + 15i_{L_1}$$

KCL برای گره (A) $\rightarrow \dfrac{v_C - 100}{10} + \dfrac{dv_C}{dt} + i_{L_1} = 0$

$$\rightarrow \frac{5\frac{di_{L_1}}{dt} + 15i_{L_1} - 100}{10} + \frac{d}{dt}\left(5\frac{di_{L_1}}{dt} + 15i_{L_1}\right) + i_{L_1} = 0 \rightarrow 10\frac{d^2 i_{L_1}}{dt^2} + 31\frac{di_{L_1}}{dt} + 5i_{L_1} = 20$$

معادله مشخصه : $10s^2 + 31s + 5 = 0 \rightarrow s = -2/93, -0/17$

$$\rightarrow i_{L_1}(t) = K_1 e^{-2/93t} + K_2 e^{-0/17t} + K_3$$

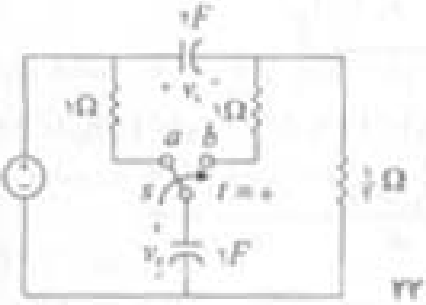
با جایگذاری پاسخ خصوصی K_3 در معادله دیفرانسیل $5K_3 = 20$ و یا $K_3 = 4$ شده و با اعمال شرایط اولیه خواهیم داشت.

$$\begin{cases} i_{L_1}(0^+) = 10 \rightarrow K_1 + K_2 + 4 = 10 \rightarrow K_1 + K_2 = 6 \\ \dfrac{di_{L_1}(0^+)}{dt} \rightarrow -2/93K_1 - 0/17K_2 = -30 \end{cases} \rightarrow K_1 = 10/5 \quad K_2 = -4/5$$

$$\rightarrow i_{L_1}(t) = 10/5e^{-2/93t} - 4/5e^{-0/17t} + 4$$

$$v_R(t) = 15i_{L_1}(t) + 2\frac{di_{L_1}(t)}{dt} = 98/4e^{-2/93t} - 65/97e^{-0/17t} + 60$$

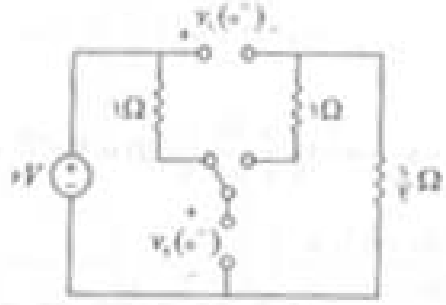
مسئله ۲۲



شکل مسئله ۲۲

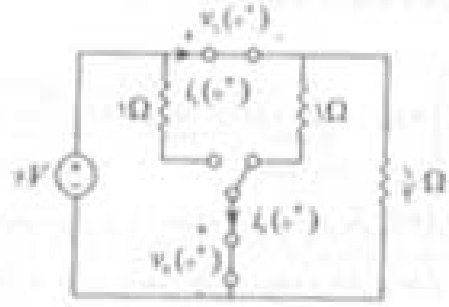
- $v_1(t)$ و $v_2(t)$ را برای $t > 0$ حساب کنید.
- برای $t \to \infty$ ، $v_1(t)$ و $v_2(t)$ را مشخص کنید.
- آیا می توانید بدون استفاده از معادله دیفرانسیل این مقادیر را تعیین کنید.

حل : به ازای $t > 0$ کلید در وضعیت a و در $t = 0^-$ مدار به حالت دائمی خود می رسد بنابراین خازنها مدار باز خواهند بود.



$v_1(0^-) = v_2(0^-) = 6V$

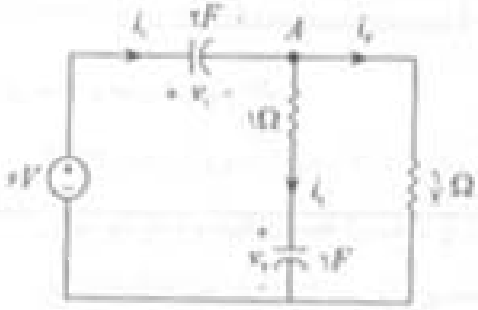
در $t = 0^+$ کلید به وضعیت b رفته و خازنها اتصال کوتاه خواهند شد.



$$v_1(0^+) = v_1(0^-) = 6V \ , \ v_2(0^+) = v_2(0^-) = 6V \ , \ i_1(0^+) = i_2(0^+) = \frac{6 - v_1(0^+) - v_2(0^+)}{1} = -6$$

$$2\frac{dv_1(0^+)}{dt} = i_1(0^+) = -6 \quad \rightarrow \quad \frac{dv_1(0^+)}{dt} = -3 \ , \ \frac{dv_2(0^+)}{dt} = i_2(0^+) = -6$$

به ازای $t > 0$ کلید در وضعیت b بوده و مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$i_2 = \frac{dv_2}{dt} \ , \ \begin{cases} v_A = i_2 + v_2 = \frac{dv_2}{dt} + v_2 \\ v_A = \frac{1}{2} i_1 \end{cases} \rightarrow \ i_1 = 2\frac{dv_2}{dt} + 2v_2$$

$$v_1 = 6 - v_A = 6 - \frac{dv_2}{dt} - v_2 \quad \rightarrow \quad i_1 = 2\frac{dv_1}{dt} = -2\frac{d^2 v_2}{dt^2} - 2\frac{dv_2}{dt}$$

KCL برای گره A $\rightarrow \ -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \ \rightarrow \ 2\frac{d^2 v_2}{dt^2} + 2\frac{dv_2}{dt} + 2\frac{dv_2}{dt} + 2v_2 + \frac{dv_2}{dt} = 0$

$$\rightarrow \quad 2\frac{d^2 v_2}{dt} + 5\frac{dv_2}{dt} + 2v_2 = 0$$

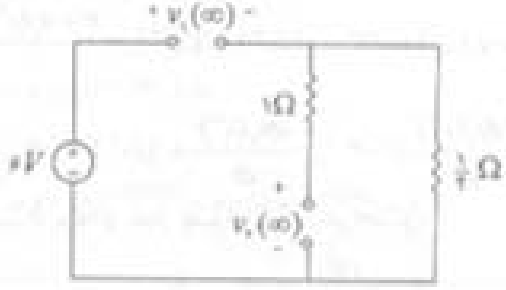
معادله مشخصه : $2s^2 + 5s + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad s = -2, -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad v_2(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-\frac{1}{2}t}$

$$\begin{cases} v_2(0^+) = 6 \quad \rightarrow \quad K_1 + K_2 = 6 \\ \dfrac{dv_2(0^+)}{dt} = -6 \quad \rightarrow \quad -2K_1 - \frac{1}{2}K_2 = -6 \end{cases} \rightarrow K_1 = 2 \,,\, K_2 = 4 \quad \rightarrow \quad v_2(t) = 2e^{-2t} + 4e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$\rightarrow \quad v_1(t) = 6 - \frac{dv_2(t)}{dt} - v_2(t) = 6 + 2e^{-2t} - 2e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$\lim_{t\to\infty} v_2(t) = \lim_{t\to\infty}\left(2e^{-2t} + 4e^{-\frac{1}{2}t}\right) = 0 \quad , \quad \lim_{t\to\infty} v_1(t) = \lim_{t\to\infty}\left(6 + 2e^{-2t} - 2e^{-\frac{1}{2}t}\right) = 6$$

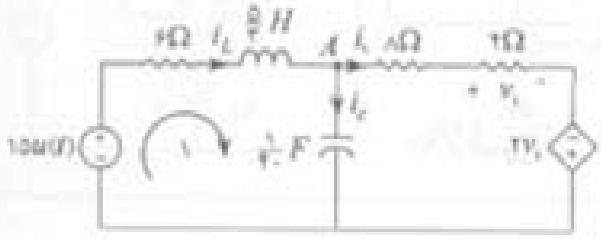
در ادامه بدون استفاده از معادله دیفرانسیل و با استفاده از توجیه فیزیکی $v_1(\infty)$ و $v_2(\infty)$ را بدست خواهیم آورد. می دانیم که به ازای $t \to \infty$، مدار به حالت دایمی خود رسیده و خازنها مدار باز خواهند بود.



بنابراین جریان تمامی شاخه برابر صفر بوده و خواهیم داشت.

$v_1(\infty) = 6\,V \quad , \quad v_2(\infty) = 0\,V$

مسئله ۲۳



$v_1 = ?$

شکل مسئله ۲۳

حل : به ازای $t < 0$ ، $u(t) = 0$ بوده و لذا ولتاژ اولیه خازن و جریان اولیه سلف برابر صفر خواهد بود. با توجه به شکل مسئله داریم.

$$i_1 = \frac{v_1}{4} \quad , \quad v_g = 8i_1 + v_1 - 2v_1 = 8\left(\frac{v_1}{4}\right) + v_1 - 2v_1 = v_1$$

$$i_2 = \frac{1}{20}\frac{dv_g}{dt} = \frac{1}{20}\frac{dv_1}{dt} \quad , \quad i_L = i_2 + i_1 = \frac{1}{20}\frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1}{4}$$

KVL برای مش ۱ $\rightarrow \quad -150u(t) + 6\left(\frac{1}{20}\frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1}{4}\right) + \frac{5}{3}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{20}\frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1}{4}\right) + v_1 = 0$

$$\rightarrow \quad 5\frac{d^2v_1}{dt^2} + 68\frac{dv_1}{dt} + 300v_1 = 1800 \quad , \quad t > 0$$

معادله مشخصه : $5s^2 + 68s + 300 = 0 \quad \rightarrow \quad s = -6/8 \pm j3/7$

$$\rightarrow \quad v_1(t) = \underbrace{e^{-6/8t}\left(A\cos 3/7t + B\sin 3/7t\right)}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{C}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی C در معادله دیفرانسیل، $300C = 1800$ و یا $C = 6$ حاصل شد همچنین با اعمال شرایط اولیه خواهیم داشت

$$\begin{cases} v_1(0) = 0 \rightarrow A + 6 = 0 \rightarrow A = -6 \\ \dfrac{dv_1(0)}{dt} = 0 \rightarrow -6/8A + 3/7B = 0 \rightarrow B = 11/03 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad v_1(t) = e^{-6/8t}\left(-6\cos 3/7t + 11/03\sin 3/7t\right) + 6 \quad , \quad t > 0$$

مسئله ۳۴

شکل مسئله ۳۴

الف- $v_c(t)$ و $i_L(t)$ را حساب کنید. ($v_c(0) = 1V$ و $i_L(0) = 2A$)

ب- انرژی ذخیره شده در خازن و سلف را حساب کنید و شکل موجهای آنها را رسم کنید. نشان دهید مجموع این دو انرژی در هر لحظه مقداری ثابت است و برابر همان انرژی ذخیره شده اولیه در مدار است.

حل : الف ـ با توجه به شکل مسئله داریم:

$$v_L = v_c \quad , \quad i_L + i_c = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1}\int v_L dt + \frac{dv_c}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad 2\int v_c dt + \frac{dv_c}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2v_c}{dt^2} + 2v_c = 0$$

معادله مشخصه : $s^2 + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad s = \pm j\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad v_c(t) = A\sin\sqrt{2}t + B\cos\sqrt{2}t$

$$v_c(0)=1 \quad \rightarrow \quad B=1$$

$$\frac{dv_c(0)}{dt}=i_c(0)=-i_L(0)=-2 \quad \rightarrow \quad 2A=-2 \quad \rightarrow \quad A=-1 \quad \rightarrow \quad v_c(t)=\cos 2t-\sin 2t$$

$$i_L(t)=i_L(0)+\frac{1}{2}\int_0^t v_L(t)dt=2+2\int_0^t v_c(t)dt=2+2\int_0^t(\cos 2t-\sin 2t)dt$$

$$=2+\left(2\sin 2t+2\cos 2t\right)\Big|_0^t=2\sin 2t+2\cos 2t$$

ب ـ

$$P_c(t)=v_c(t)i_c(t)=-v_c(t)i_L(t)=-(\cos 2t-\sin 2t)(2\cos 2t+2\sin 2t)$$

$$=-2\left(\cos^2 2t-\sin^2 2t\right)=-2\cos 4t$$

$$\rightarrow \quad W_c(t)=\int_0^t p_c(t)dt=\int_0^t -2\cos 4t=-\frac{1}{2}\sin 4t\Big|_0^t=-\frac{1}{2}\sin 4t$$

$$P_L(t)=v_L(t)i_L(t)=v_c(t)i_L(t)=(\cos 2t-\sin 2t)(2\cos 2t+2\sin 2t)$$

$$=2\left(\cos^2 2t-\sin^2 2t\right)=2\cos 4t$$

$$\rightarrow \quad W_L(t)=\int_0^t P_L(t)dt=\int_0^t 2\cos 4t dt=\frac{1}{2}\sin 4t\Big|_0^t=\frac{1}{2}\sin 4t$$

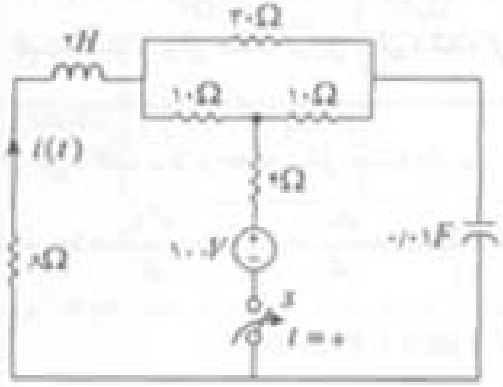
$$\rightarrow \quad W_c(t)+W_L(t)=-\frac{1}{2}\sin 4t+\frac{1}{2}\sin 4t=0$$

و مجموع انرژی اولیه ذخیره شده در مدار با توجه به جهات قراردادی برابر است با:

$$\frac{1}{2}CV_0^2-\frac{1}{2}LI_0^2=\frac{1}{2}(1)(1)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)(2)^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

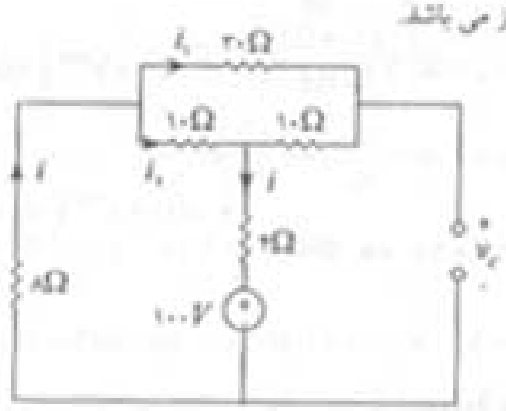
مسئله ۲۵

$i(t)=?$ (کلید S به مدت طولانی بسته بوده و در $t=0$ باز می شود)



شکل مسئله ۲۵

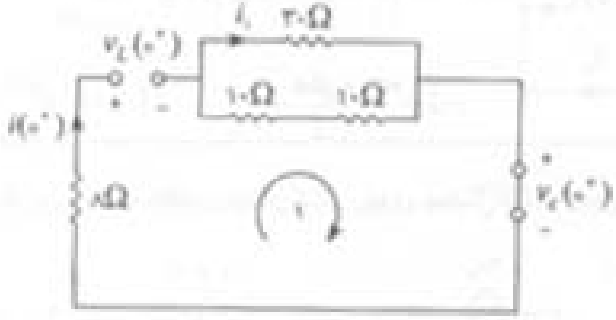
حل : به ازای $t < 0$ کلید K به مدت طولانی بسته بوده و مدار به حالت دایمی خود رسیده است بنابراین سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز می باشد.



$$t < 0 \quad \rightarrow \quad i(t) = -\frac{100}{(10+30)\,\|\,10+4+8} = -5A$$

$$i(0^-) = -5A \;,\; i_L(0^-) = \frac{10}{10+10+30}(-5) = -1A \;,\; v_C(0^-) = -8i(0) - 40i_L(0) = 70V$$

در $t = 0^+$ کلید باز شده، خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز خواهد بود.

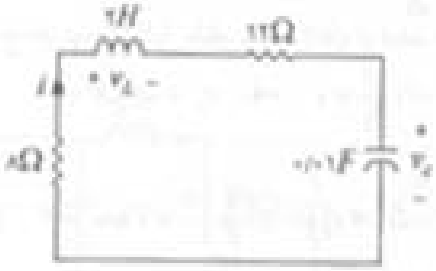


$$i(0^+) = i(0^-) = -5A \;,\; v_C(0^+) = v_C(0^-) = 70V$$

KVL برای مش ۱ $\rightarrow \quad 8i(0^+) + v_L(0^+) + \left[30\,\|\,(10+10)\right]i(0^+) + v_C(0^+) = 0$

$$\rightarrow 8(-5) + v_L(0^+) + 12(-5) + 70 = 0 \rightarrow v_L(0^+) = 30 \rightarrow 2\frac{di_L(0^+)}{dt} = 30 \rightarrow \frac{di_L(0^+)}{dt} = 15$$

به ازای $t > 0$ کلید باز بوده و مدار بصورت زیر می باشد.



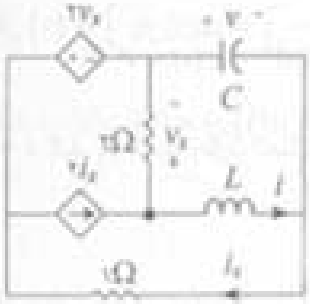
$$8i + 2\frac{di}{dt} + 12i + \frac{1}{0.1}\int i = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + 10\frac{di}{dt} + 50 i = 0$$

معادله مشخصه : $s^2 + 10s + 50 = 0 \quad \rightarrow \quad s = -5 \pm j5 \quad \rightarrow \quad i(t) = e^{-5t}\left(A\cos 5t + B\sin 5t\right)$

$$\begin{cases} i(0^+) = -5 \quad \rightarrow \quad A = -5 \\ \dfrac{di(0^+)}{dt} = 15 \quad \rightarrow \quad -5A + 5B = 15 \quad \rightarrow \quad B = 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad i(t) = e^{-5t}\left(-5\cos 5t + 2\sin 5t\right) \ , \ t > 0$$

$$\rightarrow \quad i(t) = \begin{cases} -5 \ , \ t < 0 \\ e^{-5t}\left(-5\cos 5t + 2\sin 5t\right) \ , \ t \geq 0 \end{cases}$$

مسئله ۲۶

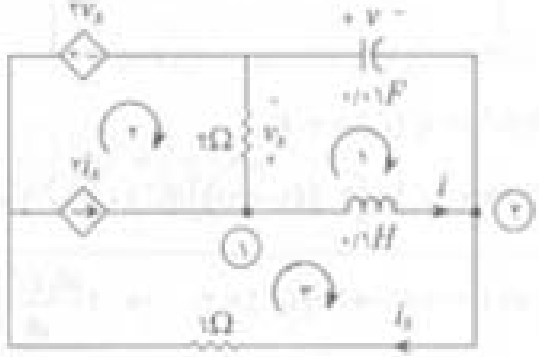


شکل مسئله ۲۶

$i(t) = ?$ و $v(t)$ برای $t > 0$.

($i(0^-) = 0$ و $v(0) = 10V$ و $L = 100mH$ و $C = 10mF$)

حل : با توجه به شکل زیر و با استفاده از روش اپراتوری در نمایش معادلات دیفرانسیل داریم



KCL برای گره ۲ $\rightarrow \quad -0.1\dfrac{dv}{dt} - i + i_s = 0 \quad \rightarrow \quad i_s = 0.1Dv + i$

KVL برای مش ۱ $\rightarrow \quad v_x + v - 0.1\dfrac{di}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad v_x = 0.1Di - v$

KCL برای گره ۱ $\rightarrow \quad -2\left(0.1Dv + i\right) + \dfrac{0.1Di - v}{2} + i = 0 \quad \rightarrow \quad i = \dfrac{\left(0.02D + 0.5\right)}{\left(0.05D - 1\right)}v$

KVL برای حلقه شامل مش های ۱ و ۲ $\rightarrow 2(0.1Di - v) + v + (0.01Dv + i) = 0$

$$\rightarrow 2\left(0.1D\frac{0.02D+0.5}{0.05D-1}v - v\right) + v + \left(0.01Dv + \frac{0.2D+0.5}{0.05D-1}v\right) = 0$$

$$\rightarrow 0.0025D^2v + 0.06Dv + 1.5v = 0 \quad \rightarrow \quad 25\frac{d^2v}{dt^2} + 600\frac{dv}{dt} + 1500v = 0$$

معادله مشخصه : $25s^2 + 600s + 1500 = 0 \quad \rightarrow \quad s = -6.67 \pm j17$

$$\rightarrow \quad v(t) = e^{-6.67t}(A\cos 17t + B\sin 17t) \quad , \quad v(0) = 10 \quad \rightarrow \quad A = 10$$

همچنین در $t = 0$ خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز است بنابراین داریم

$$2i_s = \frac{v_s}{2} \quad \rightarrow \quad v_s = 4i_s$$

KVL برای حلقه بیرونی $\rightarrow 4i_s + v + i_s = 0 \quad \rightarrow \quad i_s = -\frac{v}{5}$

و در نهایت با توجه به KCL نوشته شده برای گره ② داریم

$$-0.01\frac{dv}{dt} + i + i_s = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = 100(i + i_s) = 100\left(i - \frac{v}{5}\right)$$

$$\rightarrow \quad \frac{dv(0)}{dt} = 100\left(i(0) - \frac{v(0)}{5}\right) = 100\left(0 - \frac{10}{5}\right) = -\frac{1000}{5} = -111.1$$

$$\rightarrow \quad -6.67A + 17B = -111.1 \quad \rightarrow \quad B = -2.61 \quad \rightarrow \quad v(t) = e^{-6.67t}(10\cos 17t - 2.61\sin 17t)$$

از طرفی می توان نوشت

$$i = 0.01\frac{dv}{dt} - i_s = 0.01\frac{dv}{dt} - \frac{v}{5}$$

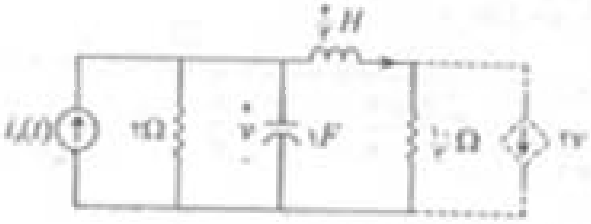
که با جایگذاری $v(t)$ در رابطه فوق داریم

$$i(t) = 2.68\sin 17t - 5e^{-6.67t}$$

مسئله ۳۷

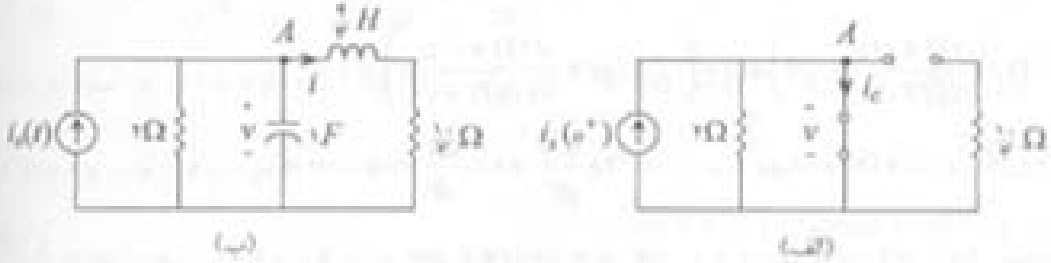
الف- معادله دیفرانسیلی برحسب v نوشته و شرایط اولیه را مشخص کنید. پاسخ پله را بدست آورید.

ب- اگر منبع جریان کنترل شده با ولتاژ را در مدار قرار دهیم. پاسخ ضربه v را بدست آورید.



شکل مسئله ۳۷

حل : الف ـ در این حالت مدار بصورت زیر است.



با فرض اینکه $i_s(t)$ در $t=0$ اعمال می شود، در $t=0^+$ خازن اتصال کوتاه وسلف مدار باز است بنابراین داریم

$$v(0^+)=0 \quad , \quad \frac{dv(0^+)}{dt}=i_c(0^+)=i_s(0^+)$$

همچنین با توجه به شکل (ب) و با استفاده از روش نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل خواهیم داشت:

$$v=\frac{2}{3}\frac{di}{dt}+\frac{10}{3}i=\frac{2}{3}Di+\frac{10}{3}i \quad \rightarrow \quad i=\frac{3}{2D+10}v$$

$$KCL \text{ برای گره } a \quad \rightarrow \quad -i_s+\frac{v}{2}+\frac{dv}{dt}+i=0 \quad \rightarrow \quad -i_s+\frac{v}{2}+Dv+\frac{3}{2D+10}v=0$$

$$\rightarrow \quad \left(2D^2+6D+4\right)v=\left(2D+5\right)i_s$$

$$\rightarrow \quad 2\frac{d^2v}{dt^2}+6\frac{dv}{dt}+4v=2\frac{di_s}{dt}+5i_s \quad , \quad v(0^+)=0 \quad , \quad \frac{dv(0^+)}{dt}=i_s(0^+)$$

در ادامه با جایگذاری $i_s(t)=u(t)$ پاسخ پله مدار را بدست خواهیم آورد.

$$i_s(t)=u(t)=1 \quad , \quad t>0 \quad , \quad \frac{di_s(t)}{dt}=\delta(t)=0 \quad , \quad t>0$$

$$\rightarrow \quad 2\frac{d^2v}{dt^2}+6\frac{dv}{dt}+4v=5 \quad , \quad v(0^+)=0 \quad , \quad \frac{dv(0^+)}{dt}=1$$

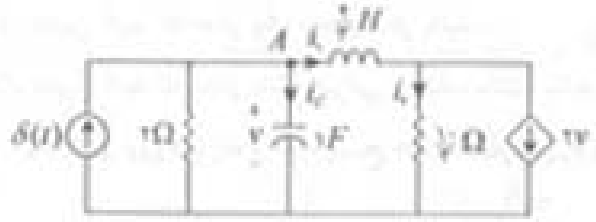
$$\text{معادله مشخصه}: 2s^2+6s+4=0 \quad \rightarrow \quad s=-1,-2 \quad \rightarrow \quad v(t)=\underbrace{K_1e^{-t}+K_2e^{-2t}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_3}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $4K_3=5$ و یا $K_3=\frac{5}{4}$ شده و با اعمال شرایط اولیه خواهیم داشت.

$$\begin{cases} v(0^+)=0 \quad \rightarrow \quad K_1+K_2+\frac{5}{4}=0 \\ \frac{dv(0^+)}{dt}=1 \quad \rightarrow \quad -K_1-2K_2=1 \end{cases} \rightarrow \quad K_1=-\frac{3}{2} \quad , \quad K_2=\frac{1}{4}$$

$$\rightarrow\ v(t)=-\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-7t}+\frac{5}{2}\ ,\ t>0$$

ب ـ در این حالت مدار بصورت زیر خواهد بود که با استفاده از روش نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل خواهیم داشت.



$$i_1=i_L-2v\ ,\ v=\frac{2}{3}\frac{di_L}{dt}+\frac{10}{3}i_L=\frac{2}{3}\frac{di_L}{dt}+\frac{10}{3}(i_L-2v)=\frac{2}{3}Di_L+\frac{10}{3}i_L-\frac{20}{3}v\ \rightarrow\ i_L=\frac{23}{2D+10}v$$

KCL برای گره A $\rightarrow\ -\delta(t)+\frac{v}{2}+\frac{dv}{dt}+i_L=0\ \rightarrow\ -\delta(t)+\frac{v}{2}+Dv+\frac{13}{2D+10}v=0$

$$\rightarrow\ \left(2D^2+6D+12\right)v=(2D+5)\delta(t)\ \rightarrow\ 2\frac{d^2v}{dt^2}+6\frac{dv}{dt}+12v=2\delta'(t)+5\delta(t)$$

در $t=0$ جریان ضربه وارد شده و از آنجا که در این لحظه خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز خواهد بود لذا تمامی جریان ضربه از خازن خواهد گذشت (که در فاصله 0^- تا 0^+ خواهد بود) ودر $t=0^-$ جریان خازن برابر صفر خواهد شد پس خواهیم داشت.

$$v(0^+)=v(0^-)+\int_0^{0^+}i_c(t)dt=0+\int_0^{0^+}\delta(t)dt=0+1=1V\ ,\ \frac{dv(0^+)}{dt}=i_c(0^+)=0$$

همچنین به ازای $t=0$ ، $\delta'(t)=\delta(t)=0$ خواهد بود بنابراین معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر نوشت.

$$2\frac{d^2v}{dt^2}+6\frac{dv}{dt}+12v=0\ ,\ v(0^+)=1V\ ,\ \frac{dv(0^+)}{dt}=0$$

معادله مشخصه : $2s^2+6s+12=0\ \rightarrow\ s=-\frac{3}{2}\pm j\frac{\sqrt{19}}{2}$

$$\rightarrow\ v(t)=e^{-\frac{3}{2}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{19}}{2}t+B\sin\frac{\sqrt{19}}{2}t\right)$$

$$\begin{cases}v(0^+)=1\ \rightarrow\ A=1\\ \frac{dv(0^+)}{dt}=0\ \rightarrow\ -\frac{3}{2}A+\frac{\sqrt{19}}{2}B=0\ \rightarrow\ B=\frac{3}{\sqrt{19}}\end{cases}\ \rightarrow\ v(t)=e^{-\frac{3}{2}t}\left(\cos\frac{\sqrt{19}}{2}t+\frac{3}{\sqrt{19}}\sin\frac{\sqrt{19}}{2}t\right),t>0$$

مسئله ۲۸

الف- معادله دیفرانسیلی بنویسید که v_c را به v_s ارتباط دهد. ($v_c(0) = V_0$ ، $i_L(0) = I_0$)

ب- β را چنان تعیین کنید که مدار یک نوسان ساز باشد.

پ- β را چنان تعیین کنید که مدار پاسخ میرایی ضعیف داشته باشد.

ت- به ازای $\beta = 500$ و ورودی پله واحد، پاسخ حالت صفر $v_c(t)$ را تعیین کنید.

شکل مسئله ۲۸

حل : الف ـ با توجه به شکل مسئله داریم.

$$i_s = \frac{v_s - v_c}{25}$$

KCL برای گره (A) $\rightarrow -\frac{v_s - v_c}{25} - \beta\frac{v_s - v_c}{25} + \frac{1}{\frac{1}{100}}\int v_c\,dt + \frac{dv_c}{dt} = 0$

$$\rightarrow -\frac{(\beta+1)}{25}\frac{dv_s}{dt} - \frac{(\beta+1)}{25}\frac{dv_c}{dt} + 100v_c + \frac{d^2v_c}{dt^2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2v_c}{dt^2} + \frac{(\beta+1)}{25}\frac{dv_c}{dt} + 100v_c = \frac{(\beta+1)}{25}\frac{dv_s}{dt} \quad , \quad 2\alpha = \frac{\beta+1}{25} \rightarrow \alpha = \frac{\beta+1}{50}$$

$$\omega_0^2 = 100 \rightarrow \omega_0 = 10$$

ب ـ می دانیم که به ازای $\alpha = 0$ مدار نوسان ساز (بی اتلاف)خواهد شد.

$$\alpha = 0 \rightarrow \frac{\beta+1}{50} = 0 \rightarrow \beta = -1$$

پ ـ به ازای $\alpha < \omega_0$ پاسخ مدار میرایی ضعیف خواهد بود.

$$\alpha < \omega_0 \rightarrow \frac{\beta+1}{50} < 10 \rightarrow \beta < 499$$

ت ـ با جایگذاری $\beta = 500$ و $v_s(t) = u(t)$ پاسخ حالت صفر $v_c(t)$ را تعیین خواهیم کرد.

$$\beta = 500 \ , \ v_s(t) = u(t) \rightarrow \frac{d^2v_c}{dt^2} + \frac{501}{25}\frac{dv_c}{dt} + 100v_c = \frac{501}{25}\delta(t)$$

از آنجا که می خواهیم پاسخ حالت صفر را بیابیم لذا $v_c(0^+) = v_c(0^-) = 0$ و $\frac{dv_c(0^+)}{dt} = 0$ خواهد بود و با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله "0" تا "0" خواهیم داشت.

$$\frac{dv_c(0^+)}{dt}=\frac{dv_c(0^-)}{dt}+\frac{500}{25}\left(v_c(0^+)-v_c(0^-)\right)+1000\int_{0^-}^{0^+}v_c\,dt=\frac{500}{25}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\,dt=0$$

$$\rightarrow\ \frac{dv_c(0^+)}{dt}=0+0+0=\frac{500}{25}\ \rightarrow\ \frac{dv_c(0^+)}{dt}=\frac{500}{25}$$

همچنین به ازای $t>0$ ، $\delta(t)=0$ می باشد. بنابرین معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\rightarrow\ \frac{d^2v_c}{dt^2}+\frac{500}{25}\frac{dv_c}{dt}+1000v_c=0\quad,\quad v_c(0^+)=0\quad,\quad \frac{dv_c(0^+)}{dt}=\frac{500}{25}$$

معادله مشخصه : $s^2+\frac{500}{25}s+1000=0\rightarrow s=-9/28\ ,\ -10/65\ \rightarrow\ v_c(t)=K_1e^{-9/28t}+K_2e^{-10/65t}$

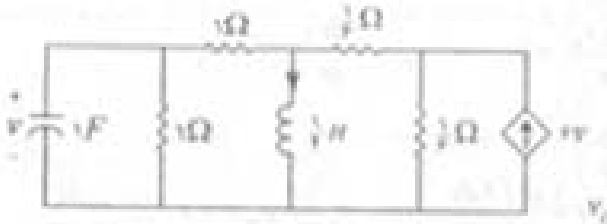
$$\begin{cases}v(0^+)=0\ \rightarrow\ K_1+K_2=0\\ \dfrac{dv(0^+)}{dt}=\dfrac{500}{25}\ \rightarrow\ -9/28K_1-10/65K_2=\dfrac{500}{25}\end{cases}\rightarrow\ K_1=15/78\ ,\ K_2=-15/78$$

$$\rightarrow\ v_c(t)=15/78e^{-9/28t}-15/78e^{-10/65t}\ ,\ t>0$$

مسئله ۲۹

الف- معادله دیفرانسیلی بر حسب v بدست آورید. ($i_L(0)=I_0$ ، $v_c(0)=V_0$)

ب- پاسخ ورودی صفر v را برای $v_c(0)=2V$ و $i_L(0)=-2A$ بدست آورید.



شکل مسئله ۲۹

حل : الف ـ معادله دیفرانسیل خواسته شده مطابق حل مسئله ۱۱ بصورت زیر می باشد.

$$\frac{d^2v}{dt^2}+2\frac{dv}{dt}+2v=0$$

ب ـ با توجه به معادله دیفرانسیل فوق خواهیم داشت.

معادله مشخصه : $s^2+2s+2=0\ \rightarrow\ s=-1\pm j\ \rightarrow\ v(t)=e^{-t}\left(A\cos t+B\sin t\right)$

با توجه به حل مسئله ۱۱ شرط اولیه $\frac{dv(0)}{dt}$ بصورت زیر بدست می آید.

$$v_L(0)-2-4+3v_L(0)-6=0\ \rightarrow\ v_L(0)=3V\quad,\quad \frac{dv(0)}{dt}+2+\frac{2-3}{1}=0\ \rightarrow\ \frac{dv(0)}{dt}=-1$$

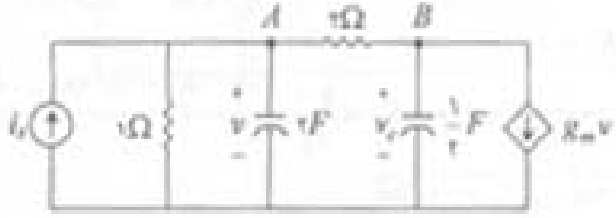
$$\begin{cases} v(0)=2 \;\rightarrow\; A=2 \\ \dfrac{dv(0)}{dt}=-1 \;\rightarrow\; -A+B=-1 \;\rightarrow\; B=1 \end{cases} \rightarrow\; v(t)=e^{-t}\left(2\cos t+\sin t\right)\;,\; t>0$$

مسئله ۳۰

الف- g_m را چنان تعیین کنید که مدار میرایی شدید باشد.

ب- g_m را چنان تعیین کنید که $Q=1$ باشد.

پ- به ازای $g_m=\frac{5}{8}$ پاسخ $v(t)$ را برای شرط اولیه صفر و ورودی پله واحد تعیین کنید.



شکل مسئله ۳۰

حل:

$$\text{KCL برای گره } A \;\rightarrow\; -i_s+\frac{v}{1}+2\frac{dv}{dt}+\frac{v-v_c}{2}=0 \;\rightarrow\; v_c=2\frac{dv}{dt}+3v-2i_s$$

$$\text{KCL برای گره } B \;\rightarrow\; \frac{\left(2\frac{dv}{dt}+3v-2i_s\right)-v}{2}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(2\frac{dv}{dt}+3v-2i_s\right)+g_m v=0$$

$$\rightarrow\; \frac{d^2v}{dt^2}+\frac{7}{2}v+\frac{1+g_m}{2}v=\frac{1}{2}\frac{di_s}{dt}+\frac{i_s}{2}$$

$$\rightarrow\; 2\alpha=\frac{7}{2} \;\rightarrow\; \alpha=\frac{7}{4}\;,\; \omega_0^2=\frac{1+g_m}{2} \;\rightarrow\; \omega_0=\sqrt{\frac{1+g_m}{2}}$$

الف ـ به ازای $\alpha>\omega_0$ مدار میرایی شدید خواهد بود.

$$\alpha>\omega_0 \;\rightarrow\; \frac{7}{4}>\sqrt{\frac{1+g_m}{2}} \;\rightarrow\; \frac{1+g_m}{2}<\frac{49}{32} \;\rightarrow\; g_m<\frac{17}{32}$$

ب ـ با توجه به تعریف ضریب کیفیت مدار (Q) داریم.

$$Q=\frac{\omega_0}{2\alpha}=1 \;\rightarrow\; \frac{\sqrt{\frac{1+g_m}{2}}}{\frac{7}{4}}=1 \;\rightarrow\; g_m=\frac{41}{8}$$

پ ـ با جایگذاری $R_m = \frac{5}{8}$ و $i_s(t) = u(t)$ خواهیم داشت.

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{7}{4}\frac{dv}{dt} + \frac{13}{16}v = \frac{1}{4}\delta(t) + \frac{1}{4}u(t)$$

از آنجا که شرایط اولیه صفر است لذا $v(0^+) = v(0^-) = 0$ و $\frac{dv(0^-)}{dt} = 0$ بوده و با انتگرال گیری از معادله فوق در فاصله 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

$$\frac{dv(0^+)}{dt} - \frac{dv(0^-)}{dt} + \frac{7}{4}\left(v(0^+) - v(0^-)\right) + \frac{13}{16}\int_{0^-}^{0^+} v\,dt = \frac{1}{4}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\,dt + \frac{1}{4}\int_{0^-}^{0^+}u(t)\,dt$$

$$\rightarrow \quad \frac{dv(0^+)}{dt} - 0 + 0 + 0 = \frac{1}{4} + 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{1}{4}$$

همچنین برای $t > 0$ ، $\delta(t) = 0$ و $u(t) = 1$ خواهد بود. بنابراین معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر نوشت.

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{7}{4}\frac{dv}{dt} + \frac{13}{16}v = \frac{1}{4} \quad , \quad v(0^+) = 0 \quad , \quad \frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{1}{4} \quad , \quad t > 0$$

معادله مشخصه : $s^2 + \frac{7}{4}s + \frac{13}{16} = 0 \quad \rightarrow \quad s = -\frac{7}{8} \pm j\frac{\sqrt{3}}{8}$

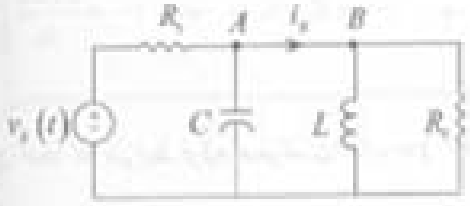
$$\rightarrow \quad v(t) = \underbrace{e^{-\frac{7}{8}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{8}t + B\sin\frac{\sqrt{3}}{8}t\right)}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{C}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $\frac{13}{16}C = \frac{1}{4}$ و یا $C = \frac{8}{13}$ شد و با اعمال شرایط اولیه داریم

$$\begin{cases} v(0^+) = 0 \quad \rightarrow \quad A + \frac{8}{13} = 0 \quad \rightarrow \quad A = -\frac{8}{13} \\ \frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad -\frac{7}{8}A + \frac{\sqrt{3}}{8}B = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad B = \frac{4\sqrt{3}}{39} \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad v(t) = e^{-\frac{7}{8}t}\left(-\frac{8}{13}\cos\frac{\sqrt{3}}{8}t - \frac{4\sqrt{3}}{39}\sin\frac{\sqrt{3}}{8}t\right) + \frac{8}{13} \quad , \quad t > 0$$

مسئله ۳۱



معادله دیفرانسیلی بر حسب i_s تشکیل داده و برای $R_1 = R_2 = C = L = 1$ پاسخ ضربه را حساب کنید.

شکل مسئله ۳۱

حل:

$v_C = v_L$

$$KCL \text{ برای گره } B \rightarrow -i_s + \frac{1}{L}\int v_c + \frac{v_c}{R_2} = 0 \rightarrow -\frac{di_s}{dt} + \frac{v_c}{L} + \frac{1}{R_2}\frac{dv_c}{dt} = 0$$

$$\rightarrow -Di_s + \frac{v_c}{L} + \frac{Dv_c}{R_2} = 0 \rightarrow v_c = \frac{LR_2D}{LD+R_2}i_s$$

$$KCL \text{ برای گره } A \rightarrow \frac{v_C - v_s}{R_1} + C\frac{dv_c}{dt} + i_s = 0 \rightarrow R_1C\frac{dv_c}{dt} + v_c + R_1i_s = v_s$$

$$\rightarrow R_1CDv_c + v_c + R_1i_s = v_s \rightarrow R_1CD\frac{LR_2D}{LD+R_2}i_s + \frac{LR_2D}{LD+R_2}i_s + R_1i_s = v_s$$

$$\rightarrow \left(R_1R_2LCD^2 + L(R_1+R_2)D + R_1R_2\right)i_s = LDv_s + R_2v_s$$

$$\rightarrow R_1R_2LC\frac{d^2i_s}{dt^2} + L(R_1+R_2)\frac{di_s}{dt} + R_1R_2i_s = L\frac{dv_s}{dt} + R_2v_s$$

در ادامه به ازای $R_1 = R_2 = L = C = 1$ و $v_s(t) = \delta(t)$ پاسخ ضربه را محاسبه خواهیم کرد.

$$\frac{d^2i_s}{dt^2} + 2\frac{di_s}{dt} + i_s = \delta'(t) + \delta(t)$$

$$\rightarrow \left(\frac{d^2i_s}{dt^2} + \frac{di_s}{dt}\right) + \left(\frac{di_s}{dt} + i_s\right) = \delta'(t) + \delta(t)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{di_s}{dt} + i_s\right) + \left(\frac{di_s}{dt} + i_s\right) = \frac{d\delta(t)}{dt} + \delta(t) \rightarrow \frac{di_s}{dt} + i_s = \delta(t)$$

با انتگرال گیری از طرفین معادله فوق در فاصله "۰ تا "۰ خواهیم داشت.

$$i_s(0^+) - i_s(0^-) + \int_{0^-}^{0^+} i_s = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) \rightarrow i_s(0^+) - 0 + 0 = 1 \rightarrow i_s(0^+) = 1$$

همچنین به ازای $t > 0$ ، $\delta(t) = 0$ بوده بنابراین معادله دیفرانسیل را می توان بصورت زیر بیان کرد.

$$\frac{di_s}{dt} + i_s = 0 \quad , \quad i(0^+) = 1 \quad , \quad t > 0$$

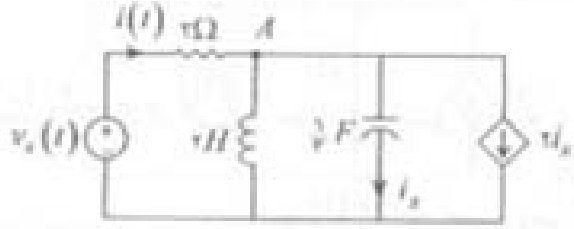
معادله مشخصه : $s + 1 = 0 \rightarrow s = -1 \rightarrow i_s(t) = Ke^{-t} \quad , \quad i(0^+) = 1 \rightarrow K = 1$

$$\rightarrow i_s(t) = e^{-t} \quad , \quad t > 0$$

مسئله ۳۲

پاسخ ضربه i را بدست آورید.

شرایط اولیه معادله دیفرانسیل i را با فرض $v_c(0) = V_0$ و $i_L(0) = I_0$ بدست آورید.



شکل مسئله ۳۲

حل : با توجه به شکل مسئله داریم.

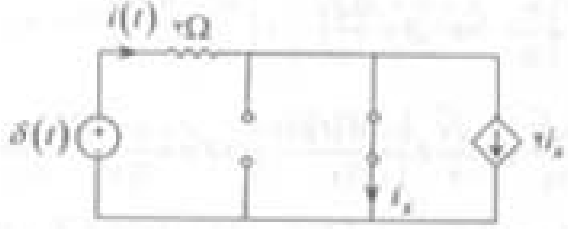
$$i = \frac{v_s - v_c}{2} \rightarrow v_c = v_s - 2i \quad , \quad v_L = v_c = v_s - 2i \quad , \quad i_s = \frac{1}{3}\frac{dv_c}{dt} - \frac{2}{3}\frac{di}{dt}$$

KCL برای گره (A) $\rightarrow -i + \frac{1}{2}\int(v_s - 2i)dt + \left(\frac{1}{3}\frac{dv_s}{dt} - \frac{2}{3}\frac{di}{dt}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\frac{dv_s}{dt} - \frac{2}{3}\frac{di}{dt}\right) = 0$

$$\rightarrow -i + \frac{1}{2} + \int(v_s - 2i)dt + \frac{dv_s}{dt} - 2\frac{di}{dt} = 0 \rightarrow -\frac{di}{dt} + \frac{v_s}{2} - i + \frac{d^2 v_s}{dt^2} - 2\frac{d^2 i}{dt^2} = 0$$

$$\rightarrow 2\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{di}{dt} + i = \frac{d^2 v_s}{dt^2} + \frac{v_s}{2} = \frac{d^2\delta(t)}{dt^2} + \frac{\delta(t)}{2}$$

در $t = 0$ و لحاظ ضربه اعمال شده ، خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز خواهد بود.



بنابراین جریان ضربه $\frac{\delta(t)}{2}$ در $t = 0$ از مقاومت 2Ω خواهد گذشت پس $\frac{\delta(t)}{2}$ قسمتی از پاسخ ضربه خواهد بود.

جریان ضربه گذرنده از خازن برابر است با :

$$2i_x = i = \frac{\delta(t)}{2} \quad \rightarrow \quad i_x = \frac{\delta(t)}{4} \quad \rightarrow \quad v_c(0^+) = v_c(0^-) + \frac{1}{\frac{1}{2}}\int_{0^-}^{0^+} \frac{\delta(t)}{4}dt = \frac{1}{2}V$$

در $t = 0^+$ ، $\delta(t) = 0$ شده و مدار بصورت زیر خواهد بود.

$$\rightarrow \quad i(0^+) = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$$

همچنین با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در بازه 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

$$2\frac{di(0^+)}{dt} - 2\frac{di(0^-)}{dt} + i(0^+) - i(0^-) + \int_{0^-}^{0^+} i\,dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta^2(t)dt + \int_{0^-}^{0^+} \frac{\delta(t)}{2}dt$$

$$\rightarrow \quad 2\frac{di(0^+)}{dt} - 0 - \frac{1}{4} - 0 + 0 = 0 + \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{di(0^+)}{dt} = \frac{3}{8}$$

بنابراین معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر بیان کرد.

$$2\frac{di}{dt} + \frac{di}{dt} + i = 0 \quad , \quad i(0^+) = -\frac{1}{4}A \quad , \quad \frac{di(0^+)}{dt} = \frac{3}{8}$$

معادله مشخصه : $2s^2 + s + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad s = -\frac{1}{4} \pm j\frac{\sqrt{7}}{4}$

$$\rightarrow \quad i(t) = e^{-\frac{1}{4}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{7}}{4}t + B\sin\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) + \frac{\delta(t)}{2}$$

$$\begin{cases} i(0^+) = -\frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad A = -\frac{1}{4} \\ \frac{di(0^+)}{dt} = \frac{3}{8} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{4}A + \frac{\sqrt{7}}{4}B = \frac{3}{8} \quad \rightarrow \quad B = \frac{5\sqrt{7}}{28} \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad i(t) = e^{-\frac{1}{4}t}\left(-\frac{1}{4}\cos\frac{\sqrt{7}}{4}t + \frac{5\sqrt{7}}{28}\sin\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) + \frac{\delta(t)}{2} \quad , \quad t > 0$$

با فرض $v_C(0) = V_0$ و $i_L(0) = I_0$ و با توجه به شکل مسئله خواهیم داشت.

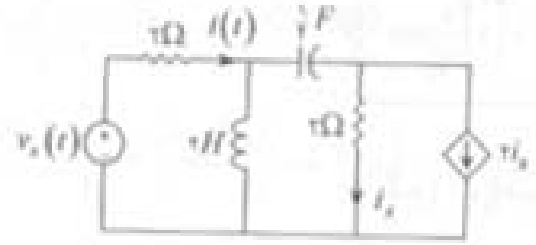
$$i = \frac{v_S - v_C}{2} \quad \rightarrow \quad i(0) = \frac{v_S(0) - v_C(0)}{2} = \frac{v_S(0) - v_0}{2} \quad , \quad i = i_L + 3i_x \quad \rightarrow \quad i_x = \frac{i - i_L}{3}$$

$$i = \frac{v_3 - v_C}{2} \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{4}\left(\frac{dv_3}{dt} - \frac{dv_C}{dt}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{dv_3}{dt} - 2i_3\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{dv_3}{dt} - i + i_L\right)$$

$$\rightarrow \frac{di(0)}{dt} = \frac{1}{4}\left(\frac{dv_3(0)}{dt} - \frac{v_3(0) - V_0}{2} + I_0\right)$$

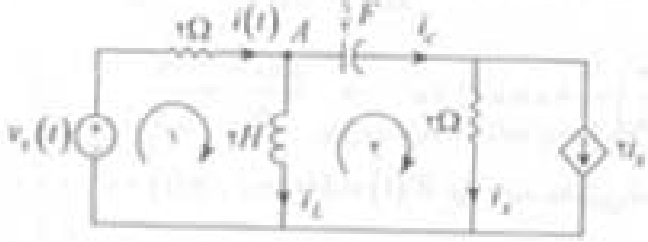
مسئله ۳۳

پاسخ پله و ضربه خروجی i را بدست آورید.



شکل مسئله ۳۳

حل : شکل مسئله را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



KVL برای مش ① $\rightarrow -v_s + 2i + 2\frac{di_L}{dt} = 0 \rightarrow -v_s + 2i + 2Di_L = 0 \rightarrow i_L = \frac{v_s - 2i}{2D}$

KCL برای گره Ⓐ $\rightarrow -i + i_L + i_C = 0 \rightarrow -i + \frac{v_s - 2i}{2D} + i_C = 0 \rightarrow i_C = \frac{2Di + 2i - v_s}{2D}$

$$\rightarrow i_C = 3i_s \rightarrow i_s = \frac{1}{3}\left(\frac{2Di + 2i - v_s}{2D}\right)$$

KVL برای مش ② $\rightarrow -2\frac{d}{dt}\left(\frac{v_s - 2i}{dt}\right) + \frac{1}{\frac{1}{4}}\int\frac{2Di + 2i - v_s}{2D} + \frac{2}{3}\left(\frac{2Di + 2i - v_s}{2D}\right) = 0$

$$\rightarrow -2D\frac{v_s - 2i}{dt} + \frac{2}{D}\frac{2Di + 2i - v_s}{2D} + \frac{2}{3}\frac{2Di + 2i - v_s}{2D} = 0$$

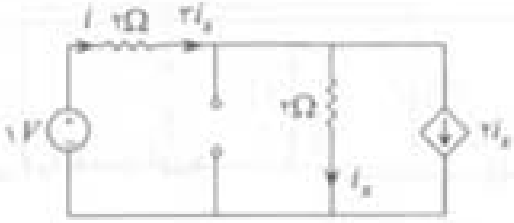
$$\rightarrow \left(16D^2 + 16D + 12\right)i = \left(6D^2 + 2D + 6\right)v_s$$

$$\rightarrow 16\frac{d^2 i}{dt^2} + 16\frac{di}{dt} + 12i = 6\frac{d^2 v_s}{dt^2} + 2\frac{dv_s}{dt} + 6v_s$$

در ادامه با جایگذاری $v_s(t)=u(t)$ پاسخ پله را بدست خواهیم آورد.

$$16\frac{d^2i}{dt^2}+16\frac{di}{dt}+12i=6\delta'(t)+2\delta(t)+6u(t)$$

در $t=0^-$ خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز خواهد بود بنابراین مدار بصورت زیر می باشد.



$$-1+2(3i_x)+2i_x=0 \quad\rightarrow\quad i_x=\frac{1}{8} \quad\rightarrow\quad i(0^+)=3i_x(0^+)=\frac{3}{8}$$

همچنین با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

$$\frac{16di(0^+)}{dt}-16\frac{di(0^-)}{dt}+16i(0^+)-16i(0^-)+12\int_{0^-}^{0^+}i=6\int_{0^-}^{0^+}\delta'(t)+2\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)+6\int_{0^-}^{0^+}u(t)$$

$$\rightarrow\quad 16\frac{di(0^+)}{dt}-0+16\left(\frac{3}{8}\right)-0+0=0+2+0 \quad\rightarrow\quad \frac{di(0^+)}{dt}=-\frac{1}{4}$$

می دانیم که به ازای $t>0$ ، $u(t)=1$ ، $\delta'(t)=\delta(t)=0$ می باشد بنابراین معادله دیفرانسیل را می توان بصورت زیر بیان کرد.

$$16\frac{d^2i}{dt^2}+16\frac{di}{dt}+12i=6 \quad , \quad i(0^+)=\frac{3}{8} \quad , \quad \frac{di(0^+)}{dt}=-\frac{1}{4} \quad , \quad t>0$$

معادله مشخصه : $16s^2+16s+12=0 \quad\rightarrow\quad s=-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\rightarrow\quad i(t)=\underbrace{e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t+B\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{C}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $12C=6$ و یا $C=\frac{1}{2}$ شده و با اعمال شرایط اولیه داریم.

$$\begin{cases} i(0^+)=\frac{3}{8} \quad\rightarrow\quad A+\frac{1}{2}=\frac{3}{8} \quad\rightarrow\quad A=-\frac{1}{8} \\ \frac{di(0^+)}{dt}=-\frac{1}{4} \quad\rightarrow\quad -\frac{1}{2}A+\frac{\sqrt{2}}{2}B=-\frac{1}{4} \quad\rightarrow\quad B=-\frac{5\sqrt{2}}{16} \end{cases}$$

$$s(t)=i(t)=u(t)e^{-\frac{1}{4}t}\left(-\frac{1}{8}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t-\frac{5\sqrt{7}}{16}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)+\frac{u(t)}{2}$$

از آنجا که مدار خطی و تغییرناپذیر با زمان است لذا پاسخ ضربه مشتق پاسخ پله خواهد بود.

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=\delta(t)e^{-\frac{1}{4}t}\left(-\frac{1}{8}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t-\frac{5\sqrt{7}}{16}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$$

$$+u(t)\left[-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t}\left(-\frac{1}{8}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t-\frac{5\sqrt{7}}{16}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)+e^{-\frac{1}{4}t}\left(\frac{\sqrt{7}}{16}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t-\frac{5}{16}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right]+\frac{\delta(t)}{2}$$

$$=e^{-\frac{1}{4}t}\left(-\frac{1}{8}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t-\frac{5\sqrt{7}}{16}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\Bigg|_{t=0}\delta(t)+u(t)e^{-\frac{1}{4}t}\left(-\frac{1}{4}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t+\frac{7\sqrt{7}}{32}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)+\frac{\delta(t)}{2}$$

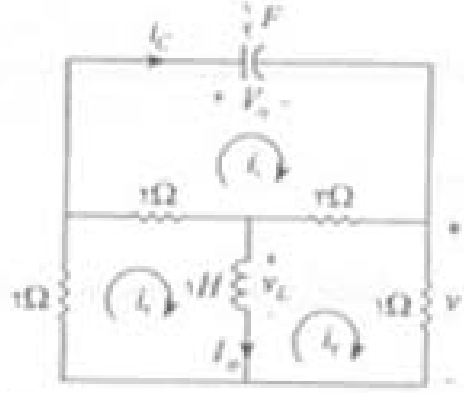
$$\rightarrow\ h(t)=u(t)e^{-\frac{1}{4}t}\left(-\frac{1}{4}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t+\frac{7\sqrt{7}}{32}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)+\frac{3}{8}\frac{\delta(t)}{2}$$

مسئله ۳۲

الف- معادلات مش را نوشته و معادله دیفرانسیلی بر حسب متغیر۲ بدست آورید.

ب- فرکانسهای طبیعی۲ را تعیین کنید.

پ- معادلات دیفرانسیلی بر حسب ولتاژ دو سر خازن و جریان سلف تعیین کنید و فرکانسهای طبیعی آنها را نیز بدست آورید.



شکل مسئله ۳۲

حل: الف ـ با نوشتن معادلات KVL برای مشهای مدار داریم.

$$KVL \text{ برای مش ۱} \rightarrow V_c+\frac{1}{\frac{1}{2}}\int i_1dt+2(i_1-i_2)+2(i_1-i_3)=0$$

$$\rightarrow\ 2i_1+2\left(\frac{di_1}{dt}-\frac{di_2}{dt}\right)+2\left(\frac{di_1}{dt}-\frac{di_3}{dt}\right)=0$$

$$KVL \text{ برای مش ۲} \rightarrow 2i_2+2(i_2-i_1)+\frac{d(i_2-i_3)}{dt}=0$$

KVL برای مش ۳ $\rightarrow \dfrac{d(i_4 - i_3)}{dt} + 3(i_4 - i_3) + i_4 = 0$

با توجه به مدار $v = i_1$ می باشد و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$\begin{cases} (5D+2)i_1 - 2Di_2 - 2Dv = 0 \\ -2i_1 + (D+2)i_2 - Dv = 0 \\ -3i_1 - Di_2 + (D+2)v = 0 \end{cases} \rightarrow v = \frac{\begin{vmatrix} 5D+2 & -2D & 0 \\ -2 & D+2 & 0 \\ -3 & -D & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5D+2 & -2D & -2D \\ -2 & D+2 & -D \\ -3 & -D & D+2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{15D^3 + 44D + 32}$$

$$\rightarrow (15D^3 + 44D + 32)v = 0 \rightarrow 15\frac{d^3v}{d^3t} + 44\frac{dv}{dt} + 32v = 0$$

ب - فرکانسهای طبیعی v جوابهای معادله مشخصه معادله دیفرانسیل فوق می باشند.

معادله مشخصه : $15s^3 + 44s + 32 = 0 \rightarrow s = -1/33 \ , \ -1/6$

پ - با استفاده از دستگاه معادلات قسمت (الف) داریم.

$$i_2 = i_1 = \frac{0}{15D^3 + 44D + 32} \rightarrow (15D^3 + 44D + 32)i_2 = 0$$

$$i_2 = \frac{1}{2}\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{2}Dv_C \rightarrow (15D^3 + 44D + 32)\frac{1}{2}Dv_C = 0 \rightarrow (15D^3 + 44D + 32)v_C = 0$$

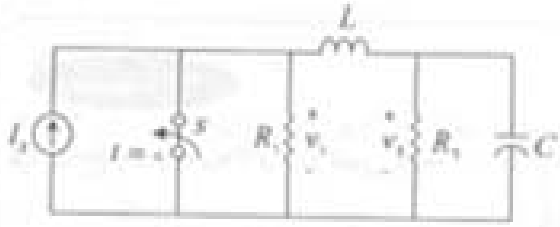
$$\rightarrow 15\frac{d^3v_C}{d^3t} + 44\frac{dv_C}{dt} + 32v_C = 0 \rightarrow v_C \text{ فرکانسهای طبیعی } = -1/33 \ , \ -1/6$$

$$i_L = i_1 - i_2 = \frac{0}{15D^3 + 44D + 32} - \frac{0}{15D^3 + 44D + 32} \rightarrow (15D^3 + 44D + 32)i_L = 0$$

$$\rightarrow 15\frac{d^3i_L}{d^3t} + 44\frac{di_L}{dt} + 32i_L = 0 \rightarrow i_L \text{ فرکانسهای طبیعی } = -1/33 \ , \ -1/6$$

نتیجه اینکه در یک مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان فرکانس های طبیعی متغیرهای تمامی شاخه ها یکسان بوده و اگر ورودی های مدار صفر باشد معادلات دیفرانسیل متغیر های مدار نیز یکسان خواهد بود.

مسئله ۳۵



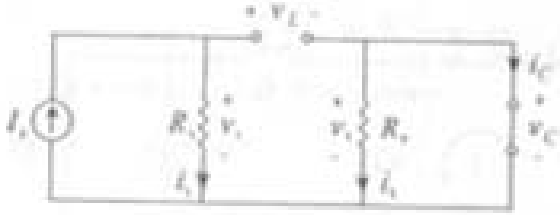
شکل مسئله ۳۵

$v_1(0^+)$ و $v_2(0^+)$ و $\frac{dv_2(0^+)}{dt}$ و $\frac{dv_1(0^+)}{dt}$ و

$\frac{d^2v_2(0^+)}{dt^2}$ را حساب کنید. (بدون حل مدار)

(کلید برای مدت طولانی بسته بوده است)

حل : به ازای $t<0$ کلید بسته بوده بنابراین $i_L(0^-)=v_C(0^-)=v_1(0^-)=v_2(0^-)=0$ می باشد. در $t=0^+$ کلید باز بوده و خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز می باشد بنابراین داریم



$$\begin{cases} v_L(0^+)=v_L(0^-)=0 \\ i_L(0^+)=i_L(0^-)=0 \end{cases} \rightarrow v_2(0^+)=0 \ , \ v_1(0^+)=R_1 I_s$$

برای محاسبه $\frac{dv_1(0^+)}{dt}$ می توان نوشت.

$$i_1=I_s-i_L \rightarrow v_1=R_1(I_s-i_L) \rightarrow \frac{dv_1}{dt}=R_1\left(\frac{dI_s}{dt}-\frac{di_L}{dt}\right)=R_1\left(0-\frac{v_L}{L}\right)$$

$$v_L(0^-)=v_1(0^+)=R_1 I_s \rightarrow \frac{dv_1(0^+)}{dt}=-\frac{R_1^2}{L}I_s$$

برای محاسبه $\frac{dv_2(0^+)}{dt}$ داریم.

$$v_2=v_C \rightarrow \frac{dv_2}{dt}=\frac{dv_C}{dt}=\frac{i_C}{C} \ , \ i_C(0^+)=-\frac{v_2(0^+)}{R_2}=0 \rightarrow \frac{dv_2(0^+)}{dt}=\frac{i_C(0^+)}{C}=0$$

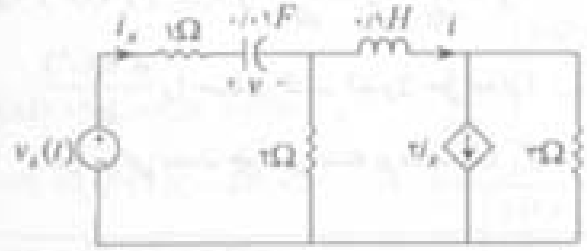
و در نهایت $\frac{d^2v_2(t)}{dt^2}$ را محاسبه خواهیم کرد.

$$\frac{dv_2}{dt}=\frac{i_C}{C}=\frac{i_L-i_2}{C} \rightarrow \frac{d^2v_2}{dt^2}=\frac{1}{C}\left(\frac{di_L}{dt}-\frac{di_2}{dt}\right)=\frac{1}{C}\left(\frac{v_L}{L}-\frac{di_2}{dt}\right)$$

$$v_L(0^+) = R_s I_s \quad , \quad \frac{di_s(0^+)}{dt} = R_s \frac{dv_s(0^+)}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 v_s(0^+)}{dt^2} = \frac{R_s}{LC} I_s$$

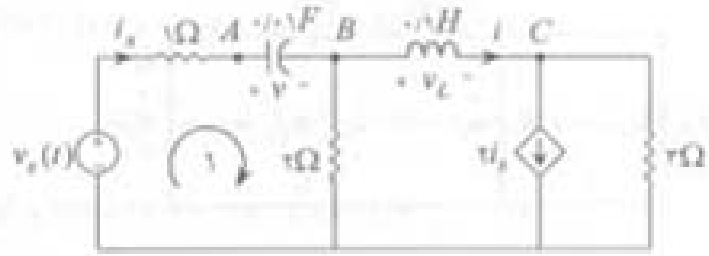
مسئله ۳۶

پاسخ پله و ضربه v و i را تعیین کنید.



شکل مسئله ۳۶

حل : مدار فوق را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



$$v_B - v_C = v_L \quad \rightarrow \quad 2i_1 - v_c = 0.1\frac{di}{dt} \quad \rightarrow \quad 2(i_s - i) - v_c = 0.1\frac{di}{dt} \quad \rightarrow \quad v_c = -0.1\frac{di}{dt} - 2i + 2i_s$$

KCL برای گره C $\rightarrow \; -i + 2i_s + \frac{1}{3}\left(0.1\frac{di}{dt} - 2i + 2i_s\right) = 0 \quad \rightarrow \quad i_s = \frac{1}{8}\left(0.1\frac{di}{dt} + 5i\right)$

$$\rightarrow \; i_s = \frac{1}{80}(D+50)i \quad , \quad i_1 = i_s - i = \frac{1}{80}(D-30)i$$

KVL برای مش ۱ $\rightarrow \; -v_s + \frac{1}{80}(D+50)i + \frac{1}{0.01}\int \frac{1}{80}(D+50)i + \frac{2}{80}(D-30)i$

$$\rightarrow \; -80v_s + (D+50)i + \frac{100}{D}(D+50)i + (2D-60)i = 0$$

$$\left(2D^2 + 90D + 5000\right)i = 80Dv_s \quad \rightarrow \quad 2\frac{d^2 i}{dt^2} + 90\frac{di}{dt} + 5000i = 80\frac{dv_s}{dt}$$

به ازای $v_s(t) = u(t)$ پاسخ پله i را بدست خواهیم آورد.

$$\rightarrow \; 2\frac{d^2 i}{dt^2} + 90\frac{di}{dt} + 5000i = 80\delta(t)$$

در $t=0^-$ سلف مدار باز است بنابراین $i(0^-)=0$ بوده و با انتگرال گیری در فاصله 0^- تا 0^+ در معادله دیفرانسیل داریم

$$\frac{3\,di(0^+)}{dt}=80 \quad \rightarrow \quad \frac{di(0^+)}{dt}=\frac{80}{3}$$

می دانیم که به ازای $t>0$ ، $\delta(t)=0$ می باشد بنابراین معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر نوشت.

$$3\frac{d^2i}{dt^2}+90\frac{di}{dt}+5000i=0 \quad , \quad i(0^+)=0 \quad , \quad \frac{di(0^+)}{dt}=\frac{80}{3}$$

معادله مشخصه : $3s^2+90s+5000=0 \quad \rightarrow \quad s=-15\pm j28$

$$\rightarrow \quad i(t)=e^{-15t}\left(A\cos 28t+B\sin 28t\right) \quad , \quad t>0$$

$$\begin{cases} i(0^+)=0 \quad \rightarrow \quad A=0 \\ \dfrac{di(0^+)}{dt}=\dfrac{80}{3} \quad \rightarrow \quad -15A+28B=\dfrac{80}{3} \quad \rightarrow \quad B=0/702 \end{cases} \quad \rightarrow \quad i(t)=0/702e^{-15t}\sin 28t \quad , \quad t>0$$

همچنین می توان نوشت.

$$KVL \text{ برای مش } 1 \quad \rightarrow \quad -v_s+i_s+v+2i=0 \quad \rightarrow \quad v=-2i-i_s+v_s=-2(i_s-i)-i_s+v_s$$

$$\rightarrow \quad v=2i-3i_s+v_s=2i-\frac{3}{80}\left(\frac{di}{dt}+5i\right)+v_s=-\frac{3}{80}\frac{di}{dt}+\frac{1}{8}i+v_s$$

بنابراین پاسخ پله v عبارتست از :

$$v(t)=-\frac{3}{80}\left(-10/53e^{-15t}\sin 28t+26/66e^{-15t}\cos 28t\right)+\frac{0/701}{8}e^{-15t}\sin 28t+1$$

$$\rightarrow \quad v(t)=e^{-15t}\left(-\cos 28t+0/28\sin 28t\right)+1 \quad , \quad t>0$$

برای محاسبه پاسخ ضربه v و i از پاسخ پله آنها مشتق می گیریم.

$$v_s(t)=\delta(t) \quad \rightarrow \quad i(t)=(0/702)(-15)e^{-15t}\sin 28t+(0/702)(28)e^{-15t}\cos 28t$$

$$=e^{-15t}\left(26/68\cos 28t-10/53\sin 28t\right) \quad , \quad t>0$$

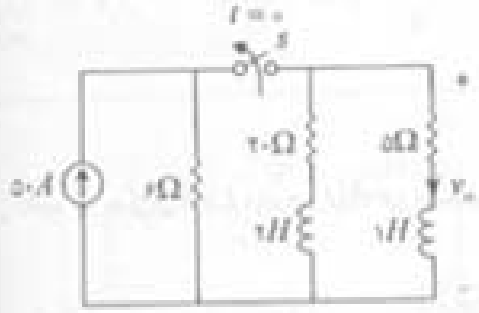
$$v_s(t)=\delta(t) \quad \rightarrow \quad v(t)=\frac{d}{dt}\left\{e^{-15t}\left(-\cos 28t+0/28\sin 28t\right)+1\right\}$$

$$=e^{-15t}\left(30/75\cos 28t+33/28\sin 28t\right) \quad , \quad t>0$$

مسئله ۳۷

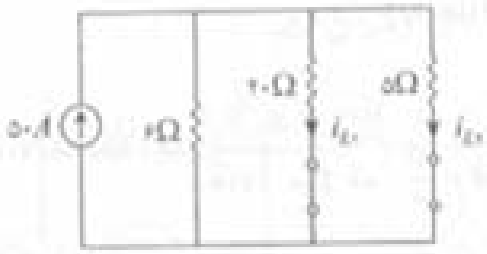
جریان گذرنده از سلفها و $v_o(t)$ را برای $t > 0$ حساب کنید.

(کلید s به مدت طولانی بسته بوده است)



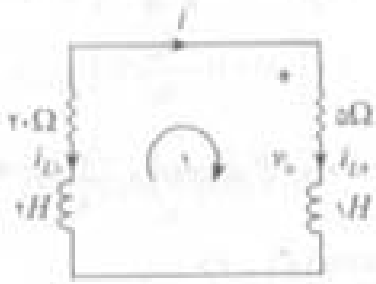
شکل مسئله ۳۷

حل : به ازای $t < 0$ کلید بسته بوده و در $t = 0^-$ مدار به حالت دایمی خود می رسد پس سلفها اتصال کوتاه خواهند بود.



$$i_{L_1}(0^-) = \frac{6 \| 5}{6 \| 5 + 20} 50A = 6A \quad , \quad i_{L_2}(0^-) = \frac{6 \| 20}{6 \| 20 + 5} 50A = 22A$$

به ازای $t > 0$ کلید باز بوده و مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$\text{KVL برای مش ۱} \rightarrow 2\frac{di}{dt} + 20i + 5i + \frac{di}{dt} = 0 \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{25}{3} i = 0 \rightarrow i(t) = Ke^{-\frac{25}{3}t}$$

برای محاسبه K باید $i(0^+)$ را بدست آوریم.

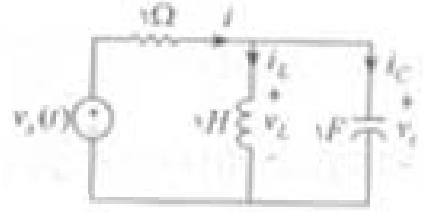
$$i(0^+) = \frac{\phi_{eq}}{L_{eq}} = \frac{L_2 i_{L_2}(0^-) - L_1 i_{L_1}(0^-)}{L_1 + L_2} = \frac{22 - 6 \times 2}{1 + 2} = 2A \rightarrow i(t) = 2e^{-\frac{25}{3}t}$$

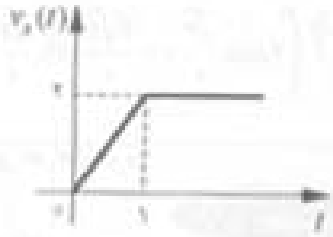
$$i_{L_2}(t) = i(t) = 2e^{-\frac{25}{3}t} \quad , \quad i_{L_1}(t) = -i(t) = -2e^{-\frac{25}{3}t}$$

$$v_o(t) = 5i(t) + \frac{di(t)}{dt} = 2e^{-\frac{25}{3}t} + 2\left(-\frac{25}{3}\right)e^{-\frac{25}{3}t} = -13/13e^{-\frac{25}{3}t}$$

مسئله ۳۸

$i = ?$





شکل مسئله ۳۸

حل : با توجه به شکل مسئله داریم

$$v_L = v_C$$

$$i = i_C + i_L = \frac{dv_L}{dt} + \int v_L dt \rightarrow \frac{d^2 v_L}{dt^2} + v_L = \frac{di}{dt} \rightarrow (D^2+1)v_L = Di \rightarrow v_L = \frac{D}{D^2+1} i$$

برای مش ۱ KVL $\rightarrow -v_s + i + \frac{D}{D^2+1} i = 0 \rightarrow (D^2+D+1)i = (D^2+1)v_s$

$$\rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{di}{dt} + i = \frac{d^2 v_s}{dt^2} - v_s$$

به ازای $0 < t < 1$ ، $v_s(t) = 2t$ بوده و خواهیم داشت

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{di}{dt} + i = 2t$$

معادله مشخصه : $s^2 + s + 1 = 0 \rightarrow s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\rightarrow i(t) = \underbrace{e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K_1 t + K_0}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم

$$K_1 t + K_0 + K_1 = 2t \rightarrow \begin{cases} K_1 = 2 \\ K_1 + K_0 = 0 \rightarrow K_0 = -2 \end{cases}$$

در $t = 0$ خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز است بنابراین داریم

$$\begin{cases} i = \dfrac{v_s - v_c}{1} \rightarrow i(0) = v_s(0) - v_c(0) = 0 - 0 = 0 \rightarrow A - 2 = 0 \rightarrow A = 2 \\ \dfrac{di(0)}{dt} = \dfrac{dv_s(0)}{dt} - \dfrac{dv_c}{dt} = \dfrac{dv_s(0)}{dt} - i(0) = 2 - 0 = 2 \rightarrow -\dfrac{1}{2}A + \dfrac{\sqrt{3}}{2}B + 2 = 2 \rightarrow B = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$i(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + 2t - 2 \ , \ 0 < t < 1$$

و به ازای $v_s(t) = 2 \ , \ t > 1$ شده و معادله دیفرانسیل بصورت زیر تغییر خواهد کرد

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{di}{dt} + i = 2 \rightarrow i(t) = \underbrace{e^{-\frac{1}{2}(t-1)}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1) + B\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)\right)}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $K = 2$ شده و با توجه به $i(t)$ در $0 < t < 1$ داریم

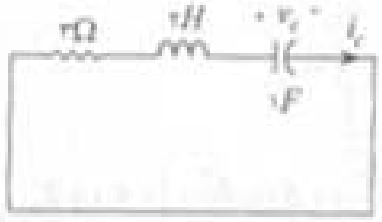
$$i(1) = 1/32 \rightarrow A + 2 = 1/32 \rightarrow A = -0/68$$

$$\frac{di(1)}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{e^{-\frac{1}{2}t}\left(2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + 2t - 2\right\}_{t=1} = 0/92 \rightarrow -\frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B = 0/92$$

$$\rightarrow B = 0/68 \rightarrow i(t) = -0/68e^{-\frac{1}{2}(t-1)}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1) - \sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)\right) + 2 \ , \ t > 1$$

مسئله ۳۹

چه رابطه ای میان $i_L(0) = I_0$ و $v_c(0) = V_0$ وجود داشته باشد تا در پاسخ ورودی صفر $v_c(t)$ تنها یک فرکانس طبیعی با کوچکترین قدر مطلق ظاهر شود.



شکل مسئله ۳۹

حل: با توجه به شکل مدار داریم

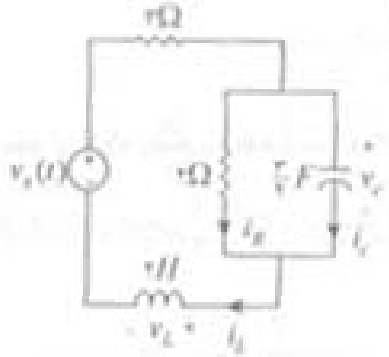
$$KVL \rightarrow 3i_c + 2\frac{di_c}{dt} + v_c = 0 \ , \ i_c = \frac{dv_c}{dt} \rightarrow 2\frac{d^2 v_c}{dt^2} + 3\frac{dv_c}{dt} + v_c = 0$$

معادله مشخصه : $2s^2 + 3s + 1 = 0 \rightarrow s = -1, -\frac{1}{2} \rightarrow v_c(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-\frac{1}{2}t}$

می خواهیم $v_c(t)$ فقط شامل جمله $K_2 e^{-\frac{t}{2}}$ یعنی فرکانس طبیعی با کوچکترین قدرمطلق باشد پس باید $K_1 = 0$ شود.

$$\begin{cases} v_c(0) = V_0 \rightarrow K_1 + K_2 = V_0 \\ \dfrac{dv_c(0)}{dt} = i_c(0) = i_L(0) = I_0 \rightarrow -K_1 - \dfrac{1}{2}K_2 = I_0 \end{cases} \rightarrow K_1 = -V_0 - 2I_0 = 0 \rightarrow V_0 = -2I_0$$

مسئله ۴۰



شکل مسئله ۴۰

الف- معادله دیفرانسیلی برحسب v_c بنویسید و پاسخ پله را حساب کنید.

ب- شرایط اولیه ای بر حسب ولتاژ خازن و جریان سلف چنان پیدا کنید که پاسخ پله v_c فقط بزرگترین فرکانس طبیعی (از لحاظ قدر مطلق) را داشته باشد.

پ- شرایط اولیه را چنان پیدا کنید که پاسخ پله هیچ حالت گذرایی نداشته باشد.

حل : الف ـ با توجه به شکل مسئله داریم.

$$i_L = i_R + i_c = \frac{v_c}{2} + \frac{3}{2}\frac{dv_c}{dt}$$

$$KVL \rightarrow -v_s + 2i_L + v_c + 2\frac{di_L}{dt} = 0$$

$$\rightarrow -v_s + 2\left(\frac{v_c}{2} + \frac{3}{2}\frac{dv_c}{dt}\right) + v_c + 2\frac{d}{dt}\left(\frac{v_c}{2} + \frac{3}{2}\frac{dv_c}{dt}\right) = 0 \rightarrow 6\frac{d^2v_c}{dt^2} + 11\frac{dv_c}{dt} + 5v_c = 2v_s$$

با جایگذاری $v_s(t) = u(t) = 1 \ , \ t > 0$ پاسخ پله را حساب خواهیم کرد.

$$6\frac{d^2v_c}{dt^2} + 11\frac{dv_c}{dt} + 5v_c = 2 \ , \ t > 0$$

معادله مشخصه : $6s^2 + 11s + 5 = 0 \rightarrow s = -1 \ , \ -\frac{5}{6} \rightarrow v_c(t) = \underbrace{K_1 e^{-t} + K_2 e^{-\frac{5}{6}}}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K_3}_{\text{پاسخ خصوصی}}$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $5K_v = 2$ و یا $K_v = \frac{2}{5}$ شده و با فرض شرایط اولیه $v_c(0) = V_0$ و $i_L(0) = I_0$ خواهیم داشت.

$$\begin{cases} v_c(0) = V_0 \quad \rightarrow \quad K_1 + K_2 + \frac{2}{5} = V_0 \\ \frac{dv_c(0)}{dt} = \frac{2}{3} i_c(0) = \frac{2}{3} i_L(0) - \frac{2}{3} i_R(0) = \frac{2}{3} i_R(0) - \frac{2}{3}\frac{v_c(0)}{dt} = \frac{2I_0}{3} - \frac{V_0}{3} \quad \rightarrow \quad K_1 - \frac{5}{6}K_2 = \frac{2I_0}{3} - \frac{V_0}{3} \end{cases}$$

$$\rightarrow K_1 = -4I_0 - 3V_0 + 2 \ , \quad K_2 = 4I_0 + 4V_0 - \frac{12}{5}$$

$$\rightarrow \quad v_c(t) = (-4I_0 - 3V_0 + 2)e^{-t} + \left(4I_0 + 4V_0 - \frac{12}{5}\right)e^{-\frac{5}{6}t} + \frac{2}{5}$$

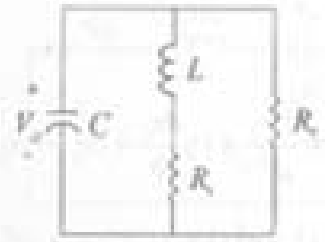
ب ـ برای اینکه پاسخ پله فقط شامل فرکانس طبیعی با بزرگترین قدرمطلق یعنی $s = -1$ باشد باید ضریب جمله شامل فرکانس طبیعی $s = -\frac{5}{6}$ برابر صفر شود.

$$4I_0 + 4V_0 - \frac{12}{5} = 0 \quad \rightarrow \quad I_0 + V_0 = \frac{3}{5}$$

پ ـ اگر ضریب جملات نمایی (پاسخ گذرا) برابر صفر باشد، پاسخ گذرایی نخواهیم داشت.

$$\begin{cases} -4I_0 - 3V_0 + 2 = 0 \\ 4I_0 + 4V_0 - \frac{12}{5} = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad I_0 = \frac{1}{5}A \ , \quad V_0 = \frac{2}{5}V$$

مسئله ۴۱



شکل مسئله ۴۱

R_1 را چنان تعیین کنید که مدار یک نوسان ساز شود.

($L = C = 1$ و $R_2 = -2\Omega$ و $i_L(0) = 0$ و $v_c(0) = V_0$)

حل : با جایگذاری مقادیر داده شده در شکل مسئله آن را مجدداً رسم می کنیم.

$$v_{g_2} = v_c \quad \rightarrow \quad i_{g_2} = \frac{v_{g_2}}{-2} = -\frac{v_c}{2} \quad ; \quad i_L = -i_c - i_{g_2} = -\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{2}$$

$$KVL \text{ برای مش ۱} \rightarrow \quad -v_c + v_L + v_{g_1} = 0 \quad \rightarrow \quad -v_c + \frac{di_L}{dt} + R_1 i_L = 0$$

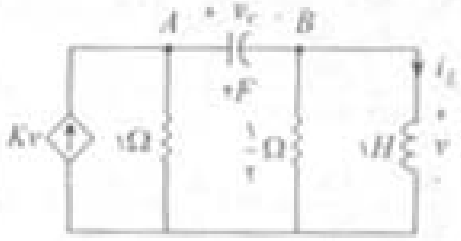
$$\rightarrow \quad -v_c + \frac{d}{dt}\left(-\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{2}\right) - R_1\frac{dv_c}{dt} + R_1\frac{v_c}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 v_c}{dt^2} + \left(R_1 - \frac{1}{2}\right)\frac{dv_c}{dt} + \left(1 - \frac{R_1}{2}\right)v_c = 0$$

$$2\alpha = R_1 - \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{R_1}{2} - \frac{1}{4} \quad , \quad \alpha_0^2 = 1 - \frac{R_1}{2} \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{1 - \frac{R_1}{2}}$$

می دانیم اگر $\alpha = \omega_0$ باشد پاسخ $v_c(t)$ نوسانی بی التلاف شده و مدار یک نوسان ساز خواهد شد.

$$\alpha = \omega_0 \quad \rightarrow \quad \frac{R_1}{2} - \frac{1}{4} = \sqrt{1 - \frac{R_1}{2}} \quad \rightarrow \quad R_1 = -\frac{5}{2}\Omega \ , \ \frac{3}{2}\Omega$$

مسئله ۴۲



شکل مسئله ۴۲

معادله دیفرانسیلی بر حسب v بدست آورده و مکان ریشه های معادله مشخصه آن را با تغییر K تعیین کنید.

$(i_L(0) = I_0 \ , \ v_c(0) = V_0)$

حل : با توجه به شکل مسئله و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$KCL \text{ برای گره } B \rightarrow \quad -2\frac{dv_c}{dt} + \frac{v}{\frac{1}{2}} + \int v\,dt = 0 \quad \rightarrow \quad -2\frac{d^2 v_c}{dt^2} + 2\frac{dv}{dt} + v = 0 \quad \rightarrow \quad v_c = \frac{2D+1}{2D^2}v$$

$$v_g = v_c + v \ , \ KCL \text{ برای گره } A \rightarrow \quad -Kv + \frac{v_c + v}{1} + \frac{2dv_c}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \quad -Kv + v_c + v + 2Dv_c = 0 \quad \rightarrow \quad -Kv + \frac{2D+1}{2D^2}v + v + \frac{2D^2 + 2D}{2D^2}v = 0$$

$$\rightarrow \quad \left((4 - 2K)D^2 + 2D + 1\right)v = 0 \quad \rightarrow \quad (4 - 2K)\frac{d^2 v}{dt^2} + 2\frac{dv}{dt} + v = 0$$

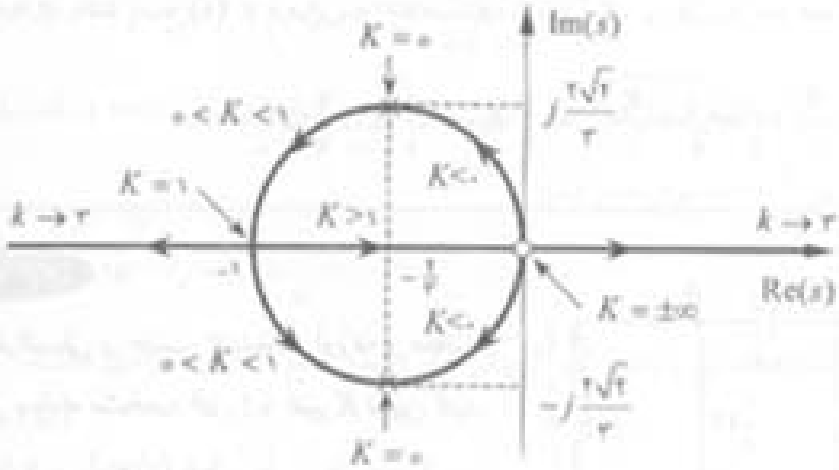
$$\text{معادله مشخصه} : (4 - 2K)s^2 + 2s + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad s = \frac{-2 \pm \sqrt{16 - 2(4 - 2K)}}{4 - 2K} = \frac{-2 \pm \sqrt{8K - 8}}{2 - K}$$

به ازای $8K-8>0$ و یا $K>1$ ریشه ها حقیقی و به ازای $8K-8<0$ و یا $K<1$ ریشه ها مختلط می باشد.
همچنین داریم

$$K=0 \rightarrow s=-\frac{2}{3}\pm j\frac{2\sqrt{2}}{3} \quad , \quad K=1 \rightarrow s=-1$$

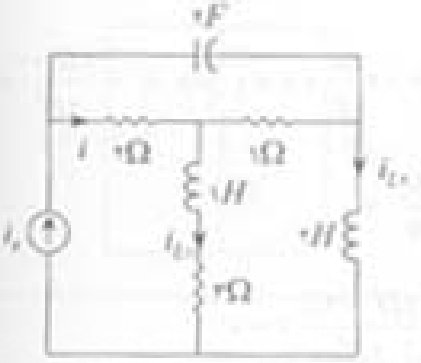
$$K\rightarrow\pm\infty \rightarrow s=0 \quad , \quad K\rightarrow 3 \rightarrow s\rightarrow\pm\infty \text{ (حقیقی)}$$

بنابراین مکان هندسی ریشه ها را می توان بصورت زیر رسم کرد که در آن فلشها تغییر مکان هندسی ریشه ها را به ازای افزایش K از ۰ تا ∞ و از $-\infty$ تا ۰ نشان می دهند.



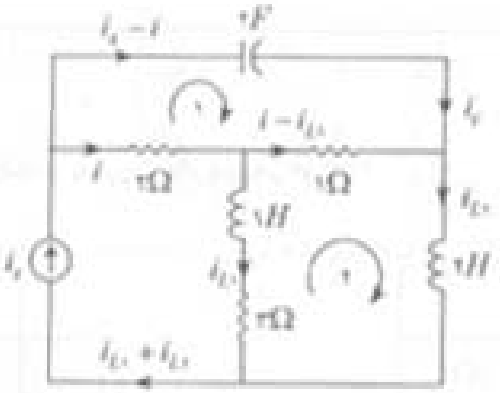
مسئله ۴۳

- معادله دیفرانسیلی بر حسب i تشکیل دهید.
- شرایط اولیه لازم را بر حسب $v_1(0)=V_{0}$ و $i_{L_1}(0)=I_{01}$ و $i_{L_2}(0)=I_{02}$ تعیین کنید.
- مدار از مرتبه چند است و چرا؟ نتیجه را با مرتبه معادله دیفرانسیل بدست آمده مقایسه و توجیه کنید.



شکل مسئله ۴۳

حل : شکل مسئله را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



$$i_{L_1} + i_{L_2} = i_s \quad \rightarrow \quad i_{L_2} = i_s - i_{L_1}$$

KVL برای مش ۲ $\rightarrow \; -3i_{L_1} - \dfrac{di_{L_1}}{dt} + i - i_{L_1} + 2\dfrac{d}{dt}(i_s - i_{L_1}) = 0 \;\rightarrow\; 3\dfrac{di_{L_1}}{dt} + 4i_{L_1} = i + 2\dfrac{di_s}{dt}$

$$\rightarrow \quad (3D+4)i_{L_1} = i + 2Di_s + i_{L_1} = \frac{i + 2Di_s}{3D+4}$$

KVL برای مش ۱ $\rightarrow \; \dfrac{1}{2}\int(i_s - i)dt - (i - i_{L_1}) - 4i = 0$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{2D}(i_s - i) - \left(i - \frac{i + 2Di_s}{3D+4}\right) - 4i = 0 \quad \rightarrow \quad \left(18D^2 + 25D + 4\right)i = \left(4D^2 + 3D + 4\right)i_s$$

$$\rightarrow \quad 18\frac{d^2 i}{dt^2} + 25\frac{di}{dt} + 4i = 4\frac{d^2 i_s}{dt^2} + 3\frac{di_s}{dt} + 4i_s$$

شرایط اولیه لازم $i(0)$ و $\dfrac{di(0)}{dt}$ می باشند.

KVL برای مش ۱ در $t = 0$ $\rightarrow \; v_c(0) - \left(i(0) - i_{L_1}(0)\right) - 4i(0) = 0 \quad \rightarrow \quad i(0) = \dfrac{V_0 + I_{01}}{3}$

$$i = \frac{1}{3}\left(v_c + i_{L_1}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{di}{dt} = \frac{1}{3}\left(\frac{dv_c}{dt} + \frac{di_{L_1}}{dt}\right)$$

با توجه به KVL نوشته شده برای مش ۲ و اینکه $\dfrac{dv_c}{dt} = \dfrac{1}{2}i_1$ خواهیم داشت.

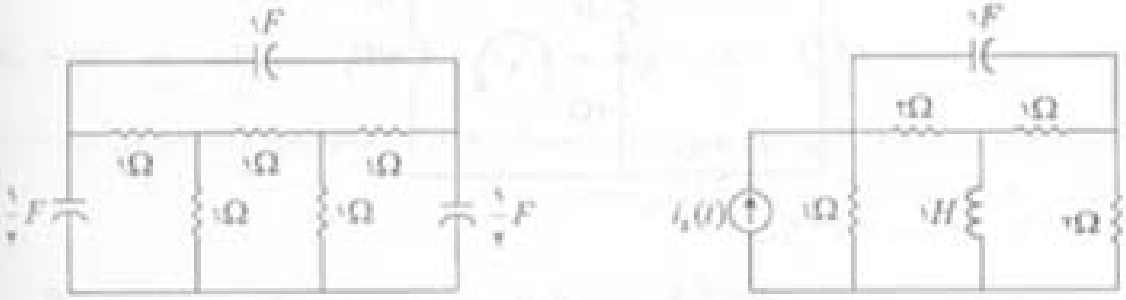
$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\left(i_{L_1} - i + i_{L_1}\right) + \frac{1}{3}\left(i + 2\frac{di_s}{dt} - 4i_{L_1}\right)\right) = -\frac{2i}{54} - \frac{15}{54}i_{L_1} + \frac{i_{L_1}}{6} + \frac{2}{9}\frac{di_s}{dt}$$

$$\rightarrow \quad \frac{di(0)}{dt} = -\frac{V_0 + I_{01}}{54} - \frac{15}{54}I_{01} + \frac{I_{01}}{6} + \frac{2}{9}\frac{di_s(0)}{dt} = -\frac{V_0}{54} - 19\frac{I_{01}}{54} + \frac{I_{01}}{6} + \frac{2}{9}\frac{di_s(0)}{dt}$$

در نگاه اول با دیدن دو سلف و یک خازن تصور می شود که مدار مرتبه سه باشد ولی با کمی دقت ملاحظه میشود که $i_1 = i_{L_1} + i_{L_2}$ بوده و این یعنی اینکه جریانهای سلفها به هم وابسته اند. بنابراین تنها یکی از سلفها و خازن مرتبه مدار را تعیین می کنند و لذا مدار مرتبه دوم خواهد بود.

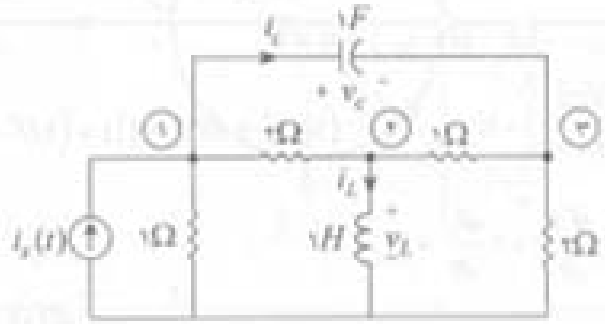
مسئله ۴۴

معادلات حالت را نوشته و بصورت ماتریس در آورید.



(الف) شکل مسئله ۴۴ (ب)

حل : الف ـ از آنجا که مدار مرتبه دو است لذا دو متغیر حالت ولتاژ خازن و جریان سلف را انتخاب خواهیم کرد.



$$v_1 = v_L = \frac{di_L}{dt}$$

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = v_c \\ \text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \dfrac{\frac{di_L}{dt} - v_1}{2} + \dfrac{\frac{di}{dt} - v_2}{1} + i_L = 0 \rightarrow v_1 + 2v_2 = 3\dfrac{di_L}{dt} + 2i_L \end{cases}$$

$$\rightarrow v_1 = \frac{di_L}{dt} + \frac{2}{3}i_L + \frac{2}{3}v_c \ , \ v_2 = \frac{di_L}{dt} + \frac{2}{3}i_L - \frac{1}{3}v_c$$

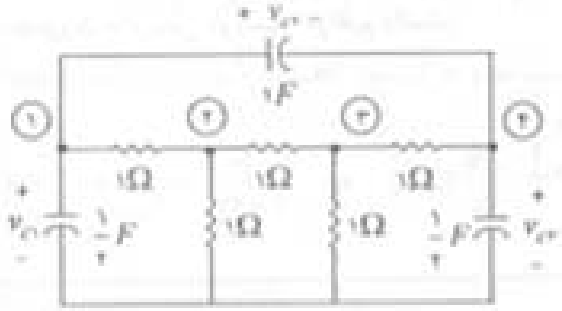
$$\begin{cases} \text{KCL برای گره ۱} \rightarrow -i_s + \dfrac{\frac{di_L}{dt} + \frac{2}{3}i_L + \frac{2}{3}v_c}{1} + \dfrac{\frac{di_L}{dt} + \frac{2}{3}i_L + \frac{2}{3}v_c - \frac{di_L}{dt}}{2} + \dfrac{dv_c}{dt} = 0 \\ \text{KCL برای گره ۲} \rightarrow -\dfrac{dv_c}{dt} + \dfrac{\frac{di_L}{dt} + \frac{2}{3}i_L - \frac{1}{3}v_c - \frac{di_L}{dt}}{1} + \dfrac{\frac{di_L}{dt} + \frac{2}{3}i_L - \frac{1}{3}v_c}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dv_c}{dt} + \dfrac{di_L}{dt} = -v_c - i_L + i_s \\ 2\dfrac{dv_c}{dt} - \dfrac{di_L}{dt} = -v_c + 2i_L \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_c}{dt} = -\dfrac{2}{3}v_c + \dfrac{1}{3}i_L + \dfrac{1}{3}i_s \\ \dfrac{di_L}{dt} = -\dfrac{1}{3}v_c - \dfrac{2}{3}i_L + \dfrac{2}{3}i_s \end{cases}$$

معادلات حالات بدست آمده فوق را می توان بصورت ماتریس نیز نوشت.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dv_c}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} \end{bmatrix} i_s$$

پ ـ شکل (ب) را مجدداً رسم می کنیم.



با نوشتن KVL برای حلقه بیرونی $-v_{c1} + v_{c2} + v_{c3} = 0$ شده بنابراین ولتاژ خازنها به هم وابسته است پس در تعیین مرتبه مدار یکی از خازنها را منظور نخواهیم کرد ولذا مدار مرتبه ۲ بوده و v_{c1} و v_{c2} را به عنوان متغیرهای حالت بر می گزینیم.

$v_1 = v_{c1}$ ، $v_2 = v_{c2}$ ، $v_{c3} = v_{c1} - v_{c2}$

$$\begin{cases} KCL \text{ برای گره } 2 \rightarrow \dfrac{v_1 - v_{c1}}{1} + \dfrac{v_1 - v_2}{1} + \dfrac{v_1}{1} = 0 \rightarrow 3v_1 - v_2 = v_{c1} \\ KCL \text{ برای گره } 3 \rightarrow \dfrac{v_2 - v_1}{1} + \dfrac{v_2}{1} + \dfrac{v_2 - v_{c2}}{1} = 0 \rightarrow -v_1 + 3v_2 = v_{c2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{3v_{c1}}{8} + \dfrac{v_{c2}}{8} \\ v_2 = \dfrac{v_{c1}}{8} + \dfrac{3v_{c2}}{8} \end{cases}$$

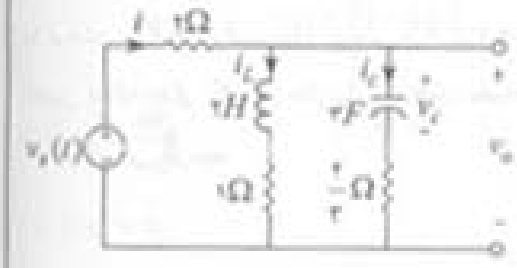
$$\begin{cases} KCL \text{ برای گره } ① \rightarrow \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_{C1}}{dt} + \dfrac{d(v_{C1}-v_{C2})}{dt} + \dfrac{v_{C1} - \left(\dfrac{3v_{C1}}{8} + \dfrac{v_{C2}}{8}\right)}{1} = 0 \\ KCL \text{ برای گره } ② \rightarrow \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_{C2}}{dt} + \dfrac{d(v_{C2}-v_{C1})}{dt} + \dfrac{v_{C2} - \left(\dfrac{v_{C1}}{8} + \dfrac{3v_{C2}}{8}\right)}{1} = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3\dfrac{dv_{C1}}{dt} - 2\dfrac{dv_{C2}}{dt} = -\dfrac{5}{4}v_{C1} + \dfrac{1}{4}v_{C2} \\ -2\dfrac{dv_{C1}}{dt} + 3\dfrac{dv_{C2}}{dt} = \dfrac{1}{4}v_{C1} - \dfrac{5}{4}v_{C2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_{C1}}{dt} = -v_{C1} - v_{C2} \\ \dfrac{dv_{C2}}{dt} = -\dfrac{7}{8}v_{C1} - \dfrac{13}{8}v_{C2} \end{cases}$$

و اگر معادلات حالت فوق را بصورت ماتریسی بنویسیم خواهیم داشت.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dv_{C1}}{dt} \\ \dfrac{dv_{C2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -\dfrac{7}{8} & -\dfrac{13}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix}$$

مسئله ۴۵



شکل مسئله ۴۵

الف - معادلات حالت را بنویسید.

ب- v_o را بر حسب متغیرهای حالت بیان کنید.

پ- معادله دیفرانسیلی بر حسب v_o تشکیل داده و شرایط اولیه را برحسب $v_c(0)$ و $i_L(0)$ تعیین کنید.

ت - پاسخ ضربه v_o را تعیین کنید.

حل : الف- با توجه به شکل مسئله داریم.

$$i = i_c + i_L = \frac{dv_c}{dt} + i_L$$

$$v_o = v_c + \frac{2}{3}i_c = v_c + 2\frac{dv_c}{dt} \rightarrow \frac{dv_c}{dt} + i_L = \frac{v_s - \left(v_c + 2\dfrac{dv_c}{dt}\right)}{2} \rightarrow \frac{dv_c}{dt} = -\frac{v_c}{8} - \frac{i_L}{2} + \frac{v_s}{8} \quad (1)$$

$$v_o = v_L + i_L = 2\frac{di_L}{dt} + i_L \quad , \quad i = \frac{v_s - v_o}{2} \rightarrow \frac{dv_c}{dt} + i_L = \frac{v_s - v_o}{2}$$

$$\rightarrow\ -\frac{v_C}{8}-\frac{i_L}{4}+\frac{v_s}{8}+i_L=\frac{v_s-\left(4\frac{di_L}{dt}+i_L\right)}{2}\ \rightarrow\ \frac{di_L}{dt}=\frac{3v_C}{8}-\frac{3i_L}{4}+\frac{v_s}{8}\qquad(2)$$

$$(1)\ \text{و}\ (2)\ \rightarrow\ \begin{bmatrix}\frac{dv_C}{dt}\\ \frac{di_L}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{8} & -\frac{1}{4}\\ \frac{3}{8} & -\frac{3}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_C\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{8}\\ \frac{1}{8}\end{bmatrix}v_s$$

پ ـ با توجه به معادلات بدست آمده در قسمت (الف) داریم.

$$v_o=v_C+\frac{4}{3}i_C=v_C+\frac{4}{3}(i-i_L)=v_C+\frac{4}{3}\left(\frac{v_s-v_C}{2}-i_L\right)\ \rightarrow\ v_o=\frac{3}{4}v_C-\frac{1}{4}i_L+\frac{1}{4}v_s$$

پ ـ با توجه به معادلات بدست آمده در قسمت (الف) و با نمایش لپلاسی معادلات دیفرانسیل داریم.

$$v_o=v_C+4\frac{dv_C}{dt}=(1+4D)v_C\ \rightarrow\ v_C=\frac{v_o}{4D+1}\ \rightarrow\ i_C=2\frac{dv_C}{dt}=2Dv_C=\frac{2D}{4D+1}v_o$$

$$v_o=\frac{4di_L}{dt}+i_L=(4D+1)i_L\ \rightarrow\ i_L=\frac{1}{4D+1}v_o$$

$$i=i_C+i_L\ \rightarrow\ \frac{v_s-v_C}{2}=\frac{2D}{4D+1}v_o+\frac{1}{4D+1}v_o\ \rightarrow\ (8D+3)v_o=(4D+1)v_s$$

$$\rightarrow\ 8\frac{dv_o}{dt}+3v_o=4\frac{dv_s}{dt}+v_s$$

برای محاسبه شرایط اولیه می توان نوشت.

$$v_o=\frac{3}{4}v_C-\frac{1}{4}i_L+\frac{1}{4}v_s\ \rightarrow\ v_o(0)=\frac{3}{4}v_C(0)-\frac{1}{4}i_L(0)+\frac{1}{4}v_s(0)$$

ت ـ با جایگذاری $v_s(t)=\delta(t)$ پاسخ ضربه را بدست خواهیم آورد.

$$8\frac{dv_o}{dt}+3v_o=4\delta'(t)+\delta(t)\ \rightarrow\ v_o(t)=K_1u(t)e^{-\frac{3}{8}t}+K_2\delta(t)$$

با جایگذاری $v_o(t)$ در معادله دیفرانسیل داریم.

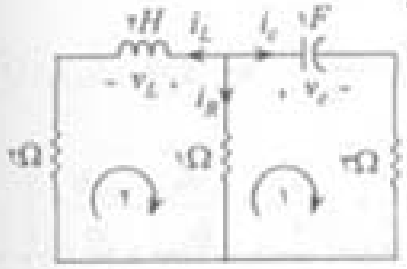
$$8K_1\delta(t)e^{-\frac{3}{8}t}-3K_1u(t)e^{-\frac{3}{8}t}+8K_2\delta'(t)+3K_1u(t)e^{-\frac{3}{8}t}+3K_2\delta(t)$$

$$=(8K_1+3K_2)\delta(t)+8K_2\delta'(t)=4\delta'(t)+\delta(t)$$

$$\rightarrow\ \begin{cases}8K_1+3K_2=1\\ 8K_2=4\end{cases}\ \rightarrow\ K_1=\frac{1}{24}\ ,\ K_2=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ v_o(t)=\frac{1}{24}u(t)e^{-\frac{3}{8}t}+\frac{1}{2}\delta(t)$$

مسئله ۴۶

معادلات حالت را بنویسید و از روی آنها ثابت کنید $\frac{dE(t)}{dt} \le 0$ ($E(t)$ انرژی ذخیره شده در مدار است).



شکل مسئله ۴۶

حل : ولتاژ خازن و جریان سلف را به عنوان متغیر های حالت انتخاب می کنیم.

$$KVL \text{ برای مش ۱} \rightarrow -i_R + v_c + 2i_c \rightarrow -i_R + v_c + 2\frac{dv_c}{dt} = 0 \rightarrow i_R = 2\frac{dv_c}{dt} + v_c$$

$$i_c + i_L + i_R = 0 \rightarrow \frac{dv_c}{dt} + i_L + 2\frac{dv_c}{dt} + v_c = 0 \rightarrow \frac{dv_c}{dt} = -\frac{v_c}{4} - \frac{i_L}{4} \qquad (1)$$

$$KVL \text{ برای مش ۲} \rightarrow -2i_L - v_L + i_R = 0 \rightarrow -2i_L - v_L - 2\frac{dv_c}{dt} + v_c = 0$$

$$\rightarrow -2i_L - 2\frac{di_L}{dt} - 2\left(-\frac{v_c}{4} - \frac{i_L}{4}\right) = 0 \rightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{v_c}{8} - \frac{11i_L}{8} \qquad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{dv_c}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{11}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix}$$

$$\frac{dE_c}{dt} = P_c(t) = v_c i_c = v_c \frac{dv_c}{dt} = v_c\left(-\frac{v_c}{4} - \frac{i_L}{4}\right) = -\frac{v_c^2}{4} - \frac{v_c i_L}{4}$$

$$\frac{dE_L}{dt} = P_L(t) = v_L i_L = 2\frac{di_L}{dt} \cdot i_L = 2\left(\frac{v_c}{8} - \frac{11i_L}{8}\right) i_L = -\frac{v_c i_L}{4} - \frac{11i_L^2}{8}$$

$$\rightarrow \frac{dE(t)}{dt} = \frac{dE_c(t)}{dt} + \frac{dE_L(t)}{dt} = -\frac{1}{4}\left(v_c^2 + 11i_L^2\right) \le 0$$

مسئله ۴۷

شکل مسئله ۴۷

معادلات حالت را بنویسید.

نشان دهید $\frac{dE(t)}{dt} < 0$

($E(t)$ انرژی ذخیره شده در مدار است).

حل: با انتخاب جریان سلفها به عنوان متغیر های حالت و با توجه به شکل مدار داریم.

$$KVL \text{ برای مش ۱} \rightarrow -v_{L_1} + i + v_{L_2} = 0 \rightarrow i = v_{L_1} - v_{L_2} = 2\frac{di_{L_1}}{dt} - 3\frac{di_{L_2}}{dt}$$

$$KCL \text{ برای گره } A \rightarrow \frac{v_{L_1}}{2} + i_{L_1} + 2\frac{di_{L_1}}{dt} - 3\frac{di_{L_2}}{dt} = 0 \rightarrow \frac{2\frac{di_{L_1}}{dt}}{2} + i_{L_1} + 2\frac{di_{L_1}}{dt} - 3\frac{di_{L_2}}{dt} = 0$$

$$KCL \text{ برای گره } B \rightarrow \frac{v_{L_2}}{2} + i_{L_2} - 2\frac{di_{L_1}}{dt} + 3\frac{di_{L_2}}{dt} = 0 \rightarrow \frac{3\frac{di_{L_2}}{dt}}{2} + i_{L_2} - 2\frac{di_{L_1}}{dt} + 3\frac{di_{L_2}}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 8\frac{di_{L_1}}{dt} - 9\frac{di_{L_2}}{dt} = -3i_{L_1} \\ -2\frac{di_{L_1}}{dt} + 9\frac{di_{L_2}}{dt} = -2i_{L_2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{di_{L_1}}{dt} = -\frac{3}{2}i_{L_1} - \frac{1}{2}i_{L_2} \\ \frac{di_{L_2}}{dt} = -\frac{1}{3}i_{L_1} - \frac{2}{9}i_{L_2} \end{cases}$$

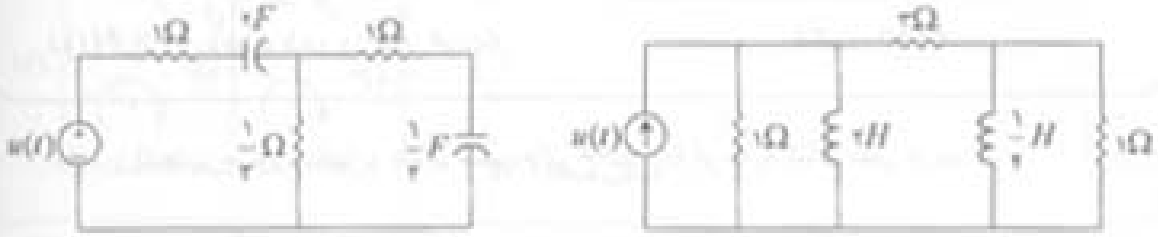
$$\frac{dE_{L_1}(t)}{dt} = P_{L_1}(t) = v_{L_1}i_{L_1} = 2\frac{di_{L_1}}{dt}\cdot i_{L_1} = -\frac{3}{2}i_{L_1}^2 - i_{L_1}i_{L_2}$$

$$\frac{dE_{L_2}(t)}{dt} = P_{L_2}(t) = v_{L_2}i_{L_2} = 3\frac{di_{L_2}}{dt}\cdot i_{L_2} = -i_{L_1}i_{L_2} - \frac{2}{3}i_{L_2}^2$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\frac{3}{2}i_{L_1}^2 - 2i_{L_1}i_{L_2} - \frac{2}{3}i_{L_2}^2 = -\frac{1}{6}\left((3i_{L_1} + 2i_{L_2})^2 + 2i_{L_2}^2\right) < 0$$

مسئله ۴۸

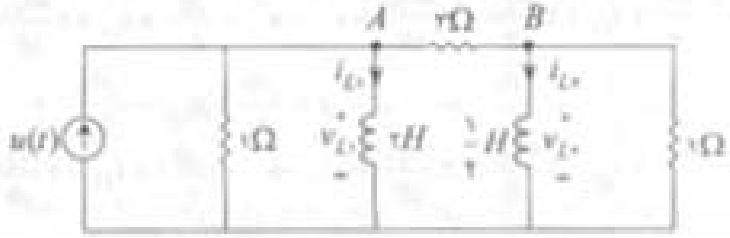
- معادلات حالت را نوشته و بصورت ماتریس درآورید.
- آیا معادلات ارتباط یا شباهتی با هم دارند و از آن چه نتیجه ای می توان گرفت.



(ب) (الف)

شکل مسئله ۴۸

حل : الف ـ مدار شکل (الف) را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



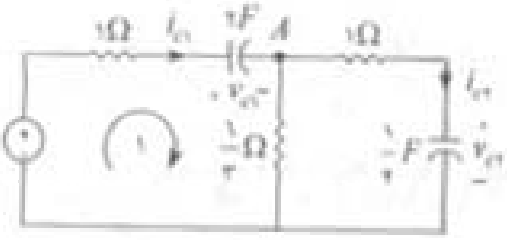
$$v_A = v_{L_1} = 2\frac{di_{L_1}}{dt} \quad , \quad v_B = v_{L_2} = \frac{1}{2}\frac{di_{L_2}}{dt}$$

$$\begin{cases} \text{KCL برای گره } A \rightarrow -u(t) + \dfrac{\frac{2di_{L_1}}{dt}}{1} + i_{L_1} + \dfrac{\frac{2di_{L_1}}{dt} - \frac{1}{2}\frac{di_{L_2}}{dt}}{3} = 0 \\ \text{KCL برای گره } B \rightarrow \dfrac{\frac{1}{2}\frac{di_{L_2}}{dt}}{1} + i_{L_2} + \dfrac{\frac{1}{2}\frac{di_{L_2}}{dt} - 2\frac{di_{L_1}}{dt}}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1.6\dfrac{di_{L_1}}{dt} - \dfrac{di_{L_2}}{dt} = -6i_{L_1} + 6u \\ 2\dfrac{di_{L_1}}{dt} - 2\dfrac{di_{L_2}}{dt} = 3i_{L_2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{di_{L_1}}{dt} = -\dfrac{2}{5}i_{L_1} - \dfrac{1}{10}i_{L_2} + \dfrac{2}{5}u \\ \dfrac{di_{L_2}}{dt} = -\dfrac{2}{5}i_{L_1} - \dfrac{8}{5}i_{L_2} + \dfrac{2}{5}u \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{di_{L_1}}{dt} \\ \dfrac{di_{L_2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{5} & -\dfrac{1}{10} \\ -\dfrac{2}{5} & -\dfrac{8}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{2}{5} \end{bmatrix} u$$

ب ـ شکل (ب) را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم و ولتاژ خازنها را به عنوان متغیر های حالت بر می گزینیم.



$$v_s = i_{c1} + v_{c1} = \frac{1}{2}\frac{dv_{c1}}{dt} + v_{c1}$$

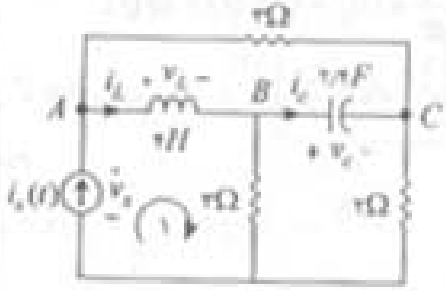
$$\begin{cases} \text{KCL برای گره ④} \rightarrow -2\dfrac{dv_{c1}}{dt} + \dfrac{\frac{1}{2}\frac{dv_{c1}}{dt} + v_{c1}}{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_{c2}}{dt} \\ \text{KVL برای مش ①} \rightarrow -2\dfrac{dv_{c1}}{dt} + \dfrac{\frac{1}{2}\frac{dv_{c1}}{dt} + v_{c1}}{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_{c2}}{dt} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2\dfrac{dv_{c1}}{dt} - 2\dfrac{dv_{c2}}{dt} = 3v_{c1} \\ 2\dfrac{dv_{c1}}{dt} + \dfrac{dv_{c2}}{dt} = -2v_{c1} - 2v_{c2} + 2u \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_{c1}}{dt} = -\dfrac{2}{5}v_{c1} - \dfrac{1}{10}v_{c2} + \dfrac{2}{5}u \\ \dfrac{dv_{c2}}{dt} = -\dfrac{2}{5}v_{c1} - \dfrac{8}{5}v_{c2} + \dfrac{2}{5}u \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{dv_{c1}}{dt} \\ \dfrac{dv_{c2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{5} & -\dfrac{1}{10} \\ -\dfrac{2}{5} & -\dfrac{8}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{2}{5} \end{bmatrix} u$$

ملاحظه می شود که ماتریسهای بدست آمده در قسمت های (الف) و (ب) یکسان می باشند و تنها تفاوت معادلات این است که بجای جریان سلف، ولتاژ خازن و به جای منبع جریان، منبع ولتاژ جایگزین شده است. نتیجه اینکه دو مدار فوق دوگان یکدیگرند.

مسئله ۴۹



شکل مسئله ۴۹

- معادلات حالت را بنویسید.
- ولتاژ v_c را بر حسب متغیر های حالت بیان کنید.
- پاسخ ضربه i_L را حساب کنید.

حل : با انتخاب ولتاژ خازن و جریان سلف به عنوان متغیر های حالت و با توجه به شکل زیر داریم

$$KCL \text{ برای گره } B \rightarrow -i_L + \frac{v_B}{3} + i_s = 0 \rightarrow v_B = 3i_L - 3i_s = 3i_L - 7/2\frac{dv_C}{dt}$$

$$v_B - v_C = v_C \rightarrow v_C = v_B - v_C = 3i_L - 7/2\frac{dv_C}{dt} - v_C$$

$$v_A - v_B = v_L \rightarrow v_A = v_B + v_L = 3i_L - 7/2\frac{dv_C}{dt} + 2\frac{di_L}{dt}$$

$$KCL \text{ برای گره } A \rightarrow -i_s + i_L + \frac{\left(3i_L - 7/2\frac{dv_C}{dt} + 2\frac{di_L}{dt}\right) - \left(3i_L - 7/2\frac{dv_C}{dt} - v_C\right)}{3} = 0$$

$$\rightarrow \frac{di_L}{dt} = -\frac{v_C}{2} - 2\frac{i_L}{2} + \frac{3i_s}{2}$$

$$KCL \text{ برای گره } C \rightarrow -2/2\frac{dv_C}{dt} + \frac{3i_L - 7/2\frac{dv_C}{dt} - v_C}{2}$$

$$+\frac{\left(3i_L - 7/2\frac{dv_C}{dt} - v_C\right) - \left(3i_L - 7/2\frac{dv_C}{dt} + 2\frac{di_L}{dt}\right)}{3} = 0 \rightarrow \frac{dv_C}{dt} = -\frac{v_C}{12} + \frac{5i_L}{2} - \frac{i_s}{6}$$

$$KVL \text{ برای مش } 1 \rightarrow v_s = 2\frac{di_L}{dt} + 3i_L - 7/2\frac{dv_C}{dt} = -\frac{2v_C}{5} - 3i_L + \frac{2V_s}{5}$$

در ادامه به محاسبه پاسخ ضربه i_L می پردازیم. $(i_s(t) = \delta(t))$

$$Dv_C = \frac{dv_C}{dt} = -\frac{v_C}{12} + \frac{5i_L}{2} - \frac{i_s}{6} \rightarrow v_C = \frac{15i_L - 2i_s}{12D + 1}$$

$$Di_L = \frac{di_L}{dt} = -\frac{v_C}{2} - \frac{3i_L}{2} + \frac{3}{2}i_s = -\frac{1}{2}\left(\frac{15i_L - 2i_s}{12D + 1}\right) - \frac{3i_L}{2} + \frac{3i_s}{2}$$

$$\left(28D^2 + 20D + 12\right)i_L = \left(36D + 5\right)i_s \rightarrow 28\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 20\frac{di_L}{dt} + 12i_L = 36\delta'(t) + 5\delta(t)$$

در $t = 0^+$ سلف مدار باز بوده و لذا $i_L(0^+) = 0$ می باشد و با انتگرال گیری در فاصله 0^- تا 0^+ از معادله فوق داریم

$$28\frac{di_L(0^+)}{dt} = 5 \rightarrow \frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{5}{28}$$

همچنین می دانیم که به ازای $t > 0$ ، $\delta'(t) = \delta(t) = 0$ می باشد پس معادله فوق را می توان بصورت زیر نوشت.

$$48\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 20\frac{di_L}{dt} + 12 i_L = 0 \ , \ i_L(0^+) = 0 \ , \ \frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{5}{48}$$

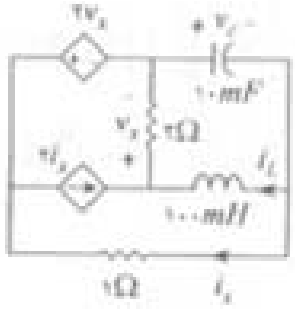
معادله مشخصه : $48s^2 + 20s + 12 \rightarrow s = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \rightarrow i_L(t) = K_1 e^{-\frac{1}{2}t} + K_2 e^{-\frac{1}{3}t} \ , \ t > 0$

$$\begin{cases} i_L(0^+) = 0 \rightarrow K_1 + K_2 = 0 \\ \frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{5}{48} \rightarrow -\frac{1}{2}K_1 - \frac{1}{3}K_2 = \frac{5}{5A} \end{cases} \rightarrow K_1 = -\frac{5}{A} \ , \ K_2 = \frac{5}{A}$$

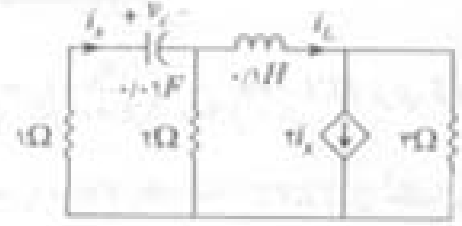
$$\rightarrow i_L(t) = \frac{5}{A}\left(e^{-\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{3}}\right) \ , \ t > 0$$

مسئله ۵۰

معادلات حالت را بنویسید.



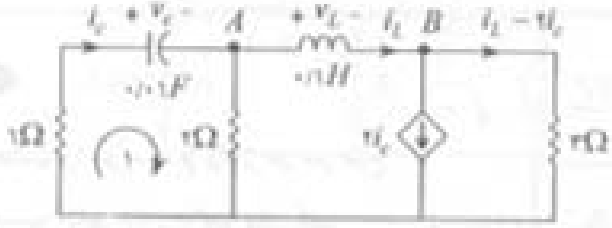
(ب)



(الف)

شکل مسئله ۵۰

حل : الف ـ مدار(الف) را مجدداً رسم کرده، جریان سلف و ولتاژ خازن را به عنوان متغیرهای حالت بر می گزینیم.



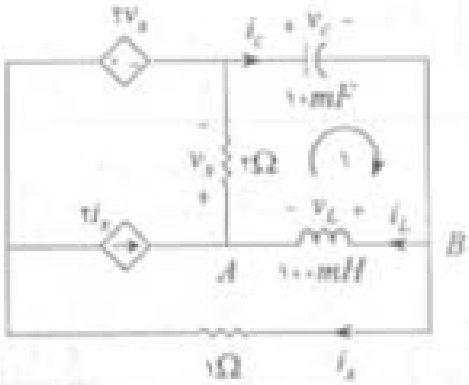
$$v_B = 3(i_L - 2i_C) = 3i_L - 0/06\frac{dv_C}{dt} \qquad v_A = v_L + v_B = 0/1\frac{di_L}{dt} + 3i_L - 0/06\frac{dv_C}{dt}$$

KCL برای گره (A) $\rightarrow \quad -0/01\dfrac{dv_c}{dt}+\dfrac{0/1\dfrac{di_L}{dt}+3i_L-0/06\dfrac{dv_c}{dt}}{2}+i_L=0$

KVL برای مش ۱ $\rightarrow \quad 0/01\dfrac{dv_c}{dt}+v_c+0/1\dfrac{di_L}{dt}+3i_L-0/06\dfrac{dv_c}{dt}=0$

$$\rightarrow \begin{cases} 8\dfrac{dv_c}{dt}+10\dfrac{di_L}{dt}=50\,i_L \\ 5\dfrac{dv_c}{dt}+10\dfrac{di_L}{dt}=30\,i_L+100\,v_c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_c}{dt}=\dfrac{200}{3}i_L-\dfrac{100}{3}v_c \\ \dfrac{di_L}{dt}=\dfrac{10}{3}i_L-\dfrac{80}{3}v_c \end{cases}$$

ب ـ با انتخاب ولتاژ خازن و جریان سلف به عنوان متغیر های حالت ، شکل (ب) را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم



KCL برای گره (A) $\rightarrow \quad -2i_x+\dfrac{v_x}{2}-i_L=0$

KVL برای حلقه بیرونی $\rightarrow \quad 2v_x+v_c+i_x=0$

$$\rightarrow \quad v_x=\frac{2}{9}i_L-\frac{2}{9}v_c \ ,\ i_x=-\frac{2}{9}i_L-\frac{1}{9}v_c$$

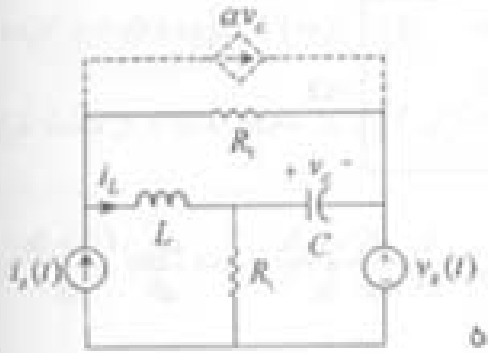
KCL برای گره (B) $\rightarrow \quad -10\times10^{-6}\dfrac{dv_c}{dt}+i_L-\dfrac{2}{9}i_L-\dfrac{1}{9}v_c=0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{dv_c}{dt}=\dfrac{500}{9}i_L-\dfrac{100}{9}v_c$

KVL برای مش ۱ $\rightarrow \quad -\dfrac{2}{9}i_L-\dfrac{2}{9}v_c+v_c+100\times10^{-6}\dfrac{di_L}{dt}=0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{di_L}{dt}=-\dfrac{50}{9}v_c-\dfrac{20}{9}i_L$

مسئله ۵۱

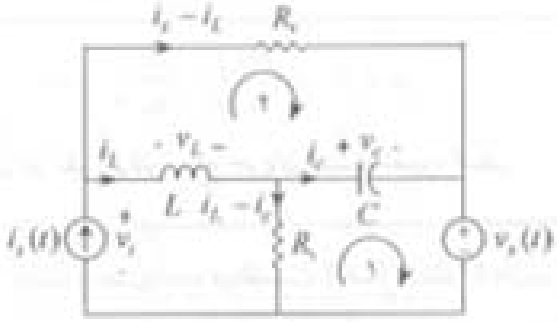
الف- معادلات حالت را بنویسید و ولتاژ دو سر منبع جریان i_s را بر حسب متغیر های حالت بیان کنید.

ب- اگرمنبع جریان وابسته اضافه شود، معادلات حالت را بار دیگر بنویسید.



شکل مسئله ۵۱

حل : الف ـ در این حالت مدار بصورت زیراست که با انتخاب ولتاژخازن وجریان سلف به عنوان متغیرهای حالت خواهیم داشت.



$$KVL \text{ برای مش ۱} \rightarrow -R_s(i_s - i_L) + v_C + v_s = 0 \rightarrow \frac{dv_C}{dt} = \frac{i_C}{C} = -\frac{v_C}{R_sC} + \frac{i_L}{C} + \frac{v_s}{R_sC}$$

$$KVL \text{ برای مش ۲} \rightarrow R_s(i_s - i_L) - v_C - L\frac{di_L}{dt} = 0 \rightarrow \frac{di_L}{dt} = -\frac{v_C}{L} - \frac{R_s}{L}i_L + \frac{R_s}{L}i_s$$

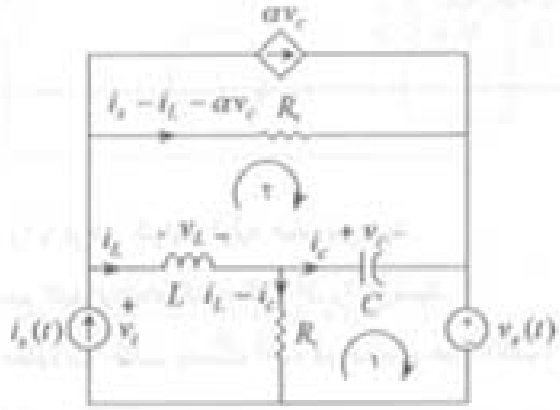
و برای محاسبه ولتاژ دو سر i_s داریم.

$$KVL \text{ برای مش بیرونی} \rightarrow -v_i + R_s(i_s - i_L) + v_s = 0 \rightarrow v_i = -R_si_L + R_si_s + v_s$$

$$\rightarrow v_i = -R_si_L + \left(L\frac{di_L}{dt} + v_C - R_si_L\right) + \left(R_sC\frac{dv_C}{dt} + v_C - R_si_L\right)$$

$$\rightarrow v_i = L\frac{di_L}{dt} + R_sC\frac{dv_C}{dt} + 2v_C - (R_s + 2R_s)i_L \rightarrow v_i = -R_si_L + R_si_s + v_s$$

ب ـ در این حالت مدار بصورت زیر می باشد.



با انتخاب ولتاژ خازن و جریان سلف به عنوان متغیر های حالت خواهیم داشت.

$$KVL \text{ برای مش ۱} \rightarrow -R_s\left(i_L - C\frac{dv_C}{dt}\right) + v_C + v_s = 0 \rightarrow \frac{dv_C}{dt} = -\frac{v_C}{R_sC} + \frac{i_L}{C} - \frac{v_s}{R_sC}$$

$$KVL \text{ برای مش ۲} \rightarrow R_2\left(i_s - i_L - \alpha v_c\right) - v_c - L\frac{di_L}{dt} = 0 \rightarrow \frac{di_L}{dt} = -\frac{\left(1+\alpha R_2\right)}{L}v_c - \frac{R_2}{L}i_L + \frac{R_2}{L}i_s$$

مسئله ۵۲

Q مدار مسئله ۵۱ را بدون در نظر گرفتن منبع جریان وابسته تعیین کنید.

حل : با توجه به معادلات حالت بدست آمده در قسمت (الف) مسئله ۵۱ داریم.

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{v_c}{L} - \frac{R_1}{L}i_L + \frac{R_1}{L}i_s \quad \rightarrow \quad v_c = -L\frac{di_L}{dt} - R_1 i_L + R_1 i_s$$

$$\frac{dv_c}{dt} = -\frac{v_c}{R_2C} + \frac{i_L}{C} + \frac{v_s}{R_2C} \quad \rightarrow \quad -L\frac{d^2 i_L}{dt^2} - R_1\frac{di_L}{dt} + R_1\frac{di_s}{dt}$$

$$= \frac{L}{R_2C}\frac{di_L}{dt} + \frac{R_1}{R_2C}i_L + \frac{R_1}{R_2C}i_s + \frac{i_L}{C} + \frac{v_s}{R_2C}$$

$$\rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_2C} + \frac{R_1}{L}\right)\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}\left(\frac{R_1}{R_2}+1\right)i_L = \frac{R_1}{L}\frac{di_s}{dt} - \frac{R_1}{R_2LC}i_s - \frac{1}{R_2LC}v_s$$

$$2\alpha = \frac{1}{R_2C} + \frac{R_1}{L} \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{L + R_1R_2C}{2R_2CL}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}\left(\frac{R_1}{R_2}+1\right) \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{R_2+R_1}{R_2LC}}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\sqrt{\frac{R_2+R_1}{R_2LC}}}{\frac{L+R_1R_2C}{R_2CL}} = \frac{1}{L+R_1R_2C}\sqrt{R_2LC\left(R_2+R_1\right)}$$

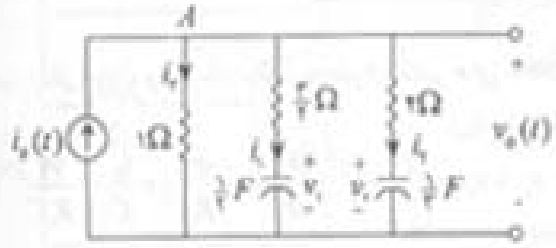
مسئله ۵۳

الف- معادلات حالت را با فرض شرایط اولیه صفر بنویسید.

ب- دوگان مدار را رسم کنید و معادلات حالت آن را بنویسید.

پ- آیا ارتباطی میان معادلات حالت بدست آمده در قسمت های (الف) و (ب) وجود دارد.

ت- پاسخ ضربه v_o را تعیین کنید.



شکل مسئله ۵۳

حل : با توجه به شکل و با انتخاب ولتاژ خازنها به عنوان متغیر های حالت داریم.

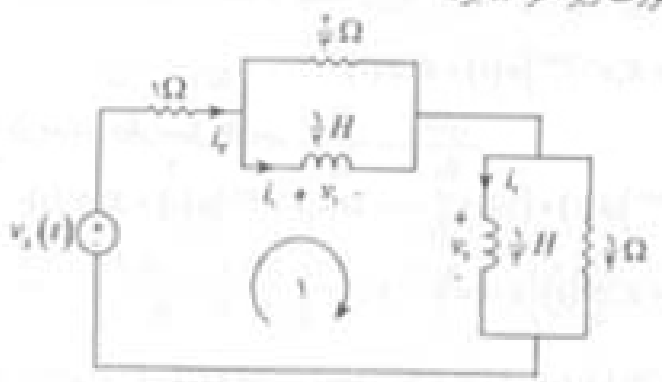
$$\begin{cases} v_a = v_1 + 2i_1 = v_1 + \frac{2}{3}\frac{dv_1}{dt} \\ v_b = v_1 + \frac{3}{2}i_2 = v_1 + \frac{3}{4}\frac{dv_2}{dt} \end{cases} \rightarrow \frac{3}{2}\frac{dv_1}{dt} - \frac{2}{3}\frac{dv_2}{dt} = -v_1 + v_2$$

$$KCL \text{ برای گره } A \rightarrow -i_s + \frac{v_1 + \frac{3}{4}\frac{dv_2}{dt}}{1} + \frac{1}{2}\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{3}\frac{dv_2}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \frac{5}{2}\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{3}\frac{dv_2}{dt} = -v_1 + i_s \rightarrow \begin{cases} 9\frac{dv_1}{dt} - 16\frac{dv_2}{dt} = -12v_1 + 12v_2 \\ 15\frac{dv_1}{dt} + 2\frac{dv_2}{dt} = -12v_1 + 12i_s \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = -\frac{20}{23}v_1 + \frac{2}{23}v_2 + \frac{16}{23}i_s \\ \frac{dv_2}{dt} = \frac{6}{23}v_1 - \frac{15}{23}v_2 + \frac{9}{23}i_s \end{cases}$$

ب ـ دوگان مدار فوق بصورت زیر خواهد بود.



$$\begin{cases} i_a = \frac{v_1}{\frac{2}{3}} + i_1 = \frac{3}{2}\frac{di_1}{dt} + i_1 \\ i_b = \frac{v_2}{\frac{3}{2}} + i_2 = \frac{2}{3}\frac{di_2}{dt} + i_2 \end{cases} \rightarrow \frac{3}{2}\frac{di_1}{dt} - \frac{2}{3}\frac{di_2}{dt} = -i_1 + i_2$$

$$KVL \text{ برای مش } ۱ \rightarrow -v_s + \frac{3}{2}\frac{di_1}{dt} + i_1 + \frac{1}{2}\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{3}\frac{di_2}{dt} = 0 \rightarrow \frac{5}{2}\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{3}\frac{di_2}{dt} = -i_1 + v_s$$

$$\rightarrow \begin{cases} 9\dfrac{di_1}{dt} - 16\dfrac{di_2}{dt} = -12i_1 + 12i_2 \\ 15\dfrac{di_1}{dt} + 4\dfrac{di_2}{dt} = -12i_1 + 12v_s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{di_1}{dt} = -\dfrac{20}{23}i_1 + \dfrac{4}{23}i_2 + \dfrac{16}{23}v_s \\ \dfrac{di_2}{dt} = \dfrac{6}{23}i_1 - \dfrac{15}{23}i_2 + \dfrac{9}{23}v_s \end{cases}$$

پ ـ معادلات یکسان بوده با این تفاوت که بجای ولتاژ خازنها، جریان سلفها و بجای منبع جریان، منبع ولتاژ جایگزین شده است.

ت ـ با توجه به معادلات بدست آمده در قسمت(الف) و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$v_s = v_1 + \frac{4}{3}\frac{dv_1}{dt} = \left(1 + \frac{4}{3}D\right)v_1 \rightarrow v_1 = \frac{3}{4D+3}v_o \ , \ v_o = v_1 + \frac{3}{4}\frac{dv_1}{dt} \rightarrow v_1 = \frac{4}{3D+4}v_o$$

$$15\frac{dv_1}{dt} + 4\frac{dv_2}{dt} = -12v_1 + 12i_s \rightarrow \frac{60D}{3D+4}v_o + \frac{12D}{4D+3}v_o = -\frac{48}{3D+4}v_o + 12i_s$$

$$\left(12D^2 + 25D + 12\right)v_o = \left(12D^2 + 25D + 12\right)i_s$$

$$\rightarrow 12\frac{d^2v_o}{dt^2} + 25\frac{dv_o}{dt} + 12v_o = 12\delta''(t) + 25\delta'(t) + 12\delta(t)$$

معادله مشخصه : $12s^2 + 25s + 12 = 0 \rightarrow s = -1 \ , \ -0/52$

$$\rightarrow v_o(t) = \left(K_1e^{-t} + K_2e^{-0/52t}\right)u(t) + K_3\delta(t)$$

با جایگذاری $v_o(t)$ در معادله دیفرانسیل داریم.

$$\frac{dv_o}{dt} = \left(K_1e^{-t} + K_2e^{-0/52t}\right)\delta(t) + \left(-K_1e^{-t} - 0/52K_2e^{-0/52t}\right)u(t) + K_3\delta'(t)$$

$$= \left(K_1 + K_2\right)\delta(t) + K_3\delta'(t) \ , \ t = 0$$

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} = \left(K_1e^{-t} + K_2e^{-0/52t}\right)\delta'(t) + \left(-K_1e^{-t} - 0/52e^{-0/52t}\right)\delta(t) + \left(-K_1e^{-t} - 0/52e^{-0/52t}\right)\delta(t)$$

$$+ \left(K_1e^{-t} + (0/52)^2K_2e^{-0/52t}\right)u(t) + K_3\delta''(t)$$

$$= \left(K_1 + K_2\right)\delta'(t) + \left(-2K_1 - 1/04K_2\right)\delta(t) + K_3\delta''(t) \ , \ t = 0$$

$$12K_3\delta''(t) + \left(12K_1 + 12K_2 + 25K_3\right)\delta'(t) + \left(-11K_1 + 11/08K_2 + 12K_3\right)\delta(t)$$

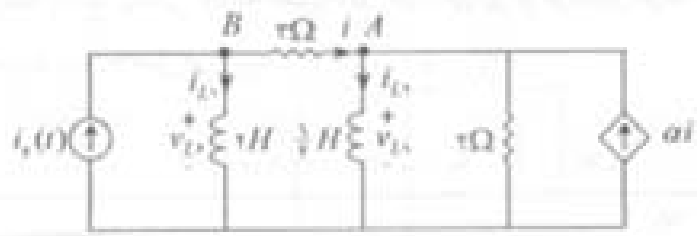
$$= 12\delta''(t) + 25\delta'(t) + 12\delta(t)$$

$$\rightarrow \begin{cases} 22K_1 = 12 \\ 22K_1 + 22K_2 + 35K_3 = 25 \\ -11K_1 + 11/08K_2 + 12K_3 = 12 \end{cases} \rightarrow K_1 = 0/54 \,,\; K_2 = 0/09 \,,\; K_3 = 0/2$$

$$\rightarrow v_c(t) = \left(0/09e^{-t} + 0/2e^{-10/5t}\right)u(t) + 0/54\delta(t)$$

مسئله ۵۴

- معادلات حالت را نوشته و α را چنان تعیین کنید که مدار میرایی بحرانی باشد.
- آیا می توان α را چنان تعیین کرد که مدار نوسانی باشد. در صورت مثبت بودن جواب این کار را انجام دهید.



شکل مسئله ۵۴

حل : با توجه به شکل مسئله و با انتخاب جریان سلفها به عنوان متغیرهای حالت داریم.

$$i = \frac{v_B - v_A}{2} = \frac{v_{L_1} - v_{L_2}}{2} = \frac{2\frac{di_{L_1}}{dt} - \frac{1}{2}\frac{di_{L_2}}{dt}}{2} = \frac{2}{3}\frac{di_{L_1}}{dt} - \frac{1}{6}\frac{di_{L_2}}{dt}$$

$$KCL \text{ برای گره } A \rightarrow -\left(\frac{2}{3}\frac{di_{L_1}}{dt} - \frac{1}{6}\frac{di_{L_2}}{dt}\right) + i_{L_2} + \frac{\frac{1}{2}\frac{di_{L_2}}{dt}}{2} - \alpha\left(\frac{2}{3}\frac{di_{L_1}}{dt} - \frac{1}{6}\frac{di_{L_2}}{dt}\right) = 0$$

$$KCL \text{ برای گره } B \rightarrow -i_s + i_{L_1} + \frac{2}{3}\frac{di_{L_1}}{dt} - \frac{1}{6}\frac{di_{L_2}}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 8(\alpha+1)\frac{di_{L_1}}{dt} - (2\alpha+5)\frac{di_{L_2}}{dt} = 12i_{L_2} \\ 2\frac{di_{L_1}}{dt} - \frac{di_{L_2}}{dt} = -6i_{L_1} + 6i_s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{di_{L_1}}{dt} = -\frac{1}{2}(2\alpha+5)i_{L_1} - i_{L_2} + \frac{1}{2}(2\alpha+5)i_s \\ \frac{di_{L_2}}{dt} = -2(\alpha+1)i_{L_1} - 2i_{L_2} + 2(\alpha+1)i_s \end{cases}$$

برای محاسبه α ابتدا باید معادله مشخصه را با استفاده از رابطه $|SI - A| = 0$ بدست آورد که در آن ماتریس A ماتریس انتقالی معادلات حالت و I ماتریس واحد هم مرتبه با A می باشد.

$$SI - A = S\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(2\alpha+5) & -1 \\ -2(\alpha+1) & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S+\frac{1}{2}(2\alpha+5) & 1 \\ 2(\alpha+1) & S+2 \end{bmatrix}$$

$$|SI - A| = 0 \rightarrow \left[S+\frac{1}{2}(2\alpha+5)\right](S+2) - 2(\alpha+1) = 0 \rightarrow S^2 + \left(\alpha + \frac{13}{2}\right)S + 6 = 0$$

$$S^2 + AS + \omega_0^2 = 0 \quad , \quad A = \alpha + \frac{13}{2} \quad , \quad \omega_0^2 = 6 \rightarrow \omega_0 = \sqrt{6}$$

شرط اینکه پاسخ میرایی بحرانی شود این است که ثابت میرایی برابر فرکانس نشدید گردد و یا:

$$\frac{A}{2} = \omega_0 \rightarrow \frac{\alpha + \frac{13}{2}}{2} = \sqrt{6} \rightarrow \alpha = -1/6$$

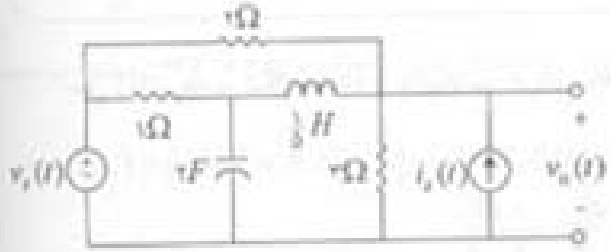
و برای اینکه پاسخ نوسانی داشته باشیم باید ثابت میرایی برابر صفر گردد و این امکان پذیر می باشد و α متناظر با آن بصورت زیر حاصل می شود.

$$A = 0 \rightarrow \alpha + \frac{13}{2} = 0 \rightarrow \alpha = -6/5$$

مسئله ۵۵

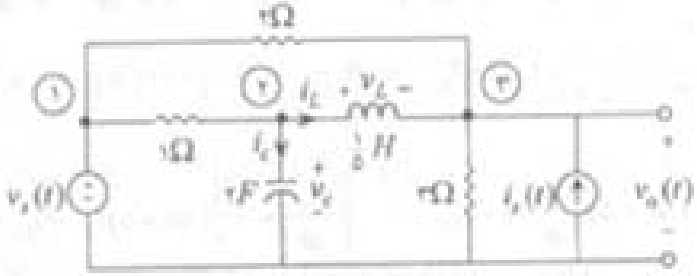
الف- معادلات حالت را بنویسید.

ب- v_0 را برحسب متغیر های حالت بیان کنید.



شکل مسئله ۵۵

حل : با انتخاب ولتاژ خازن و جریان سلف به عنوان متغیر های حالت داریم.



$$v_1 = v_s \ , \ v_2 = v_c \ , \ v_3 = v_c - v_L = v_c - \frac{1}{5}\frac{di_L}{dt}$$

$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow -i_L + \frac{v_c - \frac{1}{5}\frac{di_L}{dt}}{2} + i_s + \frac{v_c - \frac{1}{5}\frac{di_L}{dt} - v_s}{2} = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{di_L}{dt} = -6i_L + 5v_c - 6i_s - 3v_s$$

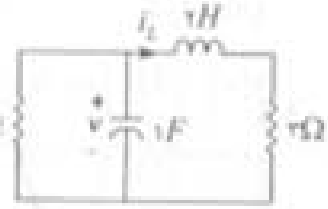
KCL برای گره ② $\rightarrow \quad \frac{v_c - v_s}{1} + 2\frac{dv_c}{dt} + i_L = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dv_c}{dt} = -\frac{1}{2}i_L - \frac{1}{2}v_c + \frac{1}{2}v_s$

پ ـ با نوشتن KVL برای حلقه شامل خازن، سلف و v_o داریم

$$-v_c + \frac{1}{5}\frac{di_L}{dt} + v_o = 0 \rightarrow \quad -v_c + \frac{1}{5}\left(-6i_L + 5v_c - 6i_s - 3v_s\right) + v_o = 0 \quad \rightarrow v_o = \frac{6}{5}i_L + \frac{6}{5}i_s + \frac{3}{5}v_s$$

مسئله ۵۶

مسیر فضای حالت را برای $v_c(0) = i_L(0) = 1$ و $\Delta t = 0/2$ ثانیه رسم کنید.



شکل مسئله ۵۶

حل:

$$\rightarrow \begin{cases} -v + 2\frac{di_L}{dt} + 3i_L = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{v}{2} - \frac{3}{2}i_L \\ \frac{v}{2} + i_L + \frac{dv}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{2} - i_L \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0/5 & -1 \\ 0/5 & -1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i_L \end{bmatrix}$$

$$\dot{X}(t) = AX(t) \quad , \quad \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} -0/5 & -1 \\ 0/5 & -1/5 \end{bmatrix} \quad , \quad X(t) = \begin{bmatrix} v \\ i_L \end{bmatrix}$$

$$X\left[(K+1)\Delta t\right] \approx X(K\Delta t) + AX(K\Delta t)\Delta t \quad , \quad (K = 0, 1, 2, \ldots, N) = (I + \Delta t A)X(K\Delta t)$$

$$X(0/2K + 0/2) \approx \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0/2\begin{bmatrix} -0/5 & -1 \\ 0/5 & -1/5 \end{bmatrix}\right)X(0/2K) \approx \begin{bmatrix} 0/9 & -0/2 \\ 0/1 & 0/7 \end{bmatrix}X(0/2K)$$

$$X = \begin{bmatrix} v \\ i_L \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} v(0/2K + 0/2) \\ i_L(0/2K + 0/2) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0/9 & -0/2 \\ 0/1 & 0/7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v(0/2K) \\ i_L(0/2K) \end{bmatrix}$$

$$K = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} v(0/2) \\ i_L(0/2) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0/9 & -0/2 \\ 0/1 & 0/7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/7 \\ 0/8 \end{bmatrix}$$

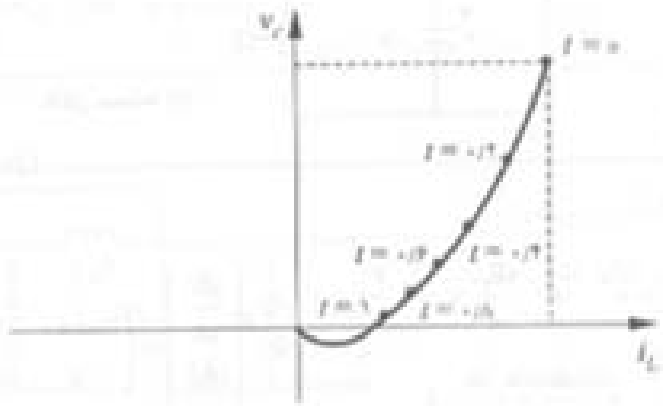
$$K=۱ \rightarrow \begin{bmatrix} v(۰/۴) \\ i_L(۰/۴) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۹ & -۰/۲ \\ ۰/۱ & ۰/۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰/۷ \\ ۰/۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۴۷ \\ ۰/۶۳ \end{bmatrix}$$

$$K=۲ \rightarrow \begin{bmatrix} v(۰/۶) \\ i_L(۰/۶) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۹ & -۰/۲ \\ ۰/۱ & ۰/۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰/۴۷ \\ ۰/۶۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۳ \\ ۰/۳۹ \end{bmatrix}$$

$$K=۳ \rightarrow \begin{bmatrix} v(۰/۸) \\ i_L(۰/۸) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۹ & -۰/۲ \\ ۰/۱ & ۰/۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰/۳ \\ ۰/۳۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۱۹ \\ ۰/۲۵ \end{bmatrix}$$

$$K=۴ \rightarrow \begin{bmatrix} v(۱) \\ i_L(۱) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۹ & -۰/۲ \\ ۰/۱ & ۰/۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰/۱۹ \\ ۰/۲۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۱۲ \\ ۰/۱۵ \end{bmatrix}$$

و اگر به همین ترتیب ادامه دهیم به حالت دایمی مدار می رسیم یعنی $\begin{bmatrix} v(\infty) \\ i_L(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ که در مسیرفضای حالت رسم شده در نظر گرفته شده است.



مسئله ۵۷

با شروع از حالت اولیه $I_0=۱$ و $V_0=۲$ مسیر فضای حالت را با فرض $\Delta t=۰/۱$ رسم کنید.

$(I_R=-v_R+v_R')$

شکل مسئله ۵۷

حل : با توجه به شکل مسئله داریم

$$v_L=v_R=V_0 \rightarrow I_R=-V_0+V_0' \quad , \quad \frac{dI_0}{dt}=v_R=V_0$$

KCL برای گره (A) $\rightarrow \quad -V_a + V_a^3 + \frac{dV_a}{dt} + I_a = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dV_a}{dt} = V_a - V_a^3 - I_a$

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} V_a \\ I_a \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \frac{d\,X_1(t)}{dt} = f_1(V_a, I_a) = \begin{bmatrix} V_a - V_a^3 - I_a \\ V_a \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \frac{X_1((K+1)\Delta t) - X_1(K\Delta t)}{\Delta t} = \begin{bmatrix} V_a - V_a^3 - I_a \\ V_a \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad X_1[(K+1)\Delta t] = \Delta t \begin{bmatrix} V_a(K\Delta t) - V_a^3(K\Delta t) - I_a(K\Delta t) \\ V_a(K\Delta t) \end{bmatrix} + X_1(K\Delta t)$$

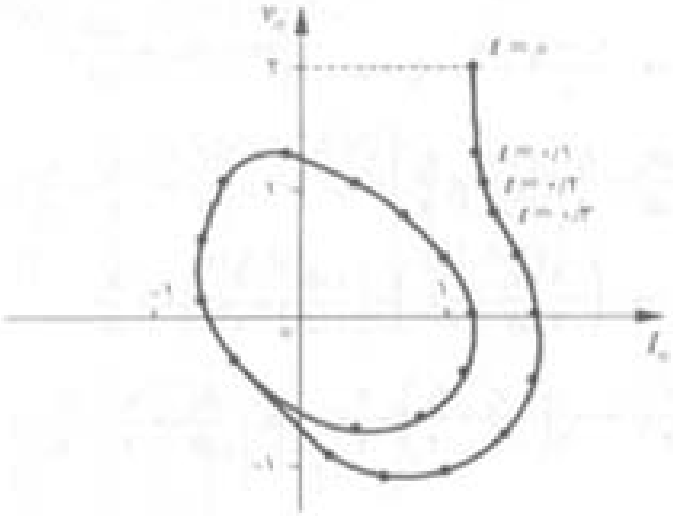
$$\rightarrow \quad \begin{bmatrix} V_a(0.1K + 0.1) \\ I_a(0.1K + 0.1) \end{bmatrix} = 0.1 \begin{bmatrix} V_a(K\Delta t) - V_a^3(K\Delta t) - I_a(K\Delta t) \\ V_a(K\Delta t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_a(0.1K) \\ I_a(0.1K) \end{bmatrix}$$

$$K = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} V_a(0.1) \\ I_a(0.1) \end{bmatrix} = 0.1 \begin{bmatrix} 2 - 2^3 - 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

$$K = 1 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} V_a(0.2) \\ I_a(0.2) \end{bmatrix} = 0.1 \begin{bmatrix} 1.3 - (1.3)^3 - 1.2 \\ 1.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.3 \\ 1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.09 \\ 1.33 \end{bmatrix}$$

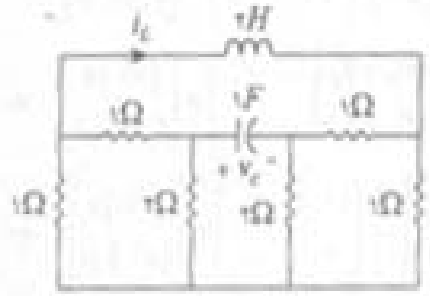
$$K = 2 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} V_a(0.3) \\ I_a(0.3) \end{bmatrix} = 0.1 \begin{bmatrix} 1.09 - (1.09)^3 - 1.33 \\ 1.09 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.09 \\ 1.33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.94 \\ 1.44 \end{bmatrix}$$

همین ترتیب نقاط دیگر را بدست خواهیم آورد و مسیر فضای حالت را رسم می کنیم.



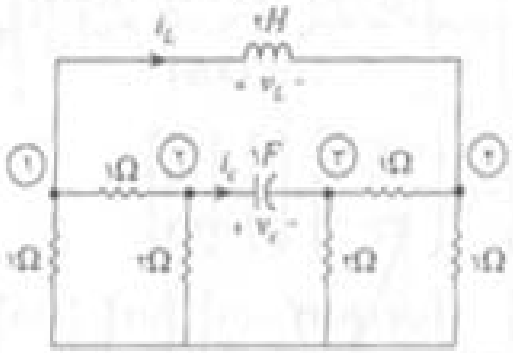
مسئله ۵۸

معادلات حالت را بنویسید.



شکل مسئله ۵۸

حل : با انتخاب ولتاژ خازن و جریان سلف به عنوان متغیر های حالت داریم.



$$\begin{cases} \text{KCL برای گره ۱} \rightarrow \dfrac{v_1}{1}+\dfrac{v_1-v_2}{1}+i_L=0 \\ \text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \dfrac{v_2-v_1}{1}+\dfrac{v_2}{2}+i_L=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2v_1-v_2=-i_L \\ 2v_1-3v_2=\dfrac{2dv_c}{dt} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_1=-\dfrac{1}{2}\dfrac{dv_c}{dt}-\dfrac{3}{2}i_L \\ v_2=-\dfrac{dv_c}{dt}-\dfrac{i_L}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{KCL برای گره ۳} \rightarrow \dfrac{v_3}{1}+\dfrac{v_3-v_4}{1}-i_L=0 \\ \text{KCL برای گره ۴} \rightarrow \dfrac{v_4-v_3}{1}+\dfrac{v_4}{2}-i_L=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2v_3-v_4=i_L \\ 2v_3-3v_4=\dfrac{-dv_c}{dt} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_3=\dfrac{dv_c}{dt}+\dfrac{1}{2}i_L \\ v_4=\dfrac{1}{2}\dfrac{dv_c}{dt}+\dfrac{3}{2}i_L \end{cases}$$

$$v_2-v_4=v_c \rightarrow -\frac{dv_c}{dt}-\frac{i_L}{2}-\left(\frac{dv_c}{dt}+\frac{i_L}{2}\right)=v_c \rightarrow \frac{dv_c}{dt}=-\frac{v_c}{2}-\frac{i_L}{2}$$

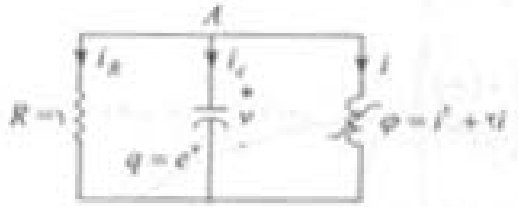
$$v_1-v_3=v_L=2\frac{di_L}{dt} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt}-\frac{3}{2}i_L\right)-\left(\frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt}+\frac{3}{2}i_L\right)=2\frac{di_L}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{di_L}{dt}=-\frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt}-\frac{3}{2}i_L=-\frac{1}{2}\left(-\frac{v_c}{2}-\frac{i_L}{2}\right)-\frac{3}{2}i_L \rightarrow \frac{di_L}{dt}=\frac{v_c}{4}-\frac{i_L}{2}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{dv_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

مسئله ۵۹

مسیر فضای حالت را رسم کنید. ($v_C(0) = i_L(0) = 1$ و $\Delta t = 0/1$)



شکل مسئله ۵۹

حل : ولتاژ خازن و جریان سلف را به عنوان متغیرهای حالت بر می گزینیم. با توجه به شکل مسئله داریم.

KCL برای گره (A) $\rightarrow i_R + i_C + i = 0 \rightarrow \frac{v}{1} + \frac{dq}{dt} + i = 0 \rightarrow v + e^v \frac{dv}{dt} + i = 0$

$$\rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{v+i}{e^v} \qquad U_L = v \rightarrow \frac{d\phi}{dt} = v \rightarrow (2i+2)\frac{di}{dt} = v \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{v}{2i+2}$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} \rightarrow \frac{dX(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{v+i}{e^v} \\ \frac{v}{2i+2} \end{bmatrix} \rightarrow \frac{X((K+1)\Delta t) - X(K\Delta t)}{\Delta t} \approx \begin{bmatrix} -\frac{v+i}{e^v} \\ \frac{v}{2i+2} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow X((K+1)\Delta t) \approx \begin{bmatrix} -\frac{v+i}{e^v} \\ \frac{v}{2i+2} \end{bmatrix} + X(K\Delta t)$$

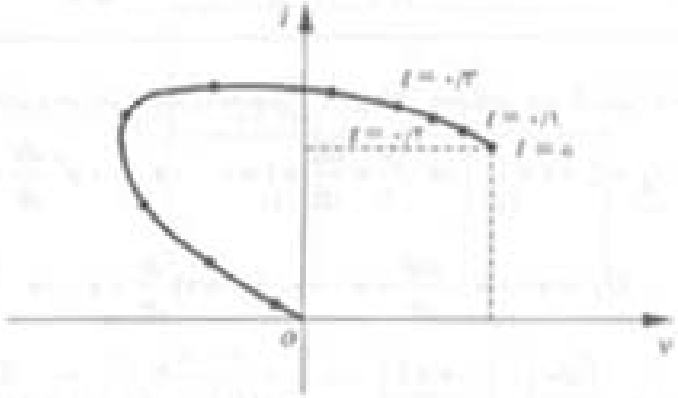
$$\rightarrow \begin{bmatrix} v(0/1K + 0/1) \\ i(0/1K + 0/1) \end{bmatrix} \approx 0/1 \begin{bmatrix} -\frac{v(K\Delta t) + i(K\Delta t)}{e^{v(K\Delta t)}} \\ \frac{v(K\Delta t)}{2i(K\Delta t) + 2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v(0/1K) \\ i(0/1K) \end{bmatrix}$$

$$K = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} v(0/1) \\ i(0/1) \end{bmatrix} \approx 0/1 \begin{bmatrix} -\frac{1+1}{e^1} \\ \frac{1}{2+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/93 \\ 1/02 \end{bmatrix}$$

$$K=1 \rightarrow \begin{bmatrix} v(0/2) \\ i(0/2) \end{bmatrix} \approx 0/1 \begin{bmatrix} -\dfrac{0/93+1/02}{e^{0/92}} \\ \dfrac{0/93}{2(1/02)+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0/93 \\ 1/02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/85 \\ 1/05 \end{bmatrix}$$

$$K=2 \rightarrow \begin{bmatrix} v(0/3) \\ i(0/3) \end{bmatrix} \approx 0/1 \begin{bmatrix} -\dfrac{0/85+1/05}{e^{0/85}} \\ \dfrac{0/85}{2(1/05)+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0/85 \\ 1/05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/77 \\ 1/07 \end{bmatrix}$$

و اگر به همین صورت ادامه دهیم به حالت دایمی $\begin{bmatrix} v(\infty) \\ i_L(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ خواهیم رسید.



مسئله ۶۰

معادلات حالت را بنویسید و مسیر فضای حالت را برای شرایط اولیه زیر رسم کنید.

الف- $v_C(0)=2$ و $i_L(0)=0$

ب- $v_C(0)=2$ و $i_L(0)=2$

سعی کنید این مسئله را با کمک کامپیوتر حل کنید و مسیر فضای حالت را طوری رسم کنید که تمام مشخصه های آن دیده شوند.

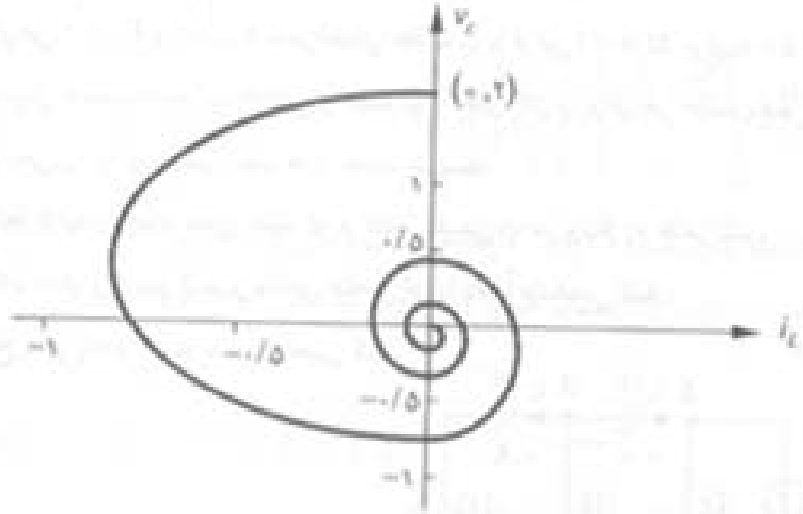
$$v_R = i_R + \frac{1}{2} i_R^2$$

شکل مسئله ۶۰

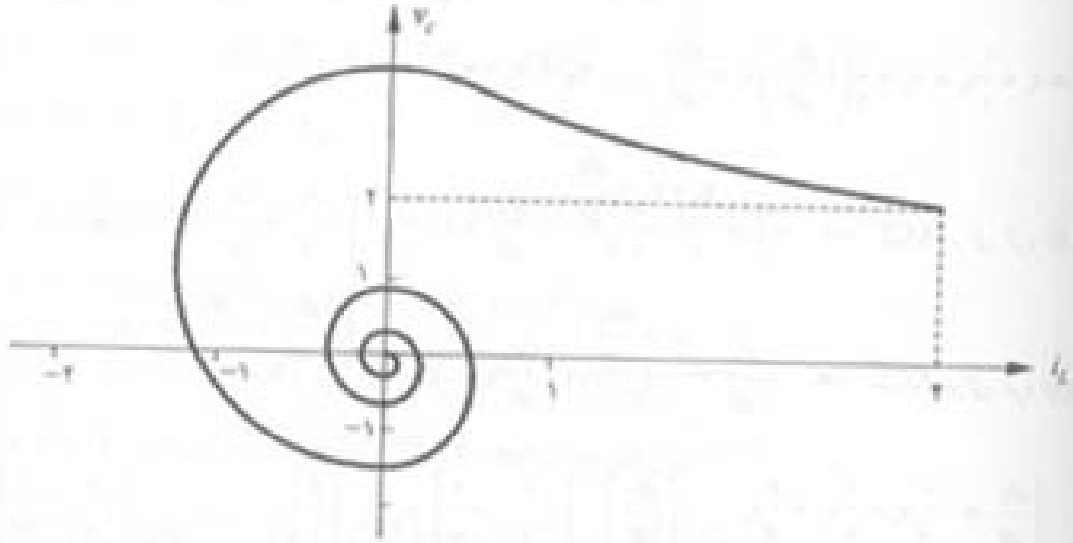
حل : الف ـ با انتخاب جریان خازن و ولتاژ سلف به عنوان متغیرهای حالت داریم

$$\begin{cases} \text{برای حلقه مدار } KVL \rightarrow \quad v_C + \dfrac{di_L}{dt} + i_R + \dfrac{1}{3} i_R^2 = 0 \\ i_R = i_C = i_L \rightarrow \quad i_C = i_L \rightarrow \quad \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_C}{dt} = i_L \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{di_L}{dt} = -v_C - i_L - \dfrac{1}{3} i_L^2 \\ \dfrac{dv_C}{dt} = 2 i_L \end{cases}$$

که با درنظر گرفتن مقادیر اولیه $v_C(0) = 2$ و $i_L(0) = 0$ و با نقطه یابی مسیر فضای حالت بصورت زیر رسم خواهد شد



ب ـ با توجه به دستگاه بدست آمده در قسمت (الف) و به ازای مقادیر اولیه $v_C(0) = 2$ و $i_L(0) = 2$ به روش تقریبی و با نقطه یابی مسیر فضای حالت بصورت زیر بدست خواهد آمد.



مسئله ۶۱

الف- معادلات حالت را برحسب متغیر های حالت v_1 و v_2 نوشته وآن را به شکل ماتریسی در آورید ماتریس A را مشخص کنید.

ب- مقادیر ویژه و بردار های ویژه ماتریس A را تعیین کنید.

پ- با فرض $v_1(0) = 1V$ و $v_2(0) = 1V$ پاسخ ورودی صفررا حساب کنید. و از روی آن ماتریس e^{At} را برای ماتریس A بدست آمده در قسمت الف تعیین کنید.

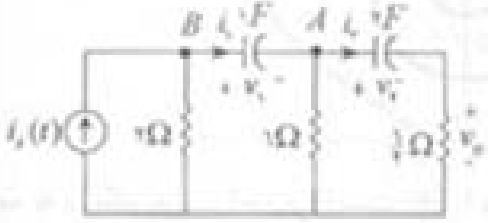
ت- با فرض $v_1 = 2V$ و $v_2 = 3V$ مسیرفضای حالت را با فرض $\Delta t = 0/2$ برای $t = 0$ تا $t = 1$ حساب کنید و سپس با مقایسه جواب با نتایج قسمت پ خطای کار را برای هر حالت دقیقاً تعیین کنید.

ث- خروجی v_o را بر حسب متغیر های حالت بنویسید.

ج- شرایط اولیه را چنان تعیین کنید که فرکانس طبیعی۱- در ولتاژ v_o ظاهر نشود.

چ- دوگان مدار را رسم کنید و مقادیر عناصر آن را دقیقاً مشخص کنید.

ح- پاسخ های پله و ضربه مدار را تعیین کنید.



شکل مسئله ۶۱

حل : الف ـ با توجه به شکل مسئله داریم.

$$v_B = v_1 + \frac{1}{2} i_1 = v_1 + \frac{1}{2}\left(2\frac{dv_1}{dt}\right) v_1 + \frac{dv_1}{dt} \quad , \quad v_B = v_1 + v_2 = v_1 + v_2 + \frac{dv_2}{dt}$$

$$\begin{cases} \text{KCL برای گره } B \rightarrow -i_s + \dfrac{v_1 + v_2 + \frac{dv_2}{dt}}{2} + \dfrac{dv_1}{dt} = 0 \\ \text{KCL برای گره } A \rightarrow -\dfrac{dv_2}{dt} + \dfrac{v_1 + \frac{dv_2}{dt}}{1} + 2\dfrac{dv_2}{dt} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\dfrac{dv_1}{dt} + \dfrac{dv_2}{dt} = -v_1 - v_2 + i_s \\ -\dfrac{dv_1}{dt} + 3\dfrac{dv_2}{dt} = -v_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_1}{dt} = -\dfrac{3}{7}v_1 - \dfrac{2}{7}v_2 + \dfrac{6}{7}i_s \\ \dfrac{dv_2}{dt} = -\dfrac{1}{7}v_1 - \dfrac{3}{7}v_2 + \dfrac{2}{7}i_s \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{dv_1}{dt} \\ \dfrac{dv_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{7} & -\dfrac{2}{7} \\ -\dfrac{1}{7} & -\dfrac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{6}{7} \\ \dfrac{2}{7} \end{bmatrix} i_s \rightarrow A = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{7} & -\dfrac{1}{7} \\ -\dfrac{1}{7} & -\dfrac{3}{7} \end{bmatrix}$$

پ ـ مقادیر ویژه A جوابهای معادله $|SI - A| = 0$ می باشند.

$$SI - A = S\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & s+\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow |SI - A| = \begin{bmatrix} s+\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & s+\frac{3}{7} \end{bmatrix} = s^2 + \frac{6}{7}s + \frac{1}{7} = 0 \quad \rightarrow \quad s = -\frac{3}{7} \pm \frac{\sqrt{2}}{7}$$

بنابراین بردارهای ویژه $\begin{bmatrix} -\frac{3}{7}+\frac{\sqrt{2}}{7} \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{7}+\frac{\sqrt{2}}{7} \end{bmatrix}$ خواهند بود.

پ ـ می دانیم که جوابهای معادله $|SI - A| = 0$ فرکانسهای طبیعی مدار نیز می باشند و از آنجا که پاسخ ورودی صفر را می خواهیم لذا داشتن فرکانسهای طبیعی و شرایط اولیه کافی خواهد بود.

$$s = \frac{-3 \pm \sqrt{2}}{7} = -0/22, -0/62$$

$$\rightarrow v_1(t) = K_1 e^{-0/22t} + K_2 e^{-0/62t}, \; v_2(t) = K_3 e^{-0/22t} + K_4 e^{-0/62t}$$

با توجه به مقادیر اولیه داده شده و معادلات حالت داریم:

$$\begin{cases} v_1(0) = V_{01} \rightarrow K_1 + K_2 = V_{01} \\ \frac{dv_1(0)}{dt} = -\frac{3}{7}V_{01} - \frac{2}{7}V_{02} \rightarrow -0/22K_1 - 0/62K_2 = -\frac{3}{7}V_{01} - \frac{2}{7}V_{02} \end{cases}$$

$$\rightarrow K_1 = 0/5V_{01} - 0/71V_{02} \quad , \quad K_2 = 0/5V_{01} - 0/71V_{02}$$

$$\begin{cases} v_2(0) = V_{02} \rightarrow K_3 + K_4 = V_{02} \\ \frac{dv_2(0)}{dt} = -\frac{1}{7}V_{01} - \frac{3}{7}V_{02} \rightarrow -0/22K_3 - 0/62K_4 = -\frac{1}{7}V_{01} - \frac{3}{7}V_{02} \end{cases}$$

$$\rightarrow K_3 = -0/35V_{01} + 0/5V_{02} \; , \; K_4 = 0/35V_{01} + 0/5V_{02}$$

$$\rightarrow \begin{cases} v_1(t) = (0/5V_{01} - 0/71V_{02})e^{-0/22t} + (0/5V_{01} + 0/71V_{02})e^{-0/62t} \\ v_2(t) = (-0/35V_{01} + 0/5V_{02})e^{-0/22t} + (0/35V_{01} + 0/5V_{02})e^{-0/62t} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/5(e^{-0/22t} + e^{-0/62t}) & 0/71(e^{-0/22t} + e^{-0/62t}) \\ 0/35(e^{-0/62t} - e^{-0/22t}) & 0/5(e^{-0/22t} + e^{-0/62t}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{01} \\ V_{02} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\ e^{At}=\begin{bmatrix} ۰/۵(e^{-۰/۳۲t}+e^{-۰/۹۲t}) & ۰/۷۷(e^{-۰/۳۲t}-e^{-۰/۹۲t}) \\ ۰/۳۵(e^{-۰/۳۲t}-e^{-۰/۹۲t}) & ۰/۵(e^{-۰/۳۲t}+e^{-۰/۹۲t}) \end{bmatrix}$$

ت ـ می خواهیم مسیر فضای حالت را با روش تقریبی و به ازای ورودی صفر بدست آوریم.

$$X(t)=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\ \rightarrow\ \frac{dX(t)}{dt}=\begin{bmatrix} \frac{dv_1}{dt} \\ \frac{dv_2}{dt} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{۳}{۷} & -\frac{۲}{۷} \\ -\frac{۱}{۷} & -\frac{۳}{۷} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\ \frac{X((K+۱)\Delta t)-X(K\Delta t)}{\Delta t}\approx\begin{bmatrix} -\frac{۳}{۷} & -\frac{۲}{۷} \\ -\frac{۱}{۷} & -\frac{۳}{۷} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\ \begin{bmatrix} v_1(۰/۲(K+۱)) \\ v_2(۰/۲(K+۱)) \end{bmatrix}\approx ۰/۲\begin{bmatrix} -\frac{۳}{۷} & -\frac{۲}{۷} \\ -\frac{۱}{۷} & -\frac{۳}{۷} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1(۰/۲K) \\ v_2(۰/۲K) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v_1(۰/۲K) \\ v_2(۰/۲K) \end{bmatrix}$$

$$K=۰\ \rightarrow\ \begin{bmatrix} v_1(۰/۲) \\ v_2(۰/۲) \end{bmatrix}\approx ۰/۲\begin{bmatrix} -\frac{۳}{۷} & -\frac{۲}{۷} \\ -\frac{۱}{۷} & -\frac{۳}{۷} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱/۶۷۵ \\ ۲/۶۸۶ \end{bmatrix}$$

$$K=۱\ \rightarrow\ \begin{bmatrix} v_1(۰/۴) \\ v_2(۰/۴) \end{bmatrix}\approx ۰/۲\begin{bmatrix} -\frac{۳}{۷} & -\frac{۲}{۷} \\ -\frac{۱}{۷} & -\frac{۳}{۷} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱/۶۷۵ \\ ۲/۶۸۶ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱/۶۷۵ \\ ۲/۶۸۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱/۳۶۲ \\ ۲/۴۰۸ \end{bmatrix}$$

$$K=۲\ \rightarrow\ \begin{bmatrix} v_1(۰/۶) \\ v_2(۰/۶) \end{bmatrix}\approx ۰/۲\begin{bmatrix} -\frac{۳}{۷} & -\frac{۲}{۷} \\ -\frac{۱}{۷} & -\frac{۳}{۷} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱/۳۶۲ \\ ۲/۴۰۸ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱/۳۶۲ \\ ۲/۴۰۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱/۱۰۷ \\ ۲/۱۶۳ \end{bmatrix}$$

$$K=۳\ \rightarrow\ \begin{bmatrix} v_1(۰/۸) \\ v_2(۰/۸) \end{bmatrix}\approx ۰/۲\begin{bmatrix} -\frac{۳}{۷} & -\frac{۲}{۷} \\ -\frac{۱}{۷} & -\frac{۳}{۷} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱/۱۰۷ \\ ۲/۱۶۳ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱/۱۰۷ \\ ۲/۱۶۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰/۸۸۸ \\ ۱/۹۴۶ \end{bmatrix}$$

$$K=۴\ \rightarrow\ \begin{bmatrix} v_1(۱) \\ v_2(۱) \end{bmatrix}\approx ۰/۲\begin{bmatrix} -\frac{۳}{۷} & -\frac{۲}{۷} \\ -\frac{۱}{۷} & -\frac{۳}{۷} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰/۸۸۸ \\ ۱/۹۴۶ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰/۸۸۸ \\ ۱/۹۴۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰/۷۰۹ \\ ۱/۷۵۴ \end{bmatrix}$$

مقدار دقیق $\begin{bmatrix} v_1(۰/۴) \\ v_2(۰/۴) \end{bmatrix}$ با توجه به رابطه بدست آمده در قسمت (ب) برابر است با:

$$\begin{bmatrix} v_1(۰/۴) \\ v_2(۰/۴) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰/۵(e^{-۰/۳۲}+e^{-۰/۱۲۴}) & ۰/۷۷(e^{-۰/۱۲۴}-e^{-۰/۳۲}) \\ ۰/۳۵(e^{-۰/۱۲۴}-e^{-۰/۳۲}) & ۰/۵(e^{-۰/۳۲}+e^{-۰/۱۲۴}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱/۶۶۷ \\ ۲/۷۰۲ \end{bmatrix}$$

پس در این حالت مقدار خطا برابر است با:

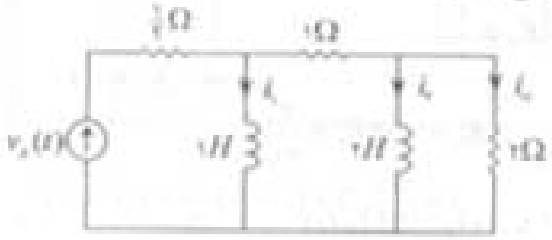
$$\rightarrow \begin{bmatrix} \Delta v_1(0/1) \\ \Delta v_2(0/1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/677 & -1/675 \\ 2/702 & -2/686 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/002 \\ 0/016 \end{bmatrix}$$

با روشی مشابه مقدار خطا در سایر حالت ها را نیز می توان محاسبه کرد که این کار بر عهده شما خواننده محترم گذاشته می شود.

ث ـ با توجه به شکل مسئله داریم:

$$v_o = \frac{1}{2}\left(2\frac{dv_1}{dt}\right) = \frac{dv_1}{dt} = -\frac{1}{7}v_1 - \frac{3}{7}v_2 + \frac{2}{7}i_s$$

ج ـ دوگان مدار بصورت زیر می باشد.



ح ـ با توجه به معادلات حالت بدست آمده در قسمت (الف) داریم.

$$v_o = \frac{1}{2}\left(2\frac{dv_1}{dt}\right) = Dv_1 \quad \rightarrow \quad v_1 = \frac{v_o}{D}$$

$$\frac{dv_2}{dt} = -\frac{3}{7}v_1 - \frac{2}{7}v_2 + \frac{6}{7}i_s \quad \rightarrow \quad Dv_2 = -\frac{3}{7}v_1 - \frac{2}{7}\left(\frac{v_o}{D}\right) + \frac{6}{7}i_s \quad \rightarrow \quad v_2 = \frac{6Di_s - 2v_o}{D(7D+3)}$$

$$\frac{dv_1}{dt} = -\frac{1}{7}v_1 - \frac{3}{7}v_2 + \frac{2}{7}i_s \quad \rightarrow \quad D\left(\frac{v_o}{D}\right) = -\frac{1}{7}\left(\frac{6Di_s - 2v_o}{D(7D+3)}\right) - \frac{3}{7}\left(\frac{v_o}{D}\right) + \frac{2}{7}i_s$$

$$\rightarrow \left(49D^2 + 42D + 7\right)v_o = \left(12D^2 + 15D\right)i_s \quad \rightarrow \quad 49\frac{d^2v_o}{dt^2} + 42\frac{dv_o}{dt} + 7v_o = 12\frac{d^2i_s}{dt^2} + 15\frac{di_s}{dt}$$

و در ادامه با جایگذاری $i_s(t) = u(t)$ پاسخ پله را محاسبه خواهیم کرد.

$$\rightarrow \quad 49\frac{d^2v_o}{dt^2} + 42\frac{dv_o}{dt} + 7v_o = 12\delta'(t) + 15\delta(t)$$

در $t = 0^-$ خازنها اتصال کوتاه و $i_s(0^-) = 1A$ می باشند بنابراین جریان گذرنده از مقاومت $\frac{1}{2}$ اهم برابر است با:

$$i_o(0^-) = \frac{1\,\|\,2}{1\,\|\,2 + \frac{1}{2}}1A = \frac{2}{7} \quad \rightarrow \quad v_o(0^-) = \frac{1}{2}i_o(0^-) = \frac{2}{7}$$

و با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+ داریم.

$$۲۹\frac{dv_o(0^+)}{dt}+۲۲\left(\frac{۲}{۷}\right)=۱۵ \quad \rightarrow \quad \frac{dv_o(0^+)}{dt}=\frac{۳}{۲۹}$$

می دانیم که برای $t>0$ ، $\delta^{\prime}(t)=\delta(t)=0$ می باشد پس معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر نوشت.

$$۲۹\frac{d^2v_o}{dt^2}+۲۲\frac{dv_o}{dt}+۷v_o=0 \quad , \quad v_o(0^+)=\frac{۲}{۷} \quad , \quad \frac{dv_o(0^+)}{dt}=\frac{۳}{۲۹}$$

معادله مشخصه : $۲۹s^2+۲۲s+۷=0 \quad \rightarrow \quad s=-۰/۲۳ \ , \ -۰/۶۲$

$$\rightarrow \quad v_o(t)=K_1e^{-۰/۲۳t}+K_2e^{-۰/۶۲t} \ , \ t>0$$

$$\begin{cases} v_o(0^+)=\frac{۲}{۷} \quad \rightarrow \quad K_1+K_2=\frac{۲}{۷} \\ \frac{dv_o(0^+)}{dt}=\frac{۳}{۲۹} \quad \rightarrow \quad -۰/۲۳K_1-۰/۶۲K_2=\frac{۳}{۲۹} \end{cases} \rightarrow \quad K_1=۰/۶۱ \quad , \quad K_2=-۰/۲۲$$

$$\rightarrow \quad v_o(t)=\left(۰/۶۱e^{-۰/۲۳t}-۰/۲۲e^{-۰/۶۲t}\right)u(t)$$

و با مشتق گیری از پاسخ پله، پاسخ ضربه را بصورت زیر بدست می آوریم.

$$h(t)=\frac{dv_o(t)}{dt}=\left((۰/۶۱)(-۰/۲۳)e^{-۰/۲۳t}+(۰/۲۲)(-۰/۶۲)e^{-۰/۶۲t}\right)u(t)$$

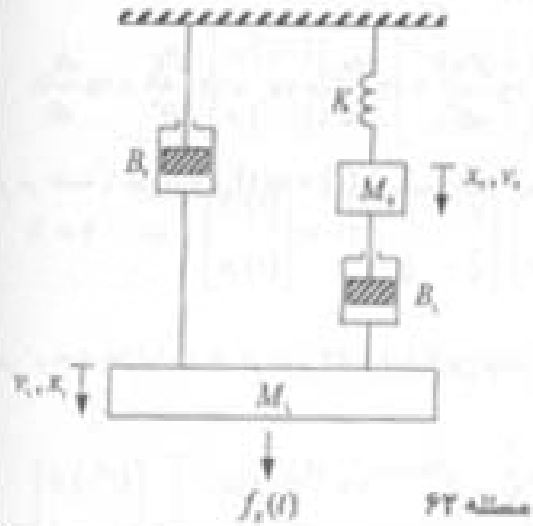
$$+\left(۰/۰۳e^{-۰/۲۳t}-۰/۲۲e^{-۰/۶۲t}\right)\delta(t)=\left(-۰/۱۴e^{-۰/۲۳t}+۰/۱۴e^{-۰/۶۲t}\right)+۰/۲۹\delta(t)$$

مسئله ۶۲

الف- معادلات حرکت را به صورت دو معادله دیفرانسیلی (انتگرالی) بر حسب متغیر های v_1 و v_2 بنویسید.

ب- یک مدار الکتریکی رسم کنید که رفتار آن با رفتار سیستم مکانیکی فوق مشابه باشد.

معادلات این مدار را بنویسید و شباهتها را دقیقاً نشان دهید.



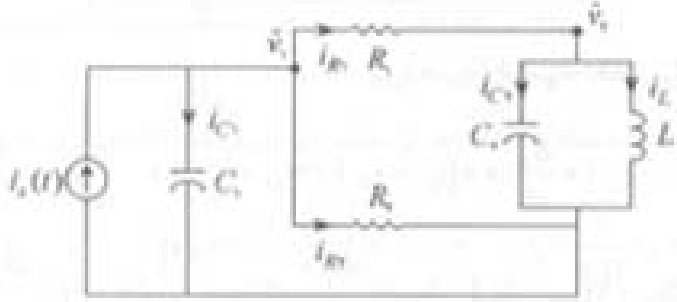
شکل مسئله ۶۲

حل : **الف** ـ با توجه به شکل مسئله و با صرفه نظر از نیروی گرانش داریم:

$$f_{B_1} + f_{B_2} + f_{M_1} = f_s \quad \rightarrow \quad B_1(v_1 - v_2) + B_1(v_1 - 0) + M_1 \frac{dv_1}{dt} = f_s$$

$$f_{B_1} = f_{M_2} + f_K \quad \rightarrow \quad B_1(v_1 - v_2) = M_2 \frac{dv_2}{dt} + K \int (v_2 - 0)\,dt$$

ب ـ مدار مشابه بصورت زیر می باشد.



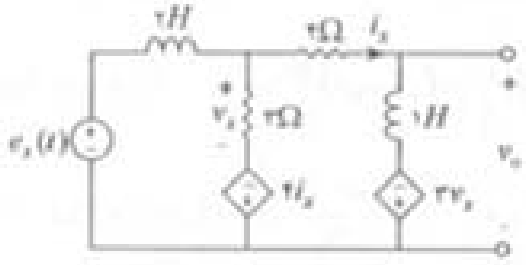
$$i_{R_1} + i_{R_2} + i_{C_1} = i_s \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R_1}(\hat{v}_1 - \hat{v}_2) + \frac{1}{R_2}(\hat{v}_1 - 0) + C_1 \frac{d\hat{v}_1}{dt} = i_s$$

$$i_{R_1} = i_{C_2} + i_L \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R_1}(\hat{v}_1 - \hat{v}_2) = C_2 \frac{d\hat{v}_2}{dt} + \frac{1}{L} \int (\hat{v}_2 - 0)\,dt$$

از آنجا که معادلات بدست آمده برای متغیرهای (v_1, v_2) و $(\hat{v}_1, \hat{v}_2)$ یکسان است لذا دو سیستم فوق معادل اند که شباهتها بصورت زیراند.

سیستم مکانیکی	سیستم الکتریکی
سرعت v	ولتاژ $\hat{v}$
نیرو f	جریان i
ضریب میرایی B	رسانایی $\frac{1}{R}$
جرم M	خازن C
فنر K	سلف $\frac{1}{L}$

مسئله ۶۳

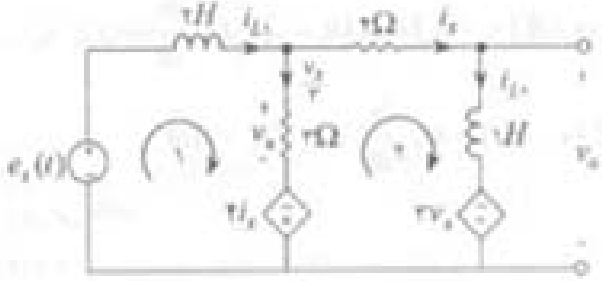


الف- معادلات حالت را نوشته و v_o را بر حسب متغیرهای حالت بیان کنید.

ب- معادله دیفرانسیل v_o بر حسب v_s را بدست آورید.

شکل مسئله ۶۳

حل : **الف** ـ با انتخاب جریان سلفها به عنوان متغیرهای حالت و با توجه به شکل زیر داریم.



$$i_s = i_{L_2} \ , \ \frac{v_s}{2} = i_{L_1} - i_s \quad \rightarrow \quad v_s = 2\left(i_{L_1} - i_{L_2}\right)$$

$$KVL \text{ برای مش ۱} \quad \rightarrow \quad -e_s + 2\frac{di_{L_1}}{dt} + 2\left(i_{L_1} - i_{L_2}\right) - 4i_{L_1} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{di_{L_1}}{dt} = -\frac{3}{2}i_{L_1} + \frac{7}{2}i_{L_2} + \frac{1}{2}e_s$$

$$KVL \text{ برای مش ۲} \quad \rightarrow \quad 4i_{L_2} - 2\left(i_{L_1} - i_{L_2}\right) + 4i_{L_2} + \frac{di_{L_2}}{dt} - 9\left(i_{L_1} - i_{L_2}\right) = 0 \rightarrow \quad \frac{di_{L_2}}{dt} = 14i_{L_1} - 20i_{L_2}$$

$$v_o = \frac{di_{L_2}}{dt} - 3v_s = 14i_{L_1} - 20i_{L_2} - 9\left(i_{L_1} - i_{L_2}\right) = 5i_{L_1} - 11i_{L_2}$$

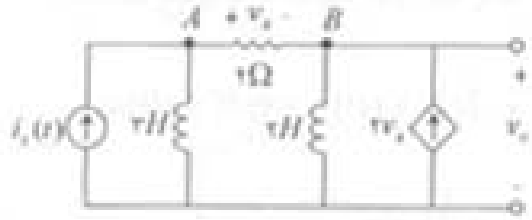
ب ـ با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل و با بکارگیری معادلات حالت داریم.

$$\begin{cases} \frac{di_{L_1}}{dt} = -\frac{3}{2}i_{L_1} + \frac{7}{2}i_{L_2} + \frac{1}{2}e_s \quad \rightarrow \quad (2D+3)i_{L_1} - 7i_{L_2} = e_s \\ \frac{di_{L_2}}{dt} = 14i_{L_1} - 20i_{L_2} \quad \rightarrow \quad 14i_{L_1} - (D+20)i_{L_2} = 0 \\ v_o = 5i_{L_1} - 11i_{L_2} \quad \rightarrow \quad 5i_{L_1} - 11i_{L_2} - v_o = 0 \end{cases}$$

$$v_o = \frac{\begin{vmatrix} 2D+3 & -7 & e_s \\ 14 & -(D+20) & 0 \\ 5 & -11 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2D+3 & -7 & 0 \\ 14 & -(D+20) & 0 \\ 5 & 11 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{5D-72}{2D^2+43D-14}e_s \rightarrow 2\frac{d^2v_o}{dt^2} + 43\frac{dv_o}{dt} - 14v_o = 5\frac{de_s}{dt} - 72e_s$$

مسئله ۶۴

معادله دیفرانسیل v_o بر حسب i_s را بدست آورید.



شکل مسئله ۶۴

حل: با توجه به شکل مسئله و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات انتگرال- دیفرانسیل داریم.

$$\text{KCL برای گره } A \rightarrow -i_s + \frac{1}{3}\int v_A dt + \frac{v_A - v_o}{2} = 0 \rightarrow -i_s + \frac{1}{3D}v_A + \frac{v_A - v_o}{2} = 0$$

$$\rightarrow v_A = \frac{Dv_o + 3Di_s}{D+1} \quad , \quad v_x = v_A - v_B = \frac{Dv_o + 3Di_s}{D+1} - v_o = \frac{-v_o + 3Di_s}{D+1}$$

$$\text{KCL برای گره } B \rightarrow \frac{1}{2}\int v_o dt - 2v_x - \frac{v_B}{2} = 0 \rightarrow \frac{1}{2D}v_o - \frac{9}{2}\left(\frac{-v_o + 3Di_s}{D+1}\right) = 0$$

$$(11D+2)v_o = 27D^2 i_s \rightarrow 11\frac{dv_o}{dt} + 2v_o = 27\frac{d^2 i_s}{dt^2}$$

مسئله ۶۵

معادله دیفرانسیلی که ارتباط e_s و v_o را توصیف می کند بدست آورید. چرا با وجود یک سلف و یک خازن معادله دیفرانسیل از مرتبه اول است.

شکل مسئله ۶۵

حل: با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات انتگرال- دیفرانسیل داریم.

$$\text{KCL برای گره } A \rightarrow 2\frac{d}{dt}(v_A - e_s) + \frac{v_A}{\frac{3}{2}}\int(v_A - v_o)dt = 0$$

$$\rightarrow 2D(v_A - e_s) + 2v_A\frac{v_A - v_o}{D} = 0 \rightarrow v_A = \frac{2D^2 e_s + v_o}{2D^2 + 2D + 1}$$

$$v_x = e_x - v_L = e_x - \frac{2D^2 e_x + v_o}{2D^2 + 2D + 1} = \frac{(2D+1)e_x - v_o}{2D^2 + 2D + 1}$$

KCL برای گره (B) $\rightarrow \int (v_x - v_o)dt - 2v_o = 0$

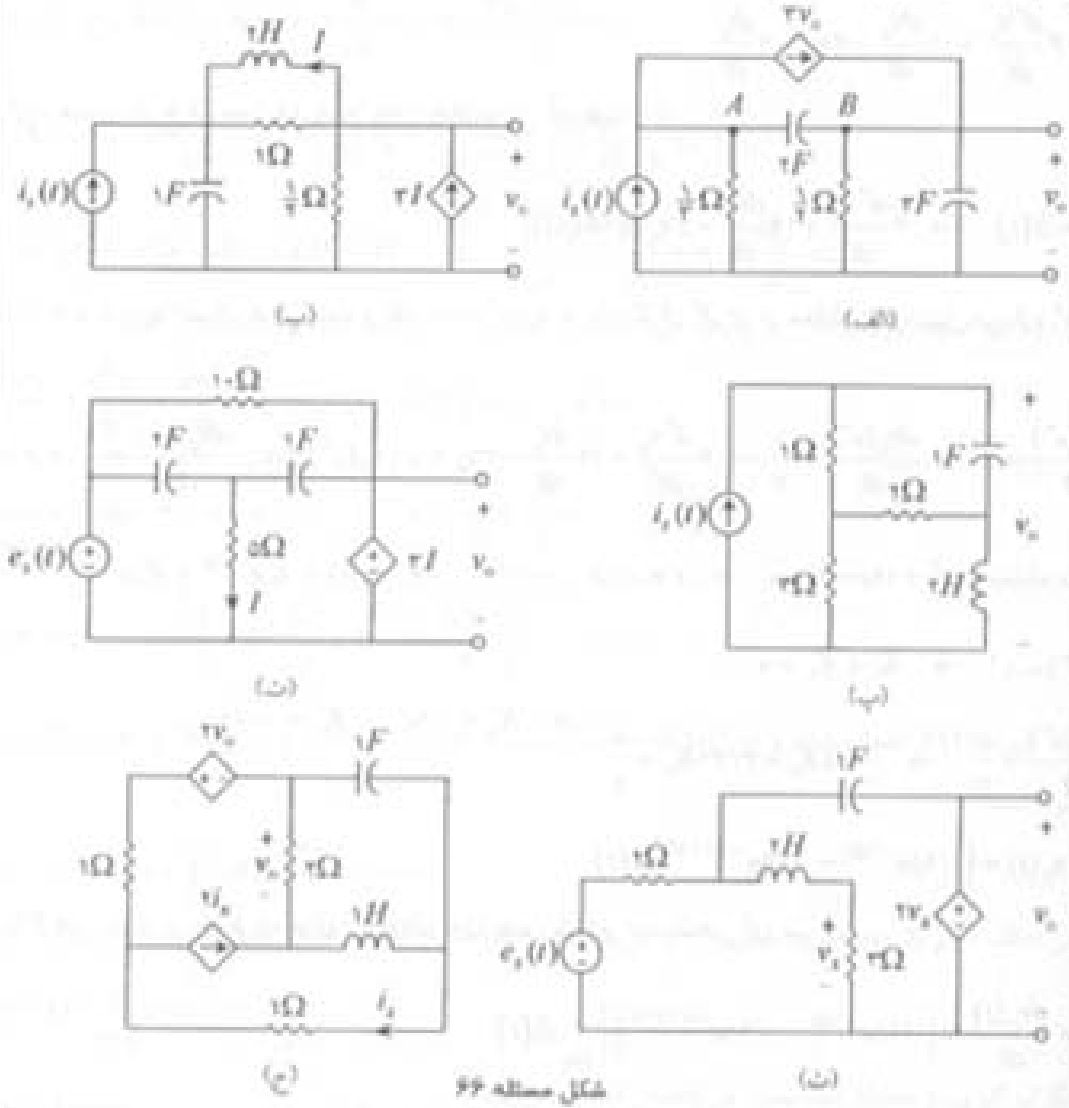
$$\frac{1}{D}\left(v_o - \frac{2D^2 e_x + v_o}{2D^2 + 2D + 1}\right) - 2\frac{(2D+1)e_x - v_o}{2D^2 + 2D + 1} = 0 \quad \rightarrow \quad (2D^2 + 2D)v_o = (7D^2 + 2D)e_x$$

$$\rightarrow \quad (2D + 2)v_o = (7D + 2)e_x \quad \rightarrow \quad 2\frac{dv_o}{dt} + 2v_o = 7\frac{de_x}{dt} + 2e_x$$

باتوجه به شکل مدارملاحظه می شود که جریان سلف برابر $-2v_o$ است و v_oولتاژ دو سرخازن می باشد. بنابراین ولتاژ خازن و جریان سلف به هم وابسته اند. پس انتخاب یکی از آنها به عنوان متغیر حالت کافی بوده و لذا مدار مرتبه اول است.

مسئله ۶۶

معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده خروجی v_o ورودی مدار های شکل مسئله ۶۶ و پاسخ ضربه هر یک را بدست آورید.



شکل مسئله ۶۶

حل : الف ـ با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم

$$KCL \text{ برای گره } B \rightarrow 3\frac{dv_o}{dt} + \frac{v_o}{\frac{1}{2}} + 2\frac{d(v_o - v_A)}{dt} - 3v_o = 0$$

$$\rightarrow 3Dv_o + 2v_o + 2D(v_o - v_A) - 3v_o = 0 \rightarrow v_A = \frac{5D-1}{2D}v_o$$

KCL برای گره ④ $\rightarrow \quad -i_s + 3v_o + \frac{v_s}{\frac{1}{2}} + 2\frac{d(v_s - v_o)}{dt} = 0$

$$\rightarrow \quad -i_s + 3v_o + 2\left(\frac{5D-1}{2D}v_o\right) + 2D\left(\frac{5D-1}{2D}v_o - v_o\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \left(6D^2 + 19D - 3\right)v_o = 2Di_s$$

$$\rightarrow \quad 6\frac{d^2v_o}{dt^2} + 19\frac{dv_o}{dt} - 3v_o = 2\frac{di_s}{dt}$$

برای محاسبه پاسخ ضربه، ابتدا پاسخ پله را بدست می آوریم.

$$i_s(t) = u(t) \quad \rightarrow \quad 6\frac{d^2v_o}{dt^2} + 19\frac{dv_o}{dt} - 3v_o = 2\delta(t)$$

در $t = 0^-$ خازنها اتصال کوتاه بوده و لذا $v_o(0^-) = 0$ و با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در بازه 0^- تا 0^+ داریم:

$$6\frac{dv_o(0^+)}{dt} = 2 \rightarrow \frac{dv_o(0^+)}{dt} = \frac{1}{3} \rightarrow 6\frac{d^2v_o}{dt^2} + 19\frac{dv_o}{dt} - 3v_o = 0,\ v_o(0^+) = 0,\ \frac{dv_o(0^+)}{dt} = \frac{1}{3},\ t > 0$$

معادله مشخصه: $6s^2 + 19s - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad s = 0.15,\ -3.33 \quad \rightarrow \quad v_o(t) = K_1e^{0.15t} + K_2e^{-3.33t}$

$$\begin{cases} v_o(0^+) = 0 \quad \rightarrow \quad K_1 + K_2 = 0 \\ \dfrac{dv_o(0^+)}{dt} = \dfrac{1}{3} \quad \rightarrow \quad 0.15K_1 - 3.33K_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases} \rightarrow \quad K_1 = 0.95 \ ,\ K_2 = -0.95$$

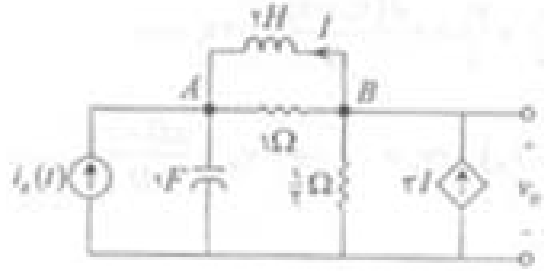
$$\rightarrow \quad v_o(t) = \left(0.95e^{0.15t} - 0.95e^{-3.33t}\right)u(t)$$

و با گرفتن مشتق از پاسخ پله فوق پاسخ ضربه را بصورت زیر بدست می آوریم.

$$h(t) = \frac{dv_o(t)}{dt} = \left(0.95e^{0.15t} - 0.95e^{-3.33t}\right)\Big|_{t=0}\delta(t)$$

$$+\left((0.95)(0.15)e^{0.15t} - (0.95)(-3.33)e^{-3.33t}\right)u(t) \quad \rightarrow \quad h(t) = \left(0.142e^{0.15t} + 3.15e^{-3.33t}\right)u(t)$$

ب ـ با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات انتگرال دیفرانسیل داریم.



$$I = \frac{1}{2}\int (v_c - v_A)\,dt = \frac{1}{2D}(v_c - v_A)$$

KCL برای گره (B) $\rightarrow \frac{1}{2D}(v_c - v_A) - 2\left\{\frac{1}{2D}(v_c - v_A)\right\} + \frac{v_c - v_A}{1} + \frac{v_c}{\frac{1}{2}} = 0 \rightarrow v_A = \frac{2D-1}{D-1}v_c$

KCL برای گره (A) $\rightarrow -i_s + \frac{d}{dt}v_A - I + \frac{v_A - v_c}{1} = 0$

$$\rightarrow -i_s + D\frac{2D-1}{D-1}v_c - \frac{1}{2D}\left(v_c - \frac{2D-1}{D-1}v_c\right) + \frac{2D-1}{D-1}v_c - v_c = 0$$

$$\rightarrow \left(2D^2 + D + 1\right)v_c = (D-1)i_s \quad \rightarrow \quad 2\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \frac{dv_c}{dt} + v_c = \frac{di_s}{dt} - i_s$$

به ازای ورودی ضربه داریم

$$\rightarrow 2\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \frac{dv_c}{dt} + v_c = \delta'(t) - \delta(t) = 0 \quad , \quad t > 0$$

معادله مشخصه : $2s^2 + s + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad s = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}j$

$$\rightarrow v_c(t) = e^{-\frac{1}{4}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{7}}{4}t + B\sin\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) \quad , \quad t > 0$$

در $t = 0$ ضربه $\delta(t)$ اعمال شده و از آنجا که خازن اتصال کوتاه می باشد لذا جریان کاملاً از خازن گذشته و خواهیم داشت

$$v_c(0^+) = v(0^-) + \int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\,dt = 0 + 1 = 1$$

همچنین سلف مدار باز خواهد بود پس $I = 0$ می باشد و با استفاده از قاعده تقسیم ولتاژ داریم

$$v_o(0^+) = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}v_c(0^+) = \frac{1}{3}V$$

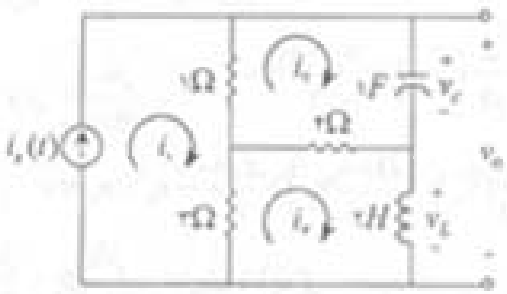
و با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+ داریم

$$2\frac{dv_c(0^+)}{dt} + \frac{1}{3} = -1 \quad \rightarrow \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = -\frac{2}{9}$$

$$\begin{cases} v_c(0^+) = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{3} \\ \frac{dv_c(0^+)}{dt} = -\frac{2}{9} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{7}}{4}B = -\frac{2}{9} \end{cases} \rightarrow \quad B = -\frac{5}{9}\sqrt{7}$$

$$\rightarrow\ v_o(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\left(\frac{1}{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{6}t-\frac{5}{9}\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{6}t\right),\ t>0$$

ب ـ با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش ایراتوری معادلات انتگرال- دیفرانسیل داریم.



$i_1=i_s$

$$\begin{cases}\text{برای مش ۲}\ KVL\ \rightarrow\ (i_2-i_s)+\int i_2dt+2(i_2-i_3)=0\ \rightarrow\ (i_2-i_s)+\frac{1}{D}i_2+2(i_2-i_3)=0\\ \text{برای مش ۳}\ KVL\ \rightarrow\ 3(i_3-i_s)+2(i_3-i_2)+2\frac{di_3}{dt}=0\ \rightarrow\ 3(i_3-i_s)+2(i_3-i_2)+2Di_3=0\end{cases}$$

$$\rightarrow\ \begin{cases}(3D+1)i_2-2Di_3=Di_s\\ -2i_2+(2D+5)i_3=3i_s\end{cases}\ \rightarrow\ i_2=\frac{\begin{vmatrix}Di_s & -2D\\ 3i_s & 2D+5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3D+1 & -2D\\ -2 & 2D+5\end{vmatrix}}=\frac{2D^2+11D}{6D^2+13D+5}i_s$$

$$\rightarrow\ i_3=\frac{\begin{vmatrix}3D+1 & Di_s\\ -2 & 3i_s\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3D+1 & -2D\\ -2 & 2D+5\end{vmatrix}}=\frac{11D+3}{6D^2+13D+5}i_s$$

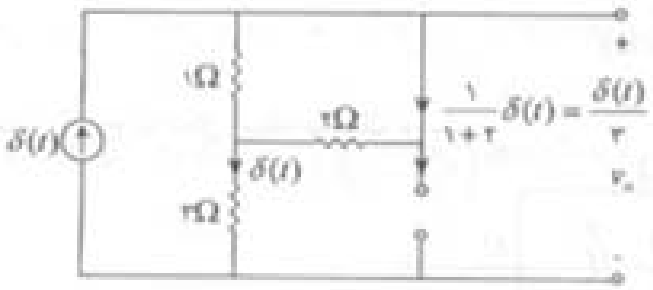
$$\rightarrow\ v_o=v_C+v_L=\int i_2dt+2\frac{di_3}{dt}=\frac{1}{D}\left(\frac{2D^2+11D}{6D^2+13D+5}\right)i_s+2D\left(\frac{11D+3}{6D^2+13D+5}\right)i_s$$

$$\rightarrow\ (6D^2+13D+5)v_o=(22D^2+8D+11)i_s\ \rightarrow\ 6\frac{d^2v_o}{dt^2}+13\frac{dv_o}{dt}+5v_o=22\frac{d^2i_s}{dt^2}+8\frac{di_s}{dt}+11i_s$$

به ازای $i_s(t)=\delta(t)$ پاسخ ضربه v_o را بدست خواهیم آورد.

$$6\frac{d^2v_o}{dt^2}+13\frac{dv_o}{dt}+5v_o=22\delta''(t)+8\delta'(t)+11\delta(t)$$

در $t=0$ ، خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز می باشد و ضربه $\delta(t)$ نیز وارد می شود.



$$\rightarrow \quad v_o = 2\left(\frac{\delta(t)}{3}\right) + 3\delta(t) = \frac{11}{3}\delta(t)$$

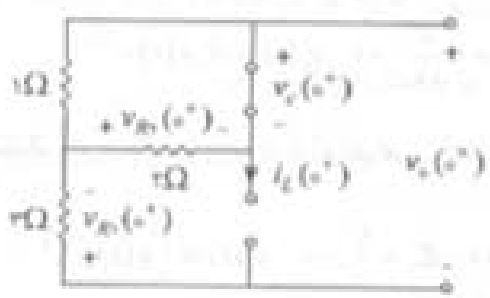
پس $v_o(t)$ شامل ضربه $\frac{11}{3}\delta(t)$ نیز می باشد و با توجه به معادله دیفرانسیل داریم

$$\text{معادله مشخصه}: 6s^2 + 13s + 5 = 0 \quad \rightarrow \quad s = -\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{5}{3} \quad \rightarrow \quad v_o(t) = K_1 e^{-\frac{1}{2}t} + K_2 e^{-\frac{5}{3}t} + \frac{11}{3}\delta(t)$$

از آنجا که جریان ضربه $\frac{\delta(t)}{3}$ از خازن عبور می کند و ولتاژ $\frac{11}{3}\delta(t)$ به دو سر سلف اعمال می شود خواهیم داشت

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) + \int_{0^-}^{0^+} \frac{\delta(t)}{3}dt = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}V \quad , \quad i_L(0^+) = i_L(0^-) + \frac{1}{2}\int_{0^-}^{0^+} \frac{11}{3}\delta(t)dt = \frac{11}{6}$$

بنابراین در $t = 0^+$ مدار بصورت زیر خواهد بود



$$v_o(0^+) = v_C(0^+) - v_{R_1}(0^+) - v_{R_3}(0^+) = v_C(0^+) - 3i_L(0^+) - 2\left(\frac{1}{1+2}i_L(0^+)\right) = -6/39$$

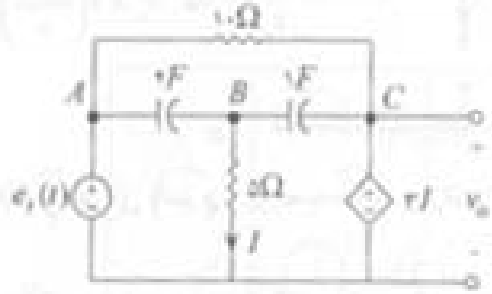
و با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+ ، $\frac{dv_o(0^+)}{dt}$ را بدست می آوریم

$$6\frac{dv_o(0^+)}{dt} + 13(-6/39) = 11 \quad \rightarrow \quad \frac{dv_o(0^+)}{dt} = 15/68$$

$$\begin{cases} v_o(0^+) = -6/39 \quad \rightarrow \quad K_1 + K_2 = -6/39 \\ \dfrac{dv_o(0^+)}{dt} = 15/68 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2}K_1 - \frac{5}{3}K_2 = 15/68 \end{cases} \rightarrow \quad K_1 = 4/31 \ ,\ K_2 = -10/7$$

$$\rightarrow\ v_o(t)=\left(2/32e^{-\frac{t}{2}}+10/76e^{-\frac{5t}{6}}\right)+\frac{11}{3}\delta(t)$$

ث ـ با توجه به شکل مسئله می توان نوشت:



$$v_A=e_s\ ,\ v_C=v_o\ ,\ v_o=3I\ \rightarrow\ I=\frac{v_o}{3}\ ,\ v_B=5I=\frac{5}{3}v_o$$

KCL برای گره (B) $\rightarrow\ 4\dfrac{d\left(\frac{5}{3}v_o-e_s\right)}{dt}+\dfrac{v_o}{3}+\dfrac{d\left(\frac{5}{3}v_o-v_o\right)}{dt}=0\ \rightarrow\ 4\dfrac{dv_o}{dt}+\dfrac{v_o}{3}=4\dfrac{de_s}{dt}$

برای محاسبه پاسخ ضربه، ابتدا پاسخ پله را محاسبه خواهیم کرد.

$$e_s(t)=u(t)\ \rightarrow\ 4\frac{dv_o}{dt}+\frac{v_o}{3}=4\delta(t)$$

معادله مشخصه : $4s+\frac{1}{3}=0\ \rightarrow\ s=-\frac{1}{12}\ \rightarrow\ v_o(t)=K_1u(t)e^{-\frac{t}{12}}$

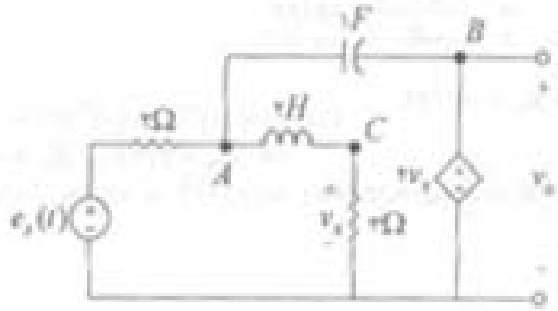
با انتگرال گیری از طرفین معادله دیفرانسیل در بازه "0" تا "0" خواهیم داشت:

$$4v_o(0^+)=4\ \rightarrow\ v_o(0^+)=\frac{1}{4}\ \rightarrow\ K_1=\frac{1}{4}\ \rightarrow\ v_o(t)=\frac{1}{4}u(t)e^{-\frac{t}{12}}$$

در ادامه با گرفتن مشتق از پاسخ پله پاسخ ضربه را بدست خواهیم آورد.

$$h(t)=\frac{dv_o(0^+)}{dt}=-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}u(t)e^{-\frac{t}{12}}\right)+\frac{1}{4}\delta(t)e^{-\frac{t}{12}}=-\frac{1}{48}u(t)e^{-\frac{t}{12}}+\frac{1}{4}\delta(t)$$

ث ـ با توجه به شکل مسئله و نمایش اپراتوری معادلات انتگرال- دیفرانسیل داریم:



$$v_B = v_o \quad , \quad 2v_A = v_o \;\rightarrow\; v_A = \frac{v_o}{2} \quad , \quad v_C = v_A = \frac{v_o}{2}$$

KCL برای گره C $\rightarrow \frac{1}{2}\int\left(\frac{v_o}{2} - v_A\right)dt + \frac{\frac{v_o}{2}}{3} = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{2D}\left(\frac{v_o}{2} - v_A\right) + \frac{v_o}{6} = 0$

$$\rightarrow\; v_A = \frac{2D+3}{6}v_o$$

KCL برای گره A $\rightarrow \dfrac{\frac{2D+3}{6}v_o - e_s}{2} + \frac{1}{2D}\left(\frac{2D+3}{6}v_o - \frac{v_o}{2}\right) + D\left(\frac{2D+3}{6}v_o - v_o\right) = 0$

$$\rightarrow\; \left(2D^2 - 2D + 5\right)v_o = 6e_s \;\rightarrow\; 2\frac{d^2v_o}{dt^2} - 2\frac{dv_o}{dt} + 5v_o = 6e_s$$

در ادامه به ازای $e_s(t) = \delta(t)$ پاسخ ضربه v_o را بدست خواهیم آورد.

$$2\frac{d^2v_o}{dt^2} - 2\frac{dv_o}{dt} + 5v_o = 6\delta(t)$$

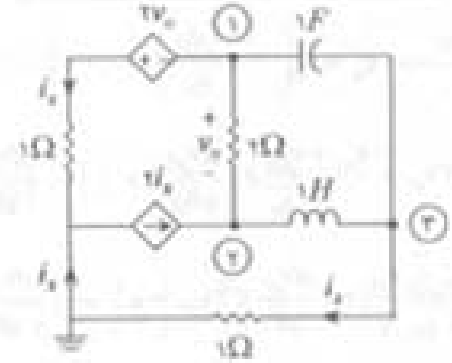
معادله مشخصه : $2s^2 - 2s + 5 = 0 \;\rightarrow\; s = -\frac{1}{2} \pm j \;\rightarrow\; v_o(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(A\cos t + B\sin t\right) \;,\; t > 0$

در $t = 0^-$ سلف مدار باز خواهد بود بنابراین $v_s = 0$ در نتیجه $v_o(0^-) = 0$ می باشد و با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+، $\frac{dv_o(0^-)}{dt}$ را بدست خواهیم آورد.

$$6\frac{dv_o(0^+)}{dt} = 6 \;\rightarrow\; \frac{dv_o(0^+)}{dt} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} v_o(0^+) = 0 \;\rightarrow\; 0 = A \\ \dfrac{dv_o(0^+)}{dt} = \dfrac{3}{2} \;\rightarrow\; -\dfrac{1}{2}A = B \;\dfrac{3}{2} \;\rightarrow\; B = \dfrac{3}{2} \end{cases} \;\rightarrow\; v_o(t) = \frac{3}{2}u(t)\sin t\, e^{-\frac{t}{2}}$$

ج - با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات انتگرال - دیفرانسیل داریم.



$$v_2 = i_s \ , \ v_1 = i_s - 2v_0 \ \rightarrow \ v_2 - v_1 = 2v_0 \ , \ v_1 - v_3 = v_0 \ \rightarrow \ v_2 - v_3 = 3v_0$$

KCL برای گره ① $\rightarrow \ i_s + \frac{v_0}{2} + \frac{d}{dt}(v_1 - v_2) = 0 \ \rightarrow \ v_2 + \frac{v_0}{2} + D(-2v_0) = 0$

$$\rightarrow \ v_2 = \left(2D - \frac{1}{2}\right)v_0$$

KCL برای گره ② $\rightarrow \ \frac{d}{dt}(v_2 - v_1) + \int(v_2 - v_1)dt + \frac{v_2}{1} = 0$

$$\rightarrow \ D(2v_0) + \frac{1}{D}(2v_0) + \left(2D - \frac{1}{2}\right)v_0 = 0$$

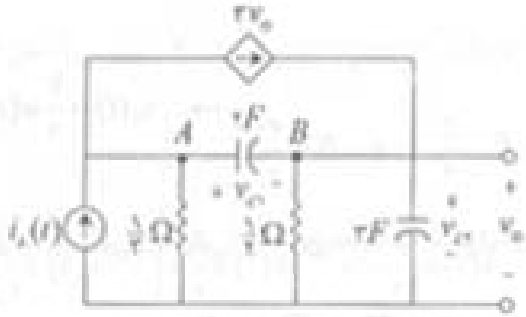
$$\rightarrow \ \left(8D^2 - D + 6\right)v_0 = 0 \ \rightarrow \ 8\frac{d^2 v_0}{dt^2} - \frac{dv_0}{dt} + 6v_0 = 0$$

از آنجا که هیچگونه منبع ثابت ای داده نشده لذا نمی توان پاسخ ضربه ای برای v_0 بدست آورد.

مسئله ۶۷

معادلات حالت مدارهای مسئله ۶۶ را بنویسید و v_0 را بر حسب ترکیب خطی متغیر های حالت بیان کنید.

حل : الف ـ با انتخاب ولتاژ خازنها به عنوان متغیرهای حالت داریم.

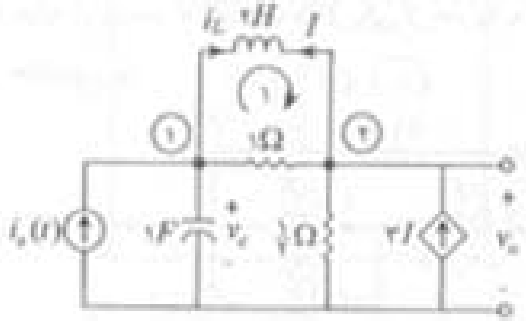


$$v_B = v_{C2} = v_0 \ , \ v_A = v_{C1} + v_{C2} \ \rightarrow \ v_0 = v_{C2}$$

KCL برای گره Ⓐ $\rightarrow \ -i_s + 2v_{C2} + \frac{v_{C1} + v_{C2}}{\frac{1}{2}} + 2\frac{dv_{C1}}{dt} = 0 \ \rightarrow \ \frac{dv_{C1}}{dt} = -\frac{3}{2}v_{C1} - 3v_{C2} + \frac{1}{2}i_s$

KCL برای گره Ⓑ $\rightarrow \ -2\frac{dv_{C2}}{dt} + \frac{v_{C2}}{\frac{1}{2}} + 2\frac{dv_{C2}}{dt} - 2v_{C2} = 0 \ \rightarrow \ \frac{dv_{C2}}{dt} = -v_{C1} - \frac{5}{2}v_{C2} + \frac{1}{2}i_s$

پ ـ با انتخاب جریان سلف و ولتاژ خازن به عنوان متغیرهای حالت و با توجه به شکل (ب) داریم.

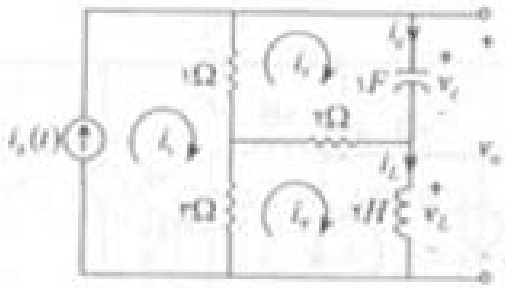


KCL برای گره ۲ $\rightarrow \frac{v_o - v_C}{1} + \frac{v_o}{1} - i_L - 2(-i_L) \rightarrow v_o = \frac{1}{2}v_C - \frac{3}{2}i_L$

KCL برای گره ۱ $\rightarrow -i_s + i_L + \frac{v_C - \left(\frac{1}{2}v_C - \frac{3}{2}\right)}{1} + \frac{dv_C}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dv_C}{dt} = -\frac{3}{2}v_C - \frac{5}{2}i_L + i_s$

KVL برای مش ۱ $\rightarrow 2\frac{di_L}{dt} + \left(\frac{1}{2}v_C - \frac{3}{2}i_L\right) - v_C = 0 \rightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{4}v_C + \frac{1}{4}i_L$

پ ـ با توجه به شکل (ب) و با انتخاب ولتاژ خازن و جریان سلف به عنوان متغیر های حالت داریم.



$i_1 = i_s \quad , \quad i_2 = i_C = \frac{dv_C}{dt} \quad , \quad i_4 = i_L \quad , \quad v_L = 2\frac{di_L}{dt}$

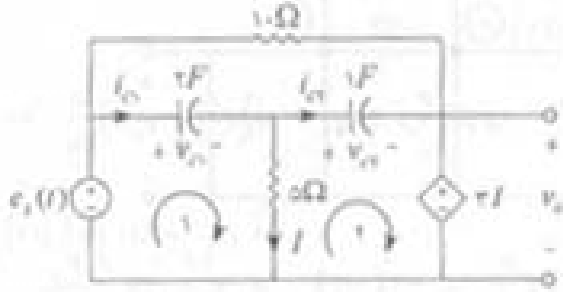
KVL برای مش ۲ $\rightarrow \left(\frac{dv_C}{dt} - i_s\right) + v_C + 2\left(\frac{dv_C}{dt} - i_L\right) = 0 \rightarrow \frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{3}v_C + \frac{2}{3}i_L + \frac{1}{3}i_s$

KVL برای مش ۳ $\rightarrow 2(i_L - i_s) + 2\left(i_L - \frac{dv_C}{dt}\right) + 2\frac{di_L}{dt} = 0$

$\rightarrow 2(i_L - i_s) + 2\left(i_L + \frac{1}{3}v_C - \frac{2}{3}i_L - \frac{1}{3}i_s\right) + 2\frac{di_L}{dt} = 0 \rightarrow \frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{3}v_C - \frac{11}{6}i_L + \frac{11}{6}i_s$

$$v_o = v_c + v_L = v_c + 2\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{2}v_c - \frac{11}{2}i_L + \frac{11}{2}i_s$$

ث ـ با توجه به اینکه مدار مرتبه اول است لذا انتخاب ولتاژ یکی از خازنها به عنوان متغیر حالت کافیست که با انتخاب v_{c1} به عنوان متغیر حالت داریم.



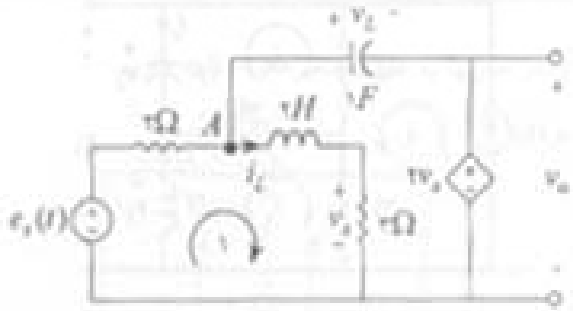
$$\text{KVL برای مش ۲} \rightarrow -5I + v_{c1} + 2I = 0 \rightarrow I = \frac{v_{c1}}{2}$$

$$\text{KVL برای حلقه شامل مش های ۱ و ۲} \rightarrow -e_s + v_{c1} + v_{c2} + 2\left(\frac{v_{c1}}{2}\right) = 0 \rightarrow v_{c2} = e_s - \frac{5}{2}v_{c1}$$

$$I = i_{c1} - i_{c2} \rightarrow \frac{v_{c1}}{2} = 2\frac{dv_{c1}}{dt} - \frac{dv_{c2}}{dt} = 2\frac{d}{dt}\left(e_s - \frac{5}{2}v_{c1}\right) - \frac{dv_{c2}}{dt} \rightarrow \frac{dv_{c1}}{dt} = -\frac{v_{c1}}{12} + \frac{1}{3}\frac{de_s}{dt}$$

$$v_o = 2I = \frac{3}{2}v_{c1}$$

ث ـ با انتخاب ولتاژ خازن و جریان سلف به عنوان متغیرهای حالت خواهیم داشت.



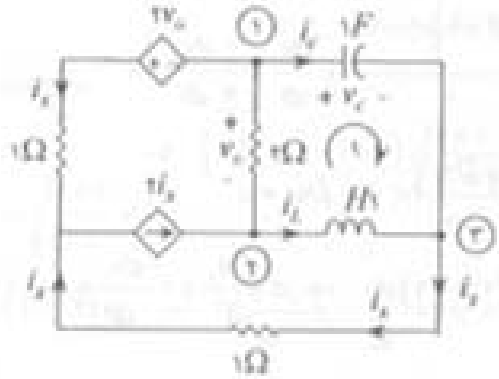
$$v_x = 2i_L \rightarrow v_o = 2v_x = 4i_L \quad , \quad v_A = v_o + v_c = 4i_L + v_c$$

$$\text{KCL برای گره (A)} \rightarrow \frac{4i_L + v_c - e_s}{2} + i_L + \frac{dv_c}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dv_c}{dt} = -\frac{1}{2}v_c - 2i_L + \frac{1}{2}e_s$$

$$\text{KVL برای مش ۱} \rightarrow -v_A + 2\frac{di_L}{dt} + 2i_L = 0 \rightarrow -(4i_L + v_c) + 2\frac{di_L}{dt} + 2i_L = 0$$

$$\rightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{2}v_c + \frac{3}{2}i_L$$

ج ـ با توجه به شکل مسئله و با انتخاب ولتاژ خازن و جریان سلف به عنوان متغیر های حالت داریم.



$$i_s = i_c + i_L = \frac{dv_c}{dt} + i_L$$

KCL برای گره ۲ $\rightarrow -2i_s - \frac{v_0}{2} + i_L = 0 \rightarrow -2\left(\frac{dv_c}{dt} + i_L\right) - \frac{v_c}{2} + i_L = 0$

$$\rightarrow v_0 = -2\frac{dv_c}{dt} + 2i_L$$

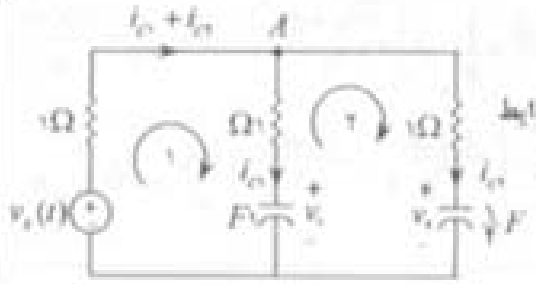
KVL برای حلقه بیرونی $\rightarrow -i_s + 2v_0 + v_c + i_s = 0 \rightarrow 2\left(-2\frac{dv_c}{dt} - 2i_L\right) + v_c = 0$

$$\rightarrow \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{8}v_c - \frac{1}{2}i_L$$

KVL برای مش ۱ $\rightarrow -\frac{di_L}{dt} - v_0 + v_c = 0 \rightarrow -\frac{di_L}{dt} - \left(-2\frac{dv_c}{dt} - 2i_L\right) + v_c = 0$

$$\rightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{3}{2}v_c \quad , \quad v_0 = -2\frac{dv_c}{dt} - 2i_L = -\frac{v_c}{2}$$

مسئله ۶۸



شکل مسئله ۶۸

معادله دیفرانسیلی برحسب v_1 و v_2 تشکیل داده و شرایط اولیه را مشخص کنید. ($v_1(0) = V_{01}$ و $v_2(0) = V_{02}$)

پاسخ پله v_1 و v_2 را بدست آورید.

حل: با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$\begin{cases} v_A = v_2 + \frac{1}{2}\frac{dv_2}{dt} = \left(\frac{1}{2}D + 1\right)v_2 \\ v_A = v_1 + \frac{dv_1}{dt} = (D+1)v_1 \end{cases} \rightarrow v_1 = \frac{\frac{1}{2}D + 1}{D+1}v_2$$

KCL برای گره ④ $\rightarrow \dfrac{\left(\frac{1}{4}D+1\right)v_1 - v_s}{1} + \dfrac{dv_1}{dt} + \dfrac{1}{4}\dfrac{dv_1}{dt} = 0$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{4}D+1\right)v_1 - v_s + D\frac{\frac{1}{4}D+1}{D+1}v_1 + \frac{1}{4}Dv_1 = 0$$

$$\rightarrow \left(3D^2+10D+4\right)v_1 = \left(4D+4\right)v_s \quad \rightarrow \quad 3\frac{d^2v_1}{dt^2} + 10\frac{dv_1}{dt} + 4v_1 = 4\frac{dv_s}{dt} + 4v_s$$

که شرایط اولیه آن عبارتند از :

$v_1(0) = V_{01}$

$$\begin{cases} \text{KVL برای مش ۱} \rightarrow -v_s + \left(i_{C1} + i_{C2}\right) + i_{C1} + v_1 = 0 \quad \rightarrow \quad 4\dfrac{dv_1}{dt} - \dfrac{1}{4}\dfrac{dv_2}{dt} = -v_1 + v_s \\ \text{KVL برای مش ۲} \rightarrow -v_1 - i_{C2} + i_{C2} + v_2 = 0 \quad \rightarrow \quad -\dfrac{dv_1}{dt} + \dfrac{1}{4}\dfrac{dv_2}{dt} = v_1 - v_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_1}{dt} = -\dfrac{4}{3}v_1 + \dfrac{1}{3}v_2 + \dfrac{1}{3}v_s \\ \dfrac{dv_2}{dt} = \dfrac{4}{3}v_1 - \dfrac{8}{3}v_2 + \dfrac{4}{3}v_s \end{cases} \quad \rightarrow \quad \frac{dv_2(0)}{dt} = \frac{4}{3}V_{01} - \frac{8}{3}V_{02} + \frac{4}{3}v_s(0)$$

به ازای $v_s(t) = u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ واضح است که $V_{01} = V_{02} = 0$ و $v_s(0) = 1$ بوده و پاسخ پله را می توان بصورت زیر محاسبه کرد.

$$3\frac{d^2v_1}{dt^2} + 10\frac{dv_1}{dt} + 4v_1 = 0 \quad , \quad v_1(0) = 0 \quad , \quad \frac{dv_1(0)}{dt} = \frac{4}{3} \quad , \quad t > 0$$

معادله مشخصه : $3s^2 + 10s + 4 = 0 \rightarrow s = -\dfrac{5}{3} \pm \dfrac{\sqrt{13}}{3}$

$$\rightarrow v_1(t) = K_1 e^{\frac{-5+\sqrt{13}}{3}t} - K_2 e^{\frac{-5-\sqrt{13}}{3}t} \quad , \quad t > 0$$

$$\begin{cases} v_1(0) = 0 \quad \rightarrow \quad K_1 + K_2 = 0 \\ \dfrac{dv_1(0)}{dt} = \dfrac{4}{3} \quad \rightarrow \quad -\left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{3}\right)K_1 + \left(-\dfrac{5-\sqrt{13}}{3}\right)K_2 = \dfrac{4}{3} \end{cases} \quad \rightarrow \quad K_1 = \frac{4\sqrt{13}}{13} \quad , \quad K_2 = \frac{4\sqrt{17}}{13}$$

$$\rightarrow v_1(t) = \frac{4\sqrt{3}}{13}\left(e^{\frac{-5+\sqrt{13}}{3}t} - e^{\frac{-5-\sqrt{13}}{3}t}\right)$$

در ادامه تمامی موارد فوق را برای v_1 تکرار می کنیم.

$$\begin{cases}\left(3D^2+10D+4\right)v_1=\left(4D+4\right)v_2\\ v_1=\dfrac{\frac{3}{4}D+1}{D+1}v_2 \;\rightarrow\; v_2=\dfrac{D+1}{\frac{3}{4}D+1}v_1\end{cases} \rightarrow \left(3D^2+10D+4\right)\frac{D+1}{\frac{3}{4}D+1}v_1=4\left(D+1\right)v_2$$

$$\rightarrow \left(3D^2+10D+4\right)v_1=\left(D+4\right)v_2 \;\rightarrow\; 3\frac{d^2v_1}{dt^2}+10\frac{dv_1}{dt}+4v_1=\frac{dv_2}{dt}+4v_2$$

و شرایط اولیه عبارتند از :

$$v_1(0)=V_{01} \quad , \quad \frac{dv_1(0)}{dt}=-\frac{3}{2}V_{01}+\frac{1}{3}V_{02}+\frac{1}{3}v_2(0)$$

به ازای $v_2(t)=u(t)=\begin{cases}1 \;,\; t>0\\ 0 \;,\; t<0\end{cases}$ واضح است که $V_{01}=V_{02}=0$ و $v_2(0)=1$ بوده و پاسخ پله را می توان بصورت زیر محاسبه کرد.

$$3\frac{d^2v_1}{dt^2}+10\frac{dv_1}{dt}+4v_1=0 \quad , \quad v_1(0)=0 \quad , \quad \frac{dv_1(0)}{dt}=\frac{1}{3} \;,\; t>0$$

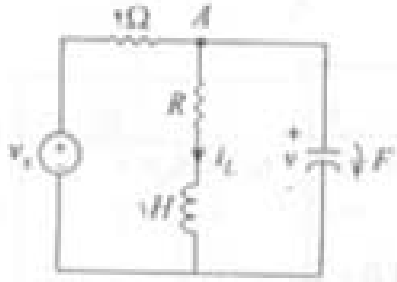
معادله مشخصه : $3s^2+10s+4=0 \;\rightarrow\; s=-\frac{5}{3}\pm\frac{\sqrt{13}}{3}$

$$\rightarrow \; v_1(t)=K_1e^{\frac{-5+\sqrt{13}}{3}t}+K_2e^{\frac{-5-\sqrt{13}}{3}t} \;,\; t>0$$

$$\begin{cases}v_1(0)=0 \;\rightarrow\; K_1+K_2=0\\ \dfrac{dv_1(0)}{dt}=\dfrac{1}{3} \;\rightarrow\; \left(\dfrac{-5+\sqrt{13}}{3}\right)K_1+\left(\dfrac{-5-\sqrt{13}}{3}\right)K_2=\dfrac{1}{3}\end{cases} \rightarrow K_1=\frac{\sqrt{13}}{26} \;,\; K_2=-\frac{\sqrt{13}}{26}$$

$$\rightarrow \; v_1(t)=\frac{\sqrt{13}}{26}\left(e^{\frac{-5+\sqrt{13}}{3}t}-e^{\frac{-5-\sqrt{13}}{3}t}\right)$$

مسئله ۶۹



شکل مسئله ۶۹

- معادله دیفرانسیلی بر حسب v تشکیل دهید.
- R را چنان تعیین کنید که مدار میرایی بحرانی باشد.

حل : با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$v_A = v \ , \ v_A = Ri_L + \frac{di_L}{dt} = (D+R)i_L \ \rightarrow \ i_L = \frac{1}{D+R}v$$

KCL برای گره (A) $\rightarrow \ \frac{v - v_s}{2} + \frac{1}{D+R}v + \frac{1}{2}\frac{dv}{dt} = 0 \ \rightarrow \ \frac{v - v_s}{2} + \frac{1}{D+R}v + \frac{1}{2}DV = 0$

$$\rightarrow \ \left(D^2 + (R+1)D + R + 2\right)v = (D+2)v_s \ \rightarrow \ \frac{d^2v}{dt^2} + (R+1)\frac{dv}{dt} + (R+2)v = \frac{dv_s}{dt} + Rv_s$$

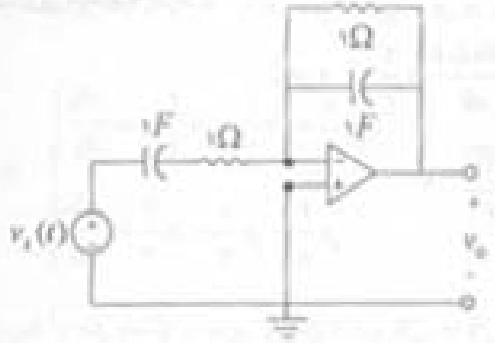
$$2\alpha = R+1 \ \rightarrow \ \alpha = \frac{R+1}{2} \ , \ \omega_0^2 = R+2 \ \rightarrow \ \omega_0 = \sqrt{R+2}$$

به ازای $\alpha = \omega_0$ مدار میرایی بحرانی خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\alpha = \omega_0 \ \rightarrow \ \frac{R+1}{2} = \sqrt{R+2} \ \rightarrow \ R = 5\Omega$$

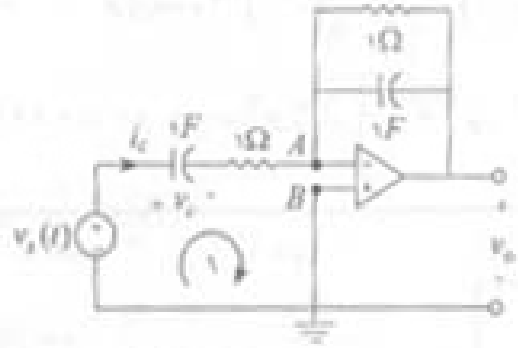
مسئله ۷۰

پاسخ پله و ضربه v_o را تعیین کنید.



شکل مسئله ۷۰

حل: با فرض اینکه آپ امپ ایده آل باشد، $v_A = v_B = 0$ شده و خواهیم داشت:



KCL برای گره (A) $\rightarrow \ -i_c + \frac{0 - v_o}{1} + \frac{d}{dt}(0 - v_o) = 0 \ \rightarrow \ -i_c - v_o - Dv_o = 0$

$$\rightarrow \ i_c = -(D+1)v_o \ \rightarrow \ v_c = \int i_c dt \ \rightarrow \ v_c = -\frac{1}{D}(D+1)v_o$$

KVL برای مش ۱ $\rightarrow \ -v_s - \frac{1}{D}(D+1)v_o - (D+1)v_o = 0 \ \rightarrow \ \left(D^2 + 2D + 1\right)v_o = -Dv_s$

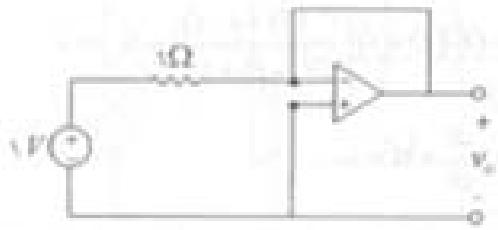
$$\rightarrow \quad \frac{d^2 v_o}{dt^2} + 2\frac{dv_o}{dt} + v_o = -\frac{dv_s}{dt}$$

حال با جایگذاری $v_s(t) = u(t) = 1 \ , \ t > 0$ پاسخ پله را محاسبه خواهیم کرد.

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 2\frac{dv_o}{dt} + v_o = -\delta(t) = 0 \quad , \quad t > 0$$

معادله مشخصه : $s^2 + 2s + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad s = -1 \ , \ -1 \quad \rightarrow \quad v_o(t) = (K_1 + K_2 t)e^{-t} \quad , \quad t > 0$

در $t = 0^+$ خازنها اتصال کوتاه بوده و مدار بصورت زیر می باشد.



$$\rightarrow \quad v_o(0^+) = \frac{0}{1\Omega} 1V = 0$$

و با انتگرال گیری در فاصله 0^- تا 0^+ از معادله دیفرانسیل خواهیم داشت.

$$\frac{dv_o(0^+)}{dt} - \frac{dv_o(0^-)}{dt} + 2\left(v_o(0^+) - v_o(0^-)\right) + \int_{0^-}^{0^+} v_o = -\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt \quad \rightarrow \quad \frac{dv_o(0^+)}{dt} = 1$$

در نهایت با اعمال شرایط اولیه K_1 و K_2 را محاسبه خواهیم کرد.

$$\begin{cases} v_o(0^+) = 0 \quad \rightarrow \quad K_1 = 0 \\ \dfrac{dv_o(0^+)}{dt} = -1 \quad \rightarrow \quad -K_1 + K_2 = -1 \quad \rightarrow \quad K_2 = -1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad v_o(t) = -u(t)te^{-t}$$

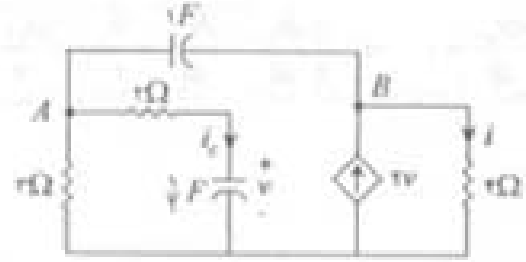
حال با مشتق گیری از پاسخ پله فوق، پاسخ ضربه را بدست می آوریم.

$$h(t) = \frac{dv_o(t)}{dt} = -te^{-t}\Big|_{t=0} \delta(t) - u(t)e^{-t} + u(t)te^{-t} = u(t)(t-1)e^{-t}$$

مسئله ۷۱

الف- معادله دیفرانسیلی بر حسب i بنویسید.

ب- معادلات حالت را بنویسید و خروجی i را بر حسب متغیرهای حالت بیان کنید.



شکل مسئله ۷۱

حل : الف ـ با توجه به شکل مسئله داریم.

$$i_L = \frac{1}{2}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}DV \;\rightarrow\; v_A = 2i_L + v = (D+1)v \;,\; v_B = 2i$$

KCL برای گره (B) $\rightarrow\; -2v + i + \frac{d}{dt}(v_B - v_A) = 0 \;\rightarrow\; -2v + i + D\left(2i - (D+1)v\right) = 0$

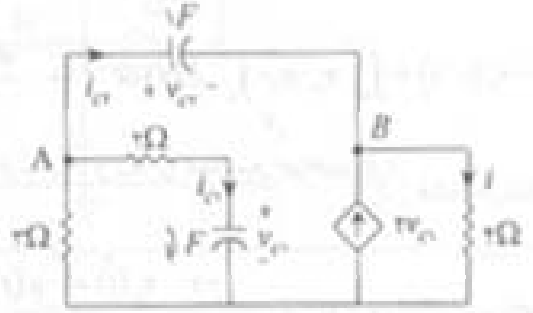
$$\rightarrow\; v = \frac{2D+1}{D^2+D+2}\,i$$

KCL برای گره (A) $\rightarrow\; \frac{v_A}{2} + i_L + \frac{d}{dt}(2_A - v_B) = 0 \;\rightarrow\; \frac{(D+1)v}{2} + \frac{1}{2}Dv + D\left((D+1)v - 2i\right) = 0$

$$\frac{(D+1)}{2}\left(\frac{2D+1}{D^2+D+2}\right)i + \frac{1}{2}D\left(\frac{2D+1}{D^2+D+2}\right)i + D\left((D+1)\left(\frac{2D+1}{D^2+D+2}\right)i - 2i\right) = 0$$

$$\rightarrow\; \left(2D^2 - 29D + 2\right)i = 0 \;\rightarrow\; 2\frac{d^2 i}{dt^2} - 29\frac{di}{dt} + 2i = 0$$

ب ـ با انتخاب ولتاژ خازنها به عنوان متغیرهای حالت داریم.



$$v_A = 2i_{C1} + v_{C1} = \frac{dv_{C1}}{dt} + v_{C1} \;,\; v_B = v_A - v_{C2} = \frac{dv_{C1}}{dt} + v_{C1} - v_{C2} = 2i$$

KCL برای گره (A) $\rightarrow\; \frac{\frac{dv_{C1}}{dt} + v_{C1}}{2} + \frac{1}{2}\frac{dv_{C1}}{dt} + \frac{dv_{C1}}{dt} = 0 \;\rightarrow\; \frac{5}{6}\frac{dv_{C1}}{dt} + \frac{dv_{C1}}{dt} = -\frac{v_{C1}}{2}$

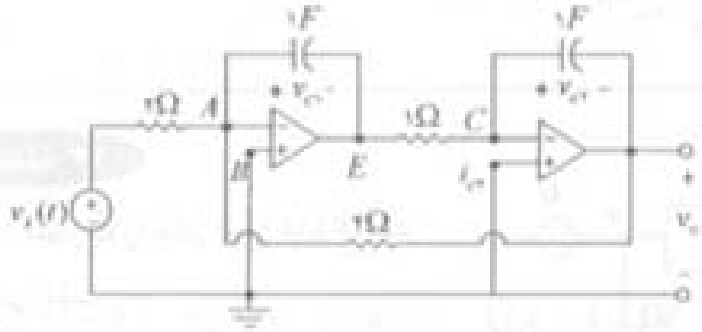
KCL برای گره (B) $\rightarrow\; -2v_{C1} + \frac{\frac{dv_{C1}}{dt} + v_{C1} - v_{C2}}{2} - \frac{dv_{C2}}{dt} = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{2}\frac{dv_{C1}}{dt} - \frac{dv_{C2}}{dt} = \frac{7}{2}v_{C1} + \frac{v_{C2}}{2}$

$$\rightarrow\; \begin{cases} \frac{dv_{C1}}{dt} = \frac{17}{13}v_{C1} + \frac{2}{13}v_{C2} \\ \frac{dv_{C2}}{dt} = -\frac{37}{26}v_{C1} - \frac{5}{26}v_{C2} \end{cases}$$

$$v_B = \frac{dv_{C1}}{dt} - v_{C1} - v_{C2} \quad \rightarrow \quad 4i = \frac{17}{12}v_{C1} + \frac{3}{12}v_{C2} + v_{C1} - v_{C2} \quad \rightarrow \quad i = \frac{15}{24}v_{C1} - \frac{5}{24}v_{C2}$$

مسئله ۷۲

- معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده v_o و v_s را بدست آورید.
- برای $v_s(t) = 2\cos 2t$ ، $v_o(t)$ را برای $t > 0$ بدست آورید. (شرایط اولیه را صفر در نظر بگیرید)



شکل مسئله ۷۲

حل : با فرض ایده آل بودن آپ- امپ ها $v_A = v_B = v_C = v_D = 0$ بوده و خواهیم داشت.

$$KCL \text{ برای گره } A \quad \rightarrow \quad \frac{0 - v_s}{2} + \frac{0 - v_o}{4} + \frac{d}{dt}(0 - v_E) = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{v_s}{2} - \frac{v_o}{4} - Dv_E = 0$$

$$\rightarrow \quad v_E = -\frac{2v_s + v_o}{4D}$$

$$KCL \text{ برای گره } C \quad \rightarrow \quad \frac{0 - v_E}{1} + \frac{d}{dt}(0 - v_o) = 0 \rightarrow \quad \frac{2v_s + v_o}{4D} - Dv_o \rightarrow \quad (4D^2 - 1)v_o = 2v_s$$

$$\rightarrow \quad 4\frac{d^2 v_o}{dt^2} - v_o = 2v_s$$

به ازای $v_s(t) = 2\cos 2t$ داریم:

$$4\frac{d^2 v_o}{dt^2} - v_o = 8\cos 2t$$

معادله مشخصه : $4s^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad s = \pm\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad v_o(t) = \underbrace{K_1 e^{-\frac{1}{2}t} + K_2 e^{\frac{1}{2}t}}_{} + \underbrace{(A\cos 2t + B\sin 2t)}_{\text{پاسخ خصوصی}}$

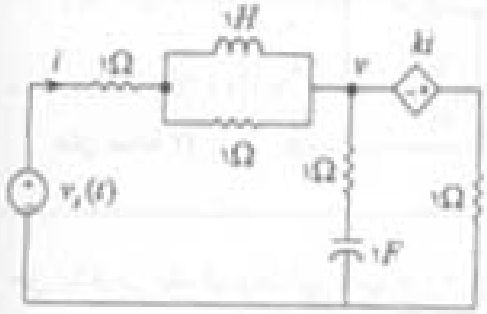
با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم.

$$-17A\cos 2t - 17B\sin 2t = 8\cos 2t \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -17A = 8 \ \rightarrow \ A = -\frac{8}{17} \\ -17B = 0 \ \rightarrow \ B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_o(0) = 0 \ \rightarrow \ K_1 + K_2 - \frac{8}{17} = 0 \\ \frac{dv_o(0)}{dt} = 0 \ \rightarrow \ -\frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_2 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad K_1 = K_2 = \frac{4}{17}$$

$$\rightarrow \ v_o(t) = \frac{4}{17}\left(e^{-\frac{1}{2}t} + e^{\frac{1}{2}t}\right) - \frac{16}{17}\cos 2t \quad , \quad t > 0$$

مسئله ۷۳



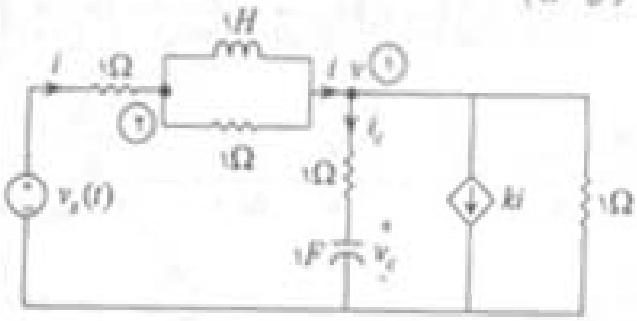
شکل مسئله ۷۳

الف- مقدار K را چنان تعیین کنید که مدار نوسانی باشد.

ب- به ازای چه مقدار K تمام فرکانسهای طبیعی در نیم صفحه چپ قرار می گیرند.

پ- با فرض شرایط اولیه صفر و $K = -3$ و $v_s(t) = u(t)$ ولتاژ v را تعیین کنید.

حل : الف ـ با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات انتگرال- دیفرانسیل و با استفاده از تبدیل تونن- نرتن داریم.



$$v_c = v_s - i \quad , \quad v = i_c + v_c = i_c + \int i_c = i_c + \frac{1}{D}i_c \quad \rightarrow \quad i_c = \frac{D}{D+1}v$$

KCL برای گره ② $\rightarrow \ -i + \frac{v_s - i - v}{1} + \int(v_s - i - v) = 0$

$$\rightarrow \ -i + v_s - i - v + \frac{1}{D}(v_s - i - v) = 0 \quad \rightarrow \quad i = \frac{D+1}{2D+1}(v_s - v)$$

KCL برای گره ① $\rightarrow \quad -i+i_c+Ki+\frac{v}{1}=0 \quad \rightarrow \quad (K-1)\frac{D+1}{2D+1}(v_s-v)+\frac{D}{D+1}v+v=0$

$$\left\{(K-5)D^2+2(K-3)D+(K-2)\right\}v=\left\{(K-1)D^2+2(K-1)D+(K-1)\right\}v_s$$

$$\rightarrow \quad (K-5)\frac{d^2v}{dt^2}+2(K-3)\frac{dv}{dt}+(K-2)v=(K-1)\frac{d^2v_s}{dt^2}+2(K-1)\frac{dv_s}{dt}+(K-1)v_s$$

می دانیم که به ازای $\alpha=0$ مدار نوسانی خواهد بود پس داریم:

$$2\alpha=\frac{2(K-3)}{K-5}=0 \quad \rightarrow \quad K=3$$

ب ـ ابتدا فرکانسهای طبیعی را بدست می آوریم:

معادله مشخصه: $(K-5)s^2+2(K-3)s+(K-2)=0$

$$\rightarrow \quad s=\frac{-(K-3)\pm\sqrt{(K-3)^2-(K-5)(K-2)}}{(K-5)}=\frac{-(K-3)\pm\sqrt{\Delta'}}{(K-5)}$$

فرض کنیم که $\Delta'\geq 0$ باشد. در این صورت ریشه های معادله مشخصه حقیقی بوده و شرط اینکه در نیم صفحه چپ صفحه مختلط واقع شوند این است که هر دو منفی باشند.

$$\Delta'>0 \quad \rightarrow \quad (K-3)^2-(K-2)(K-5)\geq 0 \quad \rightarrow \quad K-1\geq 0 \quad \rightarrow \quad K\geq 1$$

$$s=\frac{-(K-3)\pm\sqrt{\Delta'}}{K-5}<0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases}-(K-3)\pm\sqrt{\Delta'}<0\\ K-5>0\end{cases} \qquad \begin{cases}-(K-3)\pm\sqrt{\Delta'}>0\\ K-5<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-(K-3)\pm\sqrt{\Delta'}<0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases}-(K-3)+\sqrt{(K-3)^2-(K-2)(K-5)}<0\\ \qquad \rightarrow \quad -(K-2)(K-5)<0 \quad \rightarrow \quad K<2\,,\ K>5\\ -(K-3)+\sqrt{(K-3)^2-(K-2)(K-5)}<0 \quad \rightarrow \quad K\in\mathbb{R}\end{cases}\\ K-5>0 \quad \rightarrow \quad K>5\end{cases}$$

اشتراک تمامی بازه های بدست آمده مقادیری از K خواهند بود که به ازای آنها فرکانسهای طبیعی حقیقی بوده و در نیم صفحه چپ قرار دارند، یعنی $1\leq K<2$.

حال فرض می کنیم $\Delta'<0$ باشد و این یعنی اینکه فرکانسهای طبیعی مختلط اند و شرط اینکه این فرکانسها در نیم صفحه چپ قرار گیرند این است که قسمت حقیقی آنها منفی باشد.

$$\Delta'<0 \quad \rightarrow \quad K-1<0 \quad \rightarrow \quad K<1$$

$$\Delta' < 0 \rightarrow s = -\frac{K-3}{K-5} \pm j\frac{\sqrt{-\Delta'}}{K-5} \rightarrow -\frac{K-3}{K-5} < 0 \rightarrow \frac{K-3}{K-5} > 0 \rightarrow K < 3 \text{ یا } K > 5$$

اشتراک بازه های فوق مقادیری از K را بدست می دهند که به ازای آنها فرکانسهای طبیعی مختلط بوده و در نیم صفحه چپ واقع اند، یعنی $K < 3$.

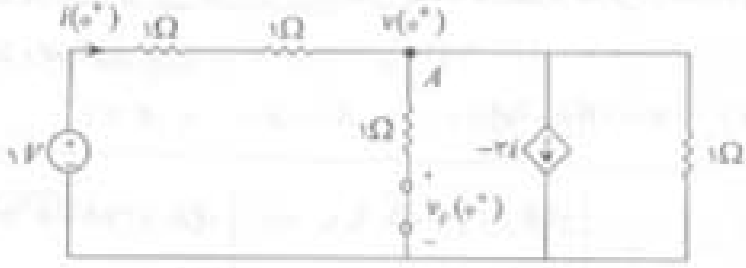
نتیجه کلی اینکه به ازای $1 \le K < 2$ و یا $K < 3$ فرکانسهای طبیعی در نیم صفحه چپ قرار دارند.

پ ـ با اعمال مفروضات داده شده داریم

$$8\frac{d^2v}{dt^2} + 12\frac{dv}{dt} + 5v = 2\delta'(t) + 8\delta(t) + 2u(t) = 2 \quad , \quad t > 0$$

معادله مشخصه : $8s^2 + 12s + 5 = 0 \rightarrow s = -\frac{3}{2} \pm j\frac{1}{2} \rightarrow v(t) = \underbrace{e^{-\frac{3}{2}t}\left(A\cos\frac{t}{2} + B\sin\frac{t}{2}\right)}_{\text{پاسخ خصوصی}} + \underbrace{K_1}_{\text{پاسخ عمومی}}$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $5K_1 = 2$ و یا $K_1 = \frac{2}{5}$ خواهد شد. در $t = 0^+$ خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز خواهد بود بنابراین داریم



$$i(0^+) = \frac{1 - v(0^+)}{2} \quad , \quad v_c(0^+) = v_c(0^-) = 0$$

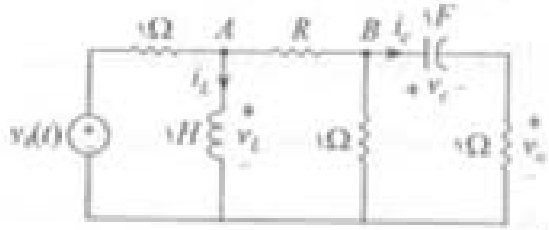
KCL برای گره (A) $\rightarrow -\frac{1-v(0^+)}{2} + \frac{v(0^+)}{1} - 2\left(\frac{1-v(0^+)}{2}\right) + \frac{v(0^+)}{1} = 0 \rightarrow v(0^+) = \frac{1}{2}V$

با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

$$8\frac{dv(0^+)}{dt} + 12v(0^+) = 8 \rightarrow \frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} v(0^+) = \frac{1}{2} \rightarrow A + \frac{2}{5} = \frac{1}{2} \rightarrow A = -\frac{3}{10} \\ \frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{3}{2}A + \frac{B}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow B = \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$\rightarrow v(t) = e^{-\frac{3}{2}t}\left(-\frac{3}{10}\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{10}\sin\frac{t}{2}\right) + \frac{2}{5} \quad , t > 0$$

مسئله ۷۴



شکل مسئله ۷۴

R را چنان تعیین کنید که مدار

الف- میرایی شدید باشد

ب- میرایی ضعیف باشد

پ- معادلات حالت را به ازای $R = 2$ بنویسید و v_o را بر حسب متغیرهای حالت بیان کنید.

حل: با توجه به شکل مسئله و بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم:

$$\frac{dv_c}{dt} = i_c = \frac{v_c}{1} = v_o \quad \rightarrow \quad v_B = v_c + v_o = v_c + \frac{dv_c}{dt} \quad , \quad v_L = \frac{di_L}{dt}$$

$$\begin{cases} \text{KCL برای گره } B \rightarrow \dfrac{v_c + \dfrac{dv_c}{dt} - \dfrac{di_L}{dt}}{R} + \dfrac{v_c + \dfrac{dv_c}{dt}}{1} + \dfrac{dv_c}{dt} = 0 \\ \text{KCL برای گره } A \rightarrow \dfrac{\dfrac{di_L}{dt} - v_s}{1} + i_L + \dfrac{\dfrac{di_L}{dt} - \left(v_c + \dfrac{dv_c}{dt}\right)}{R} = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_c}{dt} = -\dfrac{R+2}{2R+3} v_c - \dfrac{1}{2R+3} i_L + \dfrac{1}{2R+3} v_s \\ \dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{1}{2R+3} v_c - \dfrac{2R+1}{2R+3} i_L + \dfrac{2R+1}{2R+3} v_s \end{cases}$$

$$\text{معادله مشخصه}: |SI - A| = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} s + \dfrac{R+2}{2R+3} & \dfrac{1}{2R+3} \\ -\dfrac{1}{2R+3} & s + \dfrac{2R+1}{2R+3} \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \quad s^2 + \frac{2R+3}{(2R+3)} s + \frac{R+1}{2R+3} = 0$$

$$2\alpha = \frac{2R+3}{2R+3} \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{2(R+1)}{2(2R+3)} \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{R+1}{2R+3} \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{R+1}{2R+3}}$$

الف ـ به ازای $\alpha > \omega_0$ مدار میرایی شدید می باشد.

$$\alpha > \omega_0 \quad \rightarrow \quad \frac{2(R+1)}{2(2R+3)} > \sqrt{\frac{R+1}{2R+3}} \quad \rightarrow \quad 4(R+1)^2 - 4(2R+3)(R+1) > 0$$

$$\rightarrow R^2 - 2R - 3 > 0 \rightarrow (R-3)(R+1) > 0 \rightarrow R < -1 \ \backslash \ R > 3$$

ب ـ به ازای $\alpha < \omega_0$ مدار میرایی ضعیف خواهد بود.

$$\alpha < \omega_0 \rightarrow \frac{2(R+1)}{4(2R+3)} < \sqrt{\frac{R+1}{2R+3}} \rightarrow (R-3)(R+1) < 0 \rightarrow -1 < R < 3$$

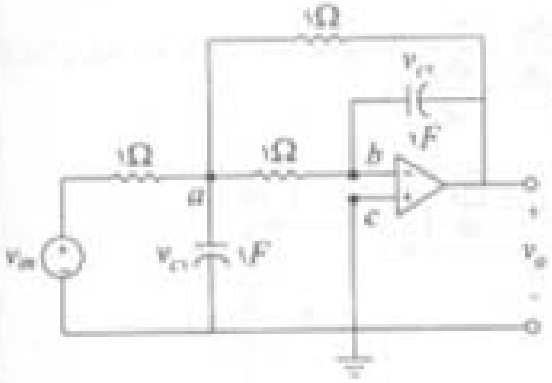
پ ـ با جایگذاری $R = 3$ در معادلات حالت بدست آمده در قسمت (الف) داریم.

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{5}{9}v_C - \frac{1}{9}i_L + \frac{1}{9}v_s \ , \ \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{9}v_C - \frac{7}{9}i_L + \frac{7}{9}v_s$$

و در نهایت v_0 را بر حسب متغیر های حالت بدست خواهیم آورد.

$$v_0 = i_C = \frac{dv_C}{dt} \rightarrow v_0 = -\frac{5}{9}v_C - \frac{1}{9}i_L + \frac{1}{9}v_s$$

مسئله ۷۵



شکل مسئله ۷۵

- معادله دیفرانسیلی بنویسید که v_0 را به v_{in} ارتباط دهد.(شرایط اولیه را V_{C1} و V_{C2} بگیرید.)
- پاسخ پله را تعیین کنید.

حل : با فرض ایده آل بودن آپ امپ ها $v_b = v_c = 0$ بوده و خواهیم داشت.

$$KCL \text{ برای گره } (a) \rightarrow \frac{d}{dt}(0 - v_a) + \frac{0 - v_a}{1} = 0 \rightarrow v_a = -\frac{dv_a}{dt}$$

$$KCL \text{ برای گره } (b) \rightarrow \frac{-\frac{dv_a}{dt} - v_{in}}{1} + \frac{d}{dt}\left(-\frac{dv_a}{dt}\right) + \frac{-\frac{dv_a}{dt} - v_0}{1} + \frac{-\frac{dv_a}{dt}}{1} = 0$$

$$\frac{d^2 v_a}{dt^2} + 3\frac{dv_a}{dt} + v_0 = -v_{in}$$

با توجه به شکل مسئله به راحتی می توان نوشت.

$$v_a(0^+) = V_{C1} \ , \ v_a = -\frac{dv_a}{dt} \rightarrow \frac{dv_a(0)}{dt} = -V_{C1}$$

در ادامه به ازای $v_{in} = u(t) = \begin{cases} 1 \ , \ t > 0 \\ 0 \ , \ t < 0 \end{cases}$ داریم.

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 3\frac{dv_o}{dt} + v_o = -1 \quad , \quad v_o(0^-) = 0 \quad , \quad \frac{dv_o(0^-)}{dt} = 0$$

معادله مشخصه : $s^2 + 3s + 1 = 0 \rightarrow s = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \rightarrow v_o(t) = \underbrace{K_1 e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t} + K_2 e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}t}}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K_3}_{\text{پاسخ خصوصی}}$

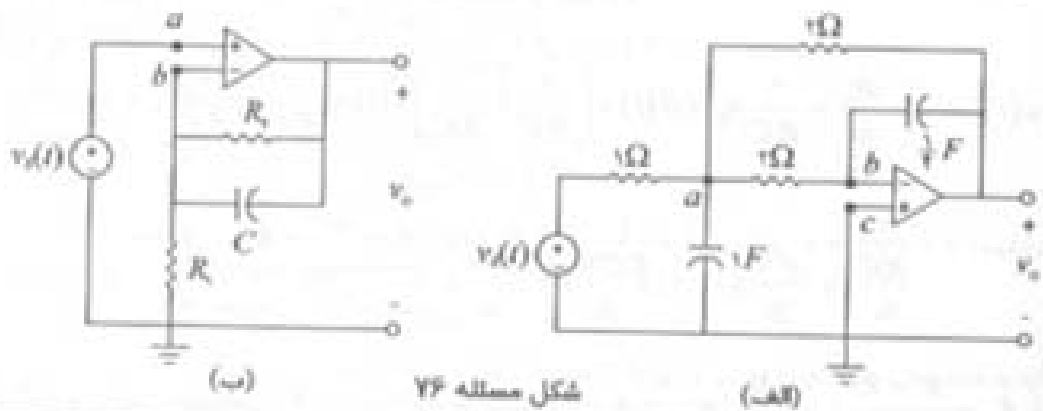
با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $K_3 = -1$ شده و در $t = 0^+$ خازنها اتصال کوتاه می باشند بنابراین خواهیم داشت.

$$\rightarrow \begin{cases} v_o(0^+) = 0 \rightarrow K_1 + K_2 - 1 = 0 \\ \frac{dv_o(0^+)}{dt} = 0 \rightarrow -\frac{3+\sqrt{5}}{2}K_1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}K_2 = 0 \end{cases} \rightarrow K_1 = \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \ , \ K_2 = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}$$

$$\rightarrow v_o(t) = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t} + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}t} - 1 \ , \ t > 0$$

مسئله ۷۶

پاسخ پله v_o را حساب کنید.



شکل مسئله ۷۶

حل : الف ـ با فرض ایده آل بودن آپ امپ $v_b = v_c = 0$ بوده خواهیم داشت.

$$\text{KCL برای گره } b \rightarrow \frac{0 - v_a}{2} + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}(0 - v_o) = 0 \rightarrow v_a = -\frac{1}{2}\frac{dv_o}{dt}$$

$$\text{KCL برای گره } a \rightarrow \frac{-\frac{1}{2}\frac{dv_o}{dt} - v_s}{1} + \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\frac{dv_o}{dt}\right) + \frac{-\frac{1}{2}\frac{dv_o}{dt} - v_o}{2} + \frac{-\frac{1}{2}\frac{dv_o}{dt} - 0}{2} = 0$$

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 2\frac{dv_o}{dt} + v_o = -2v_s = -2u(t) = -2 \ , \ t > 0$$

معادله مشخصه: $s^2 + 2s + 1 = 0 \ \rightarrow \ s = -1 \ , \ -1 \ \rightarrow \ v_o(t) = (K_1 + K_2 t)e^{-t} + K_v \ , \ t > 0$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_v در معادله دیفرانسیل $K_v = -2$ و در $t = 0^+$ خازنها اتصال کوتاه خواهند بود بنابراین داریم

$$\rightarrow \begin{cases} v(0^+) = v_2(0^+) = 0 \ \rightarrow \ K_1 - 2 = 0 \ \rightarrow \ K_1 = 2 \\ \dfrac{dv(0^+)}{dt} = v_2(0^+) = 0 \ \rightarrow \ -K_1 + K_2 = 0 \ \rightarrow \ K_2 = K_1 = 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \ v_o(t) = (2 + 2t)e^{-t} - 2 \ , \ t > 0 \ \rightarrow \ v_o(t) = \left(2(1+t)e^{-t} - 2\right)u(t)$$

ب ـ با فرض اینکه آن بودن آپ امپ $v_s = v_2 = v_o$ بوده و خواهیم داشت

(b) KCL برای گره $\rightarrow \ \dfrac{v_s - v_o}{R_1} + C\dfrac{d}{dt}(v_s - v_o) + \dfrac{v_s}{R_2} = 0$

$$\frac{dv_o}{dt} + \frac{1}{R_1 C}v_o = \frac{dv_s}{dt} + \left(\frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C}\right)v_s$$

در ادامه به ازای $v_s(t) = u(t)$ پاسخ پله را محاسبه خواهیم کرد

$$v_s(t) = u(t) \ \rightarrow \ \frac{dv_o}{dt} + \frac{1}{R_1 C}v_o = \delta(t) + \left(\frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C}\right)u(t) = \frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C} \ , \ t > 0$$

معادله مشخصه: $s + \dfrac{1}{R_1 C} = 0 \ \rightarrow \ s = -\dfrac{1}{R_1 C} \ \rightarrow \ v_o(t) = \underbrace{K_1 e^{-\frac{t}{R_1 C}}}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K_v}_{\text{پاسخ خصوصی}} \ , \ t > 0$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_v در معادله دیفرانسیل $\dfrac{K_v}{R_1 C} = \dfrac{1}{R_1 C} + \dfrac{1}{R_2 C}$ و یا $K_v = \dfrac{R_1 + R_2}{R_2}$ شده و در $t = 0^+$ خازن اتصال کوتاه بوده بنابراین داریم

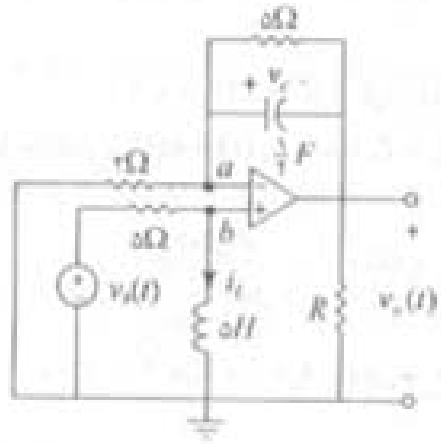
$$v_o(0^+) = v_2(0^+) = v_s(0^+) = 1 \ \rightarrow \ K_1 + \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 1 \ \rightarrow \ K_1 = -\frac{R_1}{R_2}$$

$$\rightarrow \ v_o(t) = -\frac{R_1}{R_2}e^{-\frac{t}{R_1 C}} + \frac{R_1 + R_2}{R_2} \ , \ t > 0$$

مسئله ۷۷

الف- معادله دیفرانسیلی بنویسید که v_o را به v_s ارتباط دهد. شرایط اولیه را مشخص کنید.

ب- v_o را برای ورودی پله واحد و شرایط اولیه صفر تعیین کنید. نقش مقاومت R در تعیین خروجی چیست.



شکل مسئله ۷۷

حل : **الف** ـ با فرض ایده آل بودن آپ امپ و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$\text{KCL برای گره } (b) \rightarrow \frac{v_b - v_s}{5} + i_L = 0 \rightarrow \frac{5\frac{di_L}{dt} - v_s}{5} + i_L = 0 \rightarrow \frac{5Di_L - v_s}{5} + i_L = 0$$

$$\rightarrow i_L = \frac{v_s}{5D+5} \quad , \quad v_a = v_b = 5\frac{di_L}{dt} = 5Di_L = \frac{Dv_s}{D+1}$$

$$\text{KCL برای گره } (a) \rightarrow \frac{v_a - 0}{2} + \frac{v_a - v_o}{5} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v_a - v_c) = 0$$

$$\rightarrow \frac{\frac{Dv_s}{D+1} - 0}{2} + \frac{\frac{Dv_s}{D+1} - v_o}{5} + \frac{1}{2}D\left(\frac{Dv_s}{D+1} - v_c\right) = 0$$

$$\left(5D^2 + 7D + 2\right)v_o = \left(5D^2 + 7D\right)v_s \rightarrow 5\frac{d^2v_o}{dt^2} + 7\frac{dv_o}{dt} + 2v_o = 5\frac{d^2v_s}{dt^2} + 7\frac{dv_s}{dt}$$

در ادامه به محاسبه شرایط اولیه می پردازیم با توجه به شکل مسئله داریم.

$$v_a = v_c + v_o \ , \ v_b = v_s - 5i_L \ , \ v_a = v_b \rightarrow v_c + v_o = v_s - i_L \rightarrow v_o = -v_c - 5i_L + v_s$$

$$\rightarrow v_o(0^+) = -V_c - 5I_o + v_s(0)$$

$$\frac{dv_o}{dt} = -\frac{dv_c}{dt} - 5\frac{di_L}{dt} + \frac{dv_s}{dt} = -2i_c - v_b + \frac{dv_s}{dt}$$

$$\text{KCL برای گره } (a) \rightarrow \frac{v_a - 5i_L - 0}{2} + \frac{v_a - 5i_L - \left(-v_c - 5i_L + v_s\right)}{5} + i_c = 0$$

$$\rightarrow\ i_c = \frac{5i_L - v_C}{2} - \frac{v_C}{5} \ \rightarrow\ \frac{dv_0}{dt} = -2\left(\frac{5i_L - v_C}{2} - \frac{v_C}{5}\right) - \left(v_s - 5i_L\right) + \frac{dv_s}{dt} = \frac{2}{5}v_C + \frac{dv_s}{dt}$$

$$\rightarrow\ \frac{dv_0(0^+)}{dt} = \frac{2}{5}V_0 + \frac{dv_s(0)}{dt}$$

ب ـ با جایگذاری $v_s(t) = u(t)$ و $V_0 = I_0 = 0$ داریم

$$5\frac{d^2v_0}{dt^2} + 7\frac{dv_0}{dt} + 2v_0 = 5\delta'(t) + 7\delta(t) = 0\ ,\ t > 0\ \ ,\ \ v_0(0) = 1\ ,\ \ \frac{dv_0(0)}{dt} = 1$$

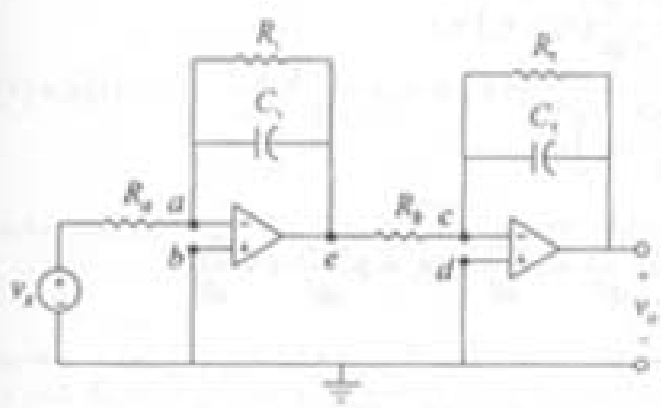
معادله مشخصه : $5s^2 + 7s + 2 = 0 \ \rightarrow\ s = -1\ ,\ -\frac{2}{5} \ \rightarrow\ v_0(t) = K_1e^{-t} + K_2e^{-\frac{2}{5}t}\ ,\ t > 0$

$$\begin{cases} v_0(0) = 1 \ \rightarrow\ K_1 + K_2 = 1 \\ \qquad\qquad \rightarrow\ K_1 = -\frac{2}{3}\ ,\ K_2 = \frac{5}{3} \ \rightarrow\ v_0(t) = \left(-\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{5}{3}e^{-\frac{2}{5}t}\right)u(t) \\ \frac{dv_0(0)}{dt} = 0 \rightarrow\ -K_1 - \frac{2}{5}K_2 = 0 \end{cases}$$

از آنجا که آپ امپ را ایده آل درنظر گرفته ایم. لذا مقاومت خروجی آن برابرصفر بوده و R نقشی درتعیین $v_0(t)$ نخواهد داشت.

مسئله ۷۸

- معادله دیفرانسیل v_0 بر حسب v_s چیست.
- پاسخ پله v_0 را بدست آورید.



شکل مسئله ۷۸

حل : با فرض ایده آل بودن آپ امپ ها $v_a = v_b = 0$ و $v_c = v_d = 0$ بوده و خواهیم داشت.

$$KCL \text{ برای گره } a \ \rightarrow\ \frac{0 - v_s}{R_2} + \frac{0 - v_e}{R_1} + C_1\frac{d}{dt}(0 - v_e) = 0 \ \rightarrow\ \frac{-v_s}{R_2} - \frac{v_e}{R_1} - C_1Dv_e = 0$$

$$\rightarrow\ v_e = -\frac{R_1}{R_1R_2C_1D + R_2}v_s$$

KCL برای گره ⓒ $\rightarrow \dfrac{0-v_o}{R_b}+\dfrac{0-v_o}{R_1}+C_1\dfrac{d}{dt}(0-v_o)=0 \rightarrow v_o=-\dfrac{R_1}{R_1R_bC_1D+R_b}v_s$

$$\rightarrow v_o=\frac{R_1R_2}{(R_1R_bC_1D+R_b)(R_2R_bC_2D+R_b)}v_s$$

$$\left(R_1R_2R_bR_bC_1C_2D^2+R_bR_b(R_1C_1+R_2C_2)D+R_bR_b\right)v_o=R_1R_2v_s$$

$$R_1R_2R_bR_bC_1C_2\frac{d^2v_o}{dt^2}+R_bR_b(R_1C_1+R_2C_2)\frac{dv_o}{dt}+R_bR_bv_o=R_1R_2v_s$$

در ادامه با جایگذاری $v_s(t)=u(t)=1\ ,\ t>0$ پاسخ پله را بدست خواهیم آورد.

$$R_1R_2R_bR_bC_1C_2\frac{d^2v_o}{dt^2}+R_bR_b(R_1C_1+R_2C_2)\frac{dv_o}{dt}+R_bR_bv_o=R_1R_2\ ,\ t>0$$

معادله مشخصه: $R_1R_2R_bR_bC_1C_2s^2+R_bR_b(R_1C_1+R_2C_2)s+R_bR_b=0$

$$\rightarrow R_bR_b(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)=0 \rightarrow s=-\frac{1}{R_1C_1}\ ,\ -\frac{1}{R_2C_2}$$

$$\rightarrow v_o(t)=\underbrace{K_1e^{-\frac{t}{R_1C_1}}+K_2e^{-\frac{t}{R_2C_2}}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_0}_{\text{پاسخ خصوصی}}\ ,\ t>0$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_0 در معادله دیفرانسیل $R_bR_bK_0=R_1R_2$ و یا $K_0=\dfrac{R_1R_2}{R_bR_b}$ شده و با اعمال شرایط اولیه K_1 و K_2 را نیز بدست خواهیم آورد.

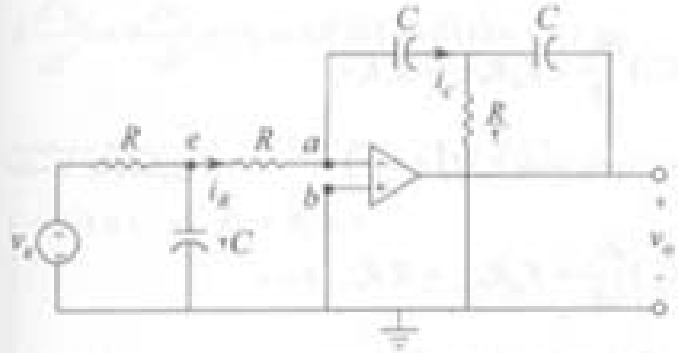
$$\begin{cases} v_o(0)=0 \rightarrow K_1+K_2+\dfrac{R_1R_2}{R_bR_b}=0 \\ \dfrac{dv_o(0)}{dt}=0 \rightarrow \dfrac{K_1}{R_1C_1}+\dfrac{K_2}{R_2C_2}=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_1=-\dfrac{R_1R_2}{R_bR_b}\left(\dfrac{R_2C_2}{R_1C_1-R_2C_2}\right) \\ K_2=\dfrac{R_1R_2}{R_bR_b}\left(\dfrac{R_1C_1}{R_1C_1-R_2C_2}\right) \end{cases}$$

$$\rightarrow v_o(t)=\frac{R_1R_2}{R_bR_b}\left\{\left(-\frac{R_2C_2}{R_1C_1-R_2C_2}\right)e^{-\frac{t}{R_1C_1}}+\left(\frac{R_1C_1}{R_1C_1-R_2C_2}\right)e^{-\frac{t}{R_2C_2}}+1\right\}u(t)$$

مسئله ۷۹

معادله دیفرانسیل v_o بر حسب v_s چیست.

در حالتی که بین این مسئله و مسئله ۷۸، روابط $R_a = R_b = \infty$ و $R_aC_1 = R_bC_2 = RC$ برقرار باشند نتایج را مقایسه کنید. آیا مدار این مسئله مزیتی به مدار مسئله ۷۸ دارد.



شکل مسئله ۷۹

حل : با فرض ایده آل بودن آپ امپ $v_a = v_b = 0$ و $i_c = i_R$ بوده و با توجه به شکل مسئله $v_s = Ri_R$ خواهد بود.

$$\text{KCL برای گره } e \rightarrow \frac{Ri_R - v_s}{R} + 2C\frac{d}{dt}(Ri_R) + i_R = 0 \rightarrow \frac{Ri_R - v_s}{R} + 2RCDi_R + i_R = 0$$

$$\rightarrow i_R = \frac{v_s}{2R^2CD + 2R}$$

$$\text{KCL برای گره } d \rightarrow C\frac{dv_d}{dt} + \frac{v_d}{\frac{R}{2}} + C\frac{d}{dt}(v_d - v_o) = 0$$

$$\rightarrow CDv_d + \frac{2v_d}{R} + CD(v_d - v_o) = 0 \rightarrow v_d = \frac{RCD}{2RDC + 2}v_o$$

$$i_c = -C\frac{dv_d}{dt} = -CDv_d = -\frac{RC^2D^2}{2RCD + 2}v_o$$

$$i_R = i_c \rightarrow \frac{v_s}{2R^2CD + 2R} = -\frac{RC^2D^2}{2RCD + 2}v_o \rightarrow RC^2D^2v_o = -v_s \rightarrow R^2C^2\frac{dv_o}{dt} = -v_s$$

حال روابط داده شده را در معادله دیفرانسیل بدست آمده در مسئله ۷۸ اعمال می کنیم.

$$R_aC_1R_bC_2\frac{d^2v_o}{d^2t} + R_aR_b\left(\frac{C_2}{R_a} + \frac{C_1}{R_b}\right)\frac{dv_o}{dt} + \frac{R_aR_b}{R_1R_2}v_o = v_s$$

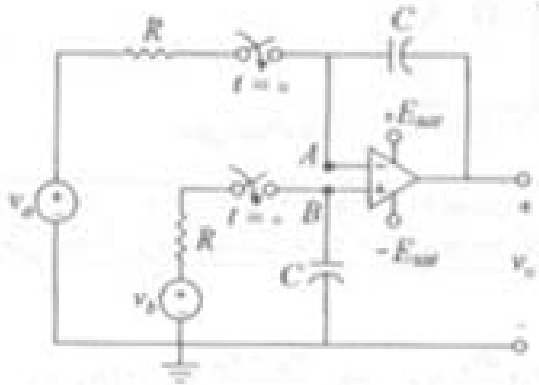
$$R_1 \rightarrow \infty \ , \ R_2 \rightarrow \infty \ , \ R_aC_1 = R_bC_2 = RC \rightarrow R^2C^2\frac{d^2v_o}{dt^2} = v_s$$

بنابراین با مفروضات فوق ملاحظه می شود که دو معادله دیفرانسیل یکسان است و فقط علامت v_o در دو معادله مخالف یکدیگر می باشد. پس هر دو مدار یک کار را انجام می دهند، و چون در مدار مسئله ۷۹ فقط از یک آپ امپ استفاده شده لذا مدار مسئله ۷۹ بهتر می باشد.

مسئله ۸۰

الف- v_o را بر حسب v_a و v_b حساب کنید. (ولتاژ اولیه خازنها صفر است).

ب- اگر $v_a = 25mV$ و $v_b = 5mV$ و $R = 50K\Omega$ و $C = 33nF$ و $E_{sat} = 20V$ باشد چند ثانیه طول می کشد تا آپ امپ اشباع شود.



شکل مسئله ۸۰

حل : الف ـ با فرض ایده آل بودن آپ امپ ها $v_A = v_B$ بوده و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل خواهیم داشت.

$$KCL \text{ برای گره } B \rightarrow \frac{v_B - v_b}{R} + C\frac{dv_B}{dt} = 0 \rightarrow \frac{v_B - v_b}{R} + CDv_B = 0$$

$$\rightarrow v_B = v_A = \frac{1}{RCD+1}v_b$$

$$KCL \text{ برای گره } A \rightarrow \frac{v_A - v_a}{R} + C\frac{d}{dt}(v_A - v_o) = 0$$

$$\rightarrow \frac{\frac{1}{RCD+1}v_b - v_a}{R} + CD\left(\frac{1}{RCD+1}v_b - v_o\right) \;,\; RCD(RCD+1)v_o = (RCD+1)(v_a - v_b)$$

$$\rightarrow Dv_o = \frac{v_a - v_b}{RC} \rightarrow \frac{dv_o}{dt} = \frac{v_a - v_b}{RC} \;,\; v_o(0) = 0$$

ب ـ با جایگذاری مقادیر داده شده داریم.

$$\frac{dv_o}{dt} = \frac{25\times10^{-3} - 5\times10^{-3}}{50\times10^{3}\times33\times10^{-9}} = 25 \rightarrow v_o(t) = v_o(0) + \int_0^t 25dt = 25t$$

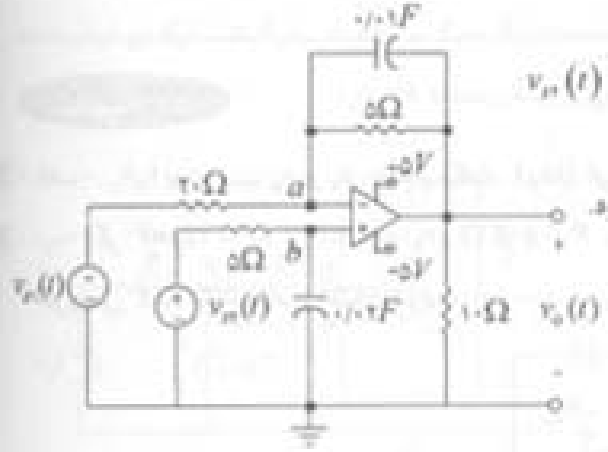
به ازای $v_o(t) = E_{sat} = 20$ آپ امپ اشباع می شود. بنابراین خواهیم داشت.

$$25I = 20 \quad \rightarrow \quad I = \frac{20}{25} = 0/8\,\text{sec}$$

مسئله ۸۱

$v_o(t)$ را برای $v_{s1}(t) = 20u(t)$ و $v_{s2}(t) = 16u(t)$ تعیین کنید.

پس از چند میلی ثانیه آپ امپ اشباع می شود.



شکل مسئله ۸۱

حل : با فرض ایده آل بودن آپ امپ ها $v_a = v_b$ بوده و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل خواهیم داشت.

$$KCL \text{ برای گره } b \quad \rightarrow \quad \frac{v_b - v_{s2}}{5} + 0/02\frac{dv_b}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{v_b - v_{s2}}{5} + 0/02Dv_b = 0$$

$$\rightarrow \quad v_b = v_a = \frac{v_{s2}}{0/1D + 1}$$

$$KCL \text{ برای گره } a \quad \rightarrow \quad \frac{v_a - v_{s1}}{20} + \frac{v_a - v_o}{5} + 0/01\frac{d}{dt}(v_a - v_o) = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{\frac{v_{s2}}{0/1D+1} - v_{s1}}{20} + \frac{\frac{v_{s2}}{0/1D+1} - v_o}{5} + 0/01D\left(\frac{v_{s2}}{0/1D+1} - v_o\right) = 0$$

$$\rightarrow \quad \left(0/02D^2 + 0/6D + 2\right)v_o = -\left(0/1D + 1\right)v_{s1} + \left(0/2D + 5\right)v_{s2}$$

$$\rightarrow \quad 0/02\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 0/6\frac{dv_o}{dt} + 2v_o = -2\delta(t) - 20u(t) + 3/2\delta(t) + 80u(t)$$

$$\rightarrow \quad 0/02\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 0/6\frac{dv_o}{dt} + 2v_o = 20 \;,\quad t > 0$$

معادله مشخصه : $0/02s^2 + 0/6s + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad s = -10,\ -20$

$$\rightarrow \quad v_o(t) = \underbrace{K_1 e^{-10t} + K_2 e^{-20t}}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K_v}_{\text{پاسخ خصوصی}} \;,\quad t > 0$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی درمعادله دیفرانسیل $۴K_v = ۲۰$ و یا $K_v = ۱۰$ خواهد شد. در $t = ۰^+$ خازنها اتصال کوتاه خواهند بود بنابراین $v_o(۰^+) = v_a = v_b = ۰$ بوده و با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در بازه ۰^- تا ۰^+ خواهیم داشت.

$$۰/۰۲\frac{dv_o(۰^+)}{dt} = -۲ + ۲/۲ \quad \rightarrow \quad \frac{dv_o(۰^+)}{dt} = -۲۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} v_o(۰^+) = ۰ \quad \rightarrow \quad K_۱ + K_۲ + ۱۰ = ۰ \\ \dfrac{dv_o(۰^+)}{dt} = -۲۰ \quad \rightarrow \quad -۱۰K_۱ - ۲۰K_۲ = -۲۰ \end{cases} \rightarrow \quad K_۱ = -۲۲ \ , \ K_۲ = ۱۲$$

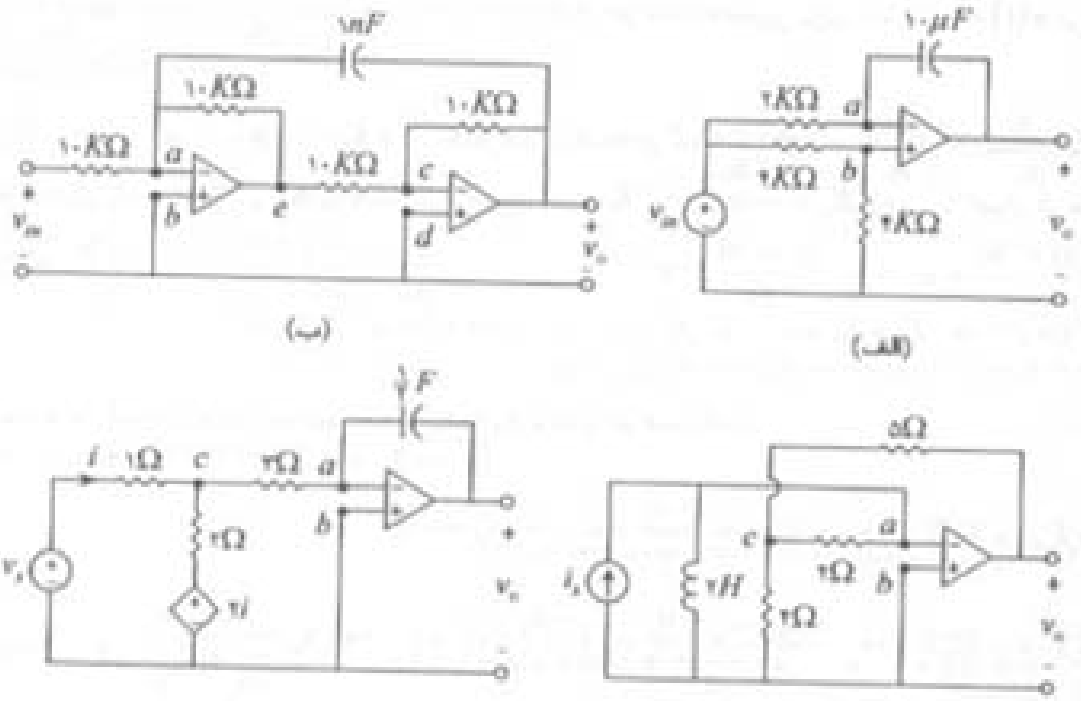
$$\rightarrow \quad v_o(t) = -۲۲e^{-۱۰t} + ۱۲e^{-۲۰t} + ۱۰ \ , \ t > ۰$$

به ازای $v_o(t) = E_{sat} = ۵\,V$ آپ امپ اشباع می شود. بنابراین داریم

$$-۲۲e^{-۱۰t} + ۱۲e^{-۲۰t} + ۱۰ = ۵ \quad \rightarrow \quad t = ۰/۱۴۲\ sec = ۱۴۲\ msec$$

مسئله ۸۴

در مدار های شکل مسئله۸۴ پاسخ پله را بدست آورید.



شکل مسئله ۸۴

حل : الف ـ با فرض اینکه آن بودن آپ امپ $v_b = v_a$ بوده و خواهیم داشت.

KCL برای گره (b) $\rightarrow \dfrac{v_b - v_{in}}{4\times10^{3}} + \dfrac{v_b}{4\times10^{3}} = 0 \rightarrow v_b = v_a = \dfrac{v_{in}}{2}$

KCL برای گره (a) $\rightarrow \dfrac{\frac{v_{in}}{2} - v_{in}}{2\times10^{3}} + 10\times10^{-6}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{v_{in}}{2} - v_o\right) = 0 \rightarrow \dfrac{dv_o}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_{in}}{dt} - 25v_{in}$

$$\rightarrow \frac{dv_o}{dt} = \frac{1}{2}\delta(t) - 25u(t) \rightarrow v_o(t) = \frac{1}{2}u(t) - 25tu(t) = \left(\frac{1}{2} - 25t\right)u(t)$$

ب ـ با فرض اینکه آن بودن آپ امپ ها $v_a = v_b = v_c = v_d = 0$ بوده و خواهیم داشت.

KCL برای گره (a) $\rightarrow \dfrac{0 - v_{in}}{10\times10^{3}} + \dfrac{0 - v_c}{10\times10^{3}} + 1\times10^{-9}\dfrac{d}{dt}(0 - v_o) \rightarrow v_c = -\left(v_{in} + 10^{-9}\dfrac{dv_o}{dt}\right)$

KCL برای گره (c) $\rightarrow \dfrac{0 + \left(v_{in} + 10^{-9}\frac{dv_o}{dt}\right)}{10\times10^{3}} + \dfrac{0 - v_o}{10\times10^{3}} = 0$

$$\rightarrow \frac{dv_o}{dt} - 10^{5}v_o = 10^{5}v_{in} = 10^{5}u(t) = 10^{5}, \quad t > 0$$

در $t = 0^+$ خازن اتصال کوتاه بوده بنابراین $v_o(0^+) = v_a = 0$ خواهدشدهمچنین برای $t > 0$ ، $u(t) = 1$ می باشد بنابراین خواهیم داشت.

معادله مشخصه: $s - 10^{5} = 0 \rightarrow s = 10^{5} \rightarrow v_o(t) = K_1e^{10^{5}t} + K_2 \quad , \quad t > 0$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_3 در معادله دیفرانسیل $-10^{5}K_3 = 10^{5}$ و یا $K_3 = -1$ شده و با اعمال شرط اولیه داریم:

$$v_o(0^+) = 0 \rightarrow K_1 + K_3 = 0 \rightarrow K_1 = 1 \rightarrow v_o(t) = \left(1 - e^{10^{5}t}\right)u(t)$$

پ ـ با فرض اینکه آن بودن آپ امپ ها $v_a = v_b = 0$ بوده و خواهیم داشت.

KCL برای گره (a) $\rightarrow -i_s + 0 + \dfrac{0 - v_c}{2} = 0 \rightarrow v_c = -2i_s$

KCL برای گره (c) $\rightarrow \dfrac{-2i_s - 0}{2} + \dfrac{-2i_s - 0}{2} + \dfrac{-2i_s - v_o}{5} = 0 \rightarrow v_o = -\dfrac{19}{2}i_s$

$$\rightarrow v_o(t) = -\frac{19}{2}u(t)$$

ت ـ با فرض ایده آل بودن آپ امپ ها $v_a = v_b = 0$ بوده و خواهیم داشت.

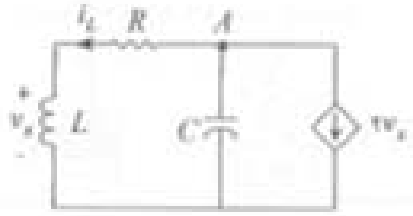
$$i = \frac{v_s - v_c}{1} = v_s - v_c$$

KCL برای گره ⓒ $\rightarrow -(v_s - v_c) + \frac{v_c - 2(v_s - v_c)}{2} + \frac{v_c - 0}{3} = 0 \rightarrow v_c = \frac{12}{17} v_s$

KCL برای گره ⓑ $\rightarrow \frac{0 - \frac{12}{17} v_s}{3} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(0 - v_o) = 0 \rightarrow \frac{dv_o}{dt} = -\frac{8}{17} v_s = -\frac{8}{17} u(t)$

$$\rightarrow v_o(t) = -\frac{8}{17} u(t)$$

مسئله ۸۳



R را چنان تعیین کنید که مدار مانند یک نوسان ساز رفتارنماید. فرکانس نوسانات را نیز تعیین کنید.

شکل مسئله ۸۳

حل :

$$v_s = L\frac{di_L}{dt} \quad , \quad v_c = Ri_L + L\frac{di_L}{dt}$$

KCL برای گره ⓐ $\rightarrow i_L + C\frac{dv_c}{dt} + 2v_s = 0 \rightarrow i_L + C\frac{d}{dt}\left(Ri_L + L\frac{di_L}{dt}\right) + 2L\frac{di_L}{dt} = 0$

$$\rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left(\frac{RC + 2L}{LC}\right)\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = 0 \qquad 2\alpha = \frac{RC + 2L}{LC} \rightarrow \alpha = \frac{RC + 2L}{2LC}$$

به ازای $\alpha = 0$ مدار یک نوسان ساز می باشد بنابراین داریم

$$\alpha = 0 \rightarrow RC + 2L = 0 \rightarrow R = -\frac{2L}{C}$$

در ادامه فرکانسهای نوسانات را به ازای $\alpha = 0$ بدست خواهیم آورد.

$$\alpha = 0 \rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{LC} i_L = 0 \rightarrow \text{معادله مشخصه} : s^2 + \frac{1}{LC} = 0 \rightarrow s = \pm j\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

مسئله ۸۴

معادلات حالت مدار را بنویسید. ($v_C(0) = V_0$ و $i_L(0) = I_0$ و $i_R = -2v_R + v_R^2$)

شکل مسئله ۸۴

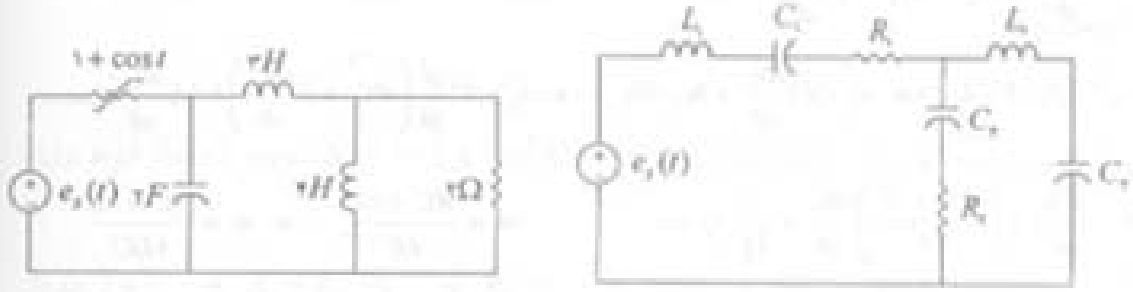
حل : با انتخاب ولتاژ خازن و جریان سلف به عنوان متغیر حالت و با توجه به شکل مسئله داریم.

$$v_L = v_C \quad \rightarrow \quad \frac{di_L}{dt} = v_C$$

$$i_C = -i_R - i_L \quad \rightarrow \quad 2\frac{dv_C}{dt} = 2v_R - v_R^2 - i_L \quad \rightarrow \quad \frac{dv_C}{dt} = 2v_C - \frac{1}{2}v_L^2 - \frac{1}{2}i_L$$

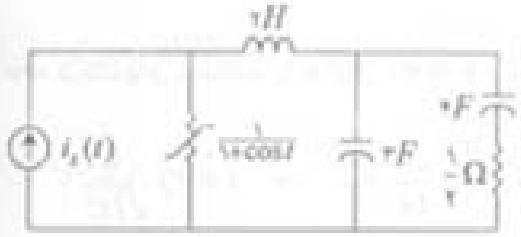
مسئله ۸۵

دوگان مدار های شکل مسئله ۸۵ را رسم کنید.

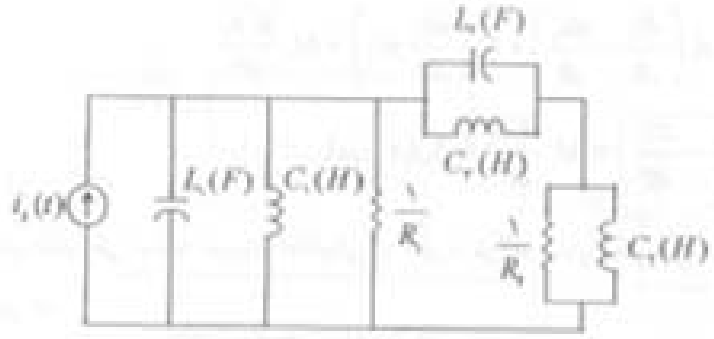


(ب) شکل مسئله ۸۵ (الف)

حل :



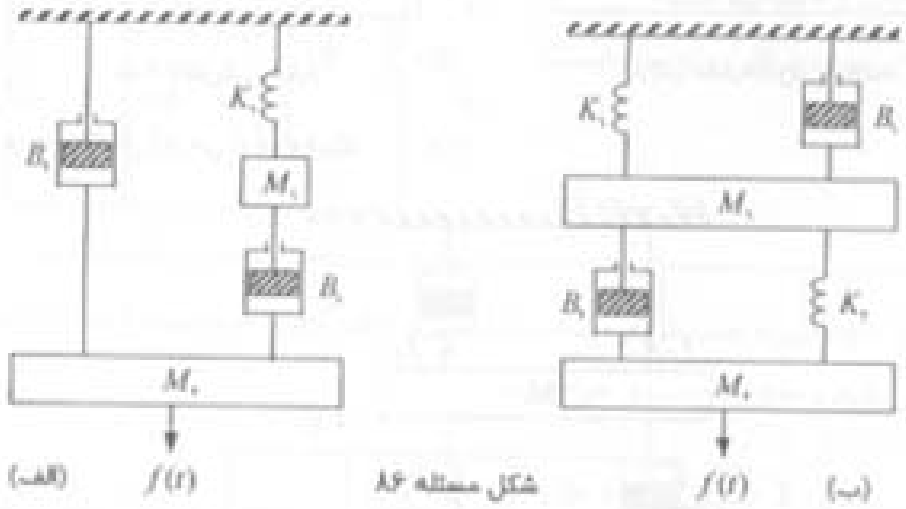
دوگان مدار (ب)



دو کلن مدار (الف)

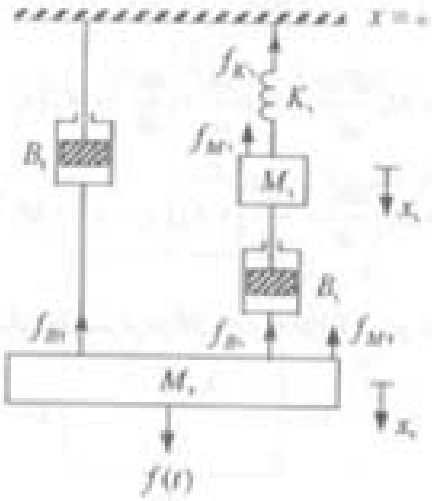
مسئله ۸۶

معادلات حرکت سیستمهای مکانیکی را نوشته و برای هر کدام دو مدار الکتریکی مشابه رسم کنید.



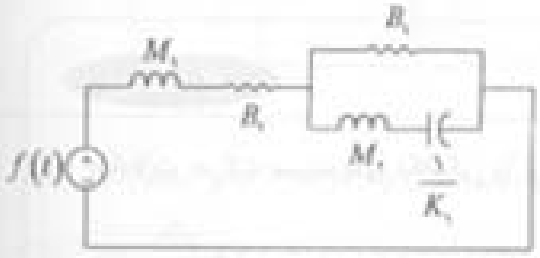
شکل مسئله ۸۶

حل : الف ـ با توجه به شکل زیر می توان نوشت.

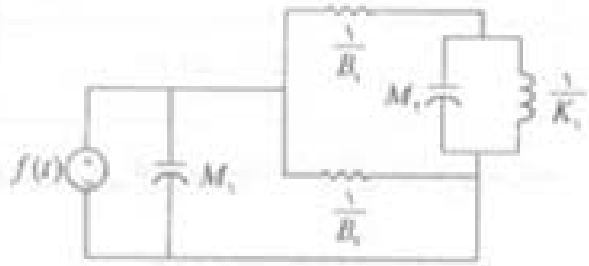


$$\begin{cases} f = f_{B_1} + f_{B_2} + f_{M_1} \rightarrow f(t) = B_1\left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right) + B_2\left(\frac{dx_2}{dt} - 0\right) + M_2\frac{d^2x_2}{dt^2} \\ f_{B_1} = f_{M_1} + f_{K_1} \rightarrow B_1\left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right) = M_1\frac{d^2x_1}{dt^2} + K_1(x_1 - 0) \end{cases}$$

مدار الکتریکی مشابه سیستم مکانیکی به همراه دوگان مدار الکتریکی، دو مدار الکتریکی مشابه سیستم مکانیکی فوق اند.

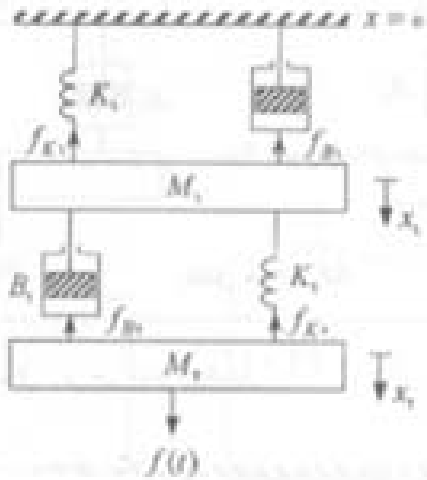


دوگان مدار الکتریکی مشابه



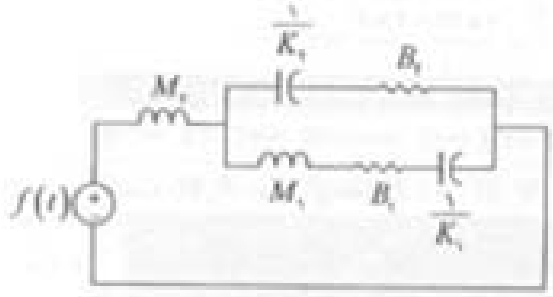
مدار الکتریکی مشابه

ب ـ با توجه به شکل زیر می توان نوشت.

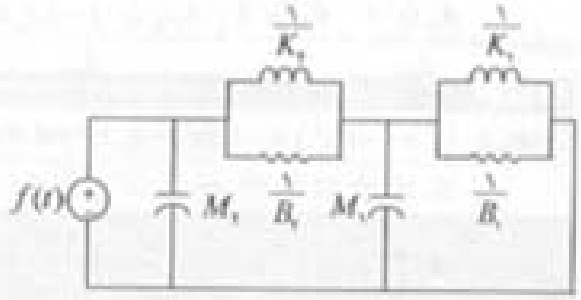


$$\begin{cases} f = f_{M_1} + f_{B_2} + f_{K_2} \rightarrow f(t) = M_2\frac{d^2x_2}{dt^2} + B_2\left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right) + K_2(x_2 - x_1) \\ f_{B_2} + f_{K_2} = f_{M_1} + f_{K_1} + f_{B_1} \rightarrow B_2\left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right) + K_2(x_2 - x_1) = M_1\frac{d^2x_1}{dt^2} + K_1(x_1 - 0) + B_1\left(\frac{dx_1}{dt} - 0\right) \end{cases}$$

مدار الکتریکی مشابه سیستم مکانیکی به همراه دوگان مدار الکتریکی، دو مدار الکتریکی مشابه سیستم مکانیکی فوق اند.



دوگان مدار الکتریکی مشابه

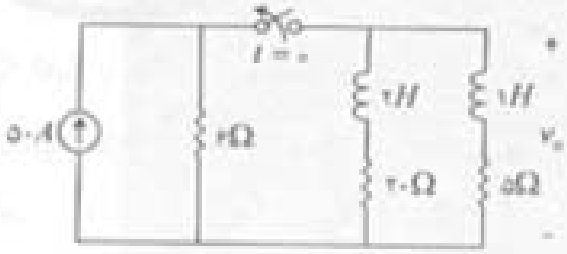


مدار الکتریکی مشابه

مسئله ۸۷

- جریان گذرنده از سلفها را در لحظات 0^- و 0^+ بدست آورید.
- v_o را برای $t \geq 0$ محاسبه کنید.

(کلید برای مدت طولانی بسته بوده است)

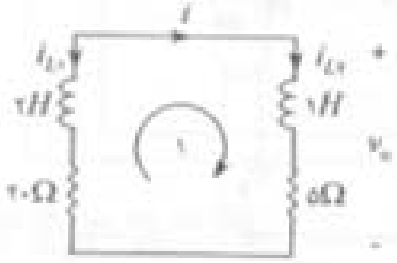


شکل مسئله ۸۷

حل: در $t = 0^-$ کلید به مدت طولانی بسته بوده و مدار به حالت دایمی خود رسیده است. پس سلفها اتصال کوتاه می باشند و مدار بصورت زیر خواهد بود.

$$i_{L_1}(0^-) = \frac{6 \| 5}{6 \| 5 + 20} 50A = 6A \quad , \quad i_{L_2}(0^-) = \frac{6 \| 20}{6 \| 20 + 5} 50A = 24A$$

و به ازای $t > 0$ کلید باز بوده و مدار بصورت زیر می باشد.



$$i_{L_1}(0^+)=\frac{\phi_{eq}(0^+)}{L_{eq}}=\frac{\phi_{eq}(0^-)}{L_{eq}}=\frac{L_1 i_{L_1}(0^-)-L_2 i_{L_2}(0^-)}{L_{eq}}=\frac{1\times 24-2\times 6}{1+2}=4A$$

$$\rightarrow\ i_{L_1}(0^+)=-i(0^+)=-4A\ ,\ \ i_{L_2}(0^+)=i(0^+)=4A$$

در ادامه به محاسبه $v_o(t)$ خواهیم پرداخت.

$$\text{برای مش ۱ } KVL\ \rightarrow\ 2i+2\frac{di}{dt}+\frac{di}{dt}+5i=0\ \rightarrow\ 3\frac{di}{dt}+25i=0\ \rightarrow\ i(t)=Ke^{-\frac{25}{3}t}\ ,\ t\geq 0$$

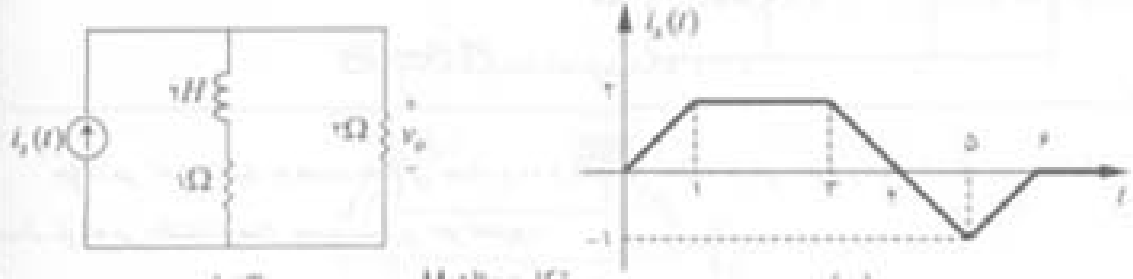
$$i(0^+)=4\ \rightarrow\ K=4\ \rightarrow\ i(t)=4e^{-\frac{25}{3}t}\ ,\ t\geq 0$$

$$v_o(t)=\frac{di}{dt}+5i=4\left(-\frac{25}{3}\right)e^{-\frac{25}{3}t}+5(4)e^{-\frac{25}{3}t}=-13/3e^{-\frac{25}{3}t}\ ,\ t\geq 0$$

مسئله ۸۸

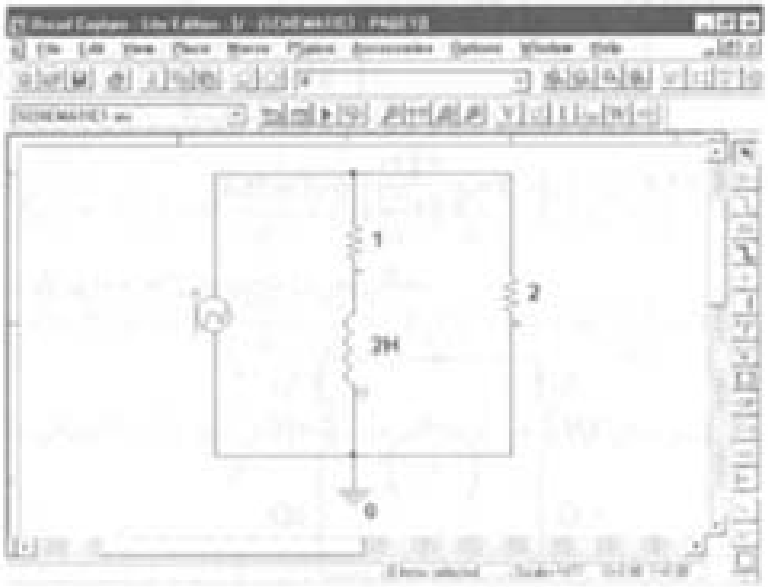
الف- با استفاده از اسپایس ولتاژ v_o را رسم کنید.

ب- خازن $C=\frac{1}{2}F$ را با مقاومت 2Ω موازی کرده قسمت (الف) را تکرار کنید.

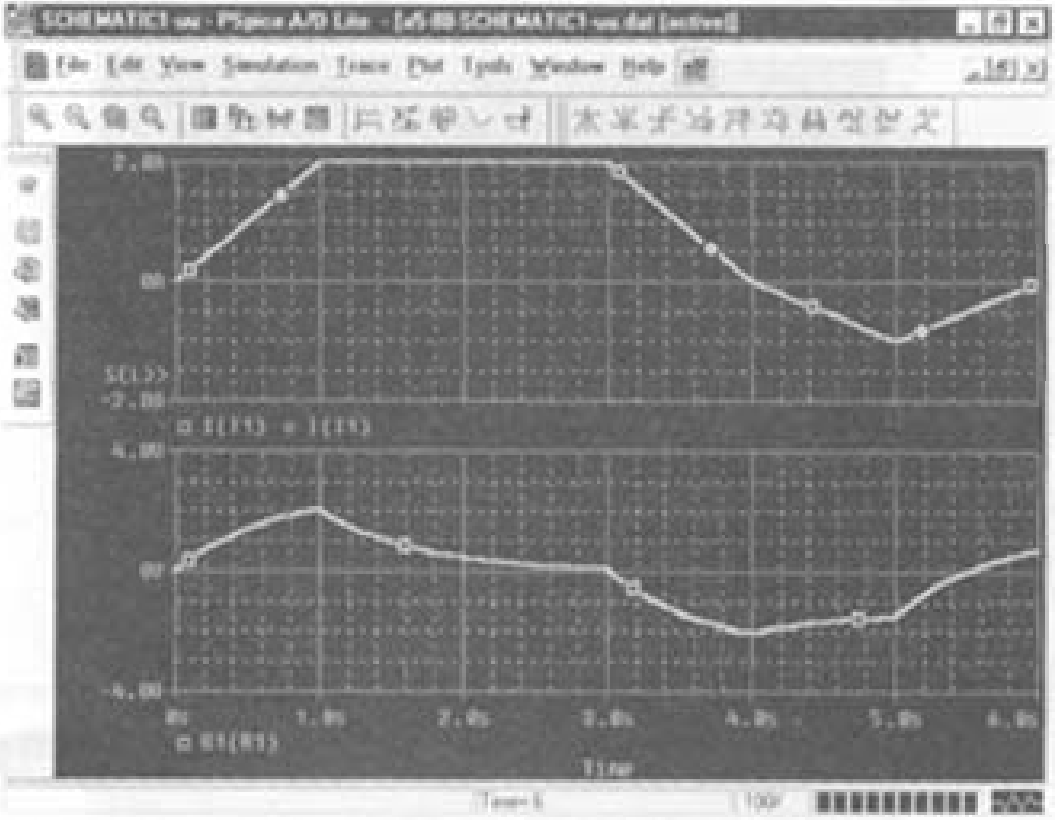


(الف) شکل مسئله ۸۸ (ب)

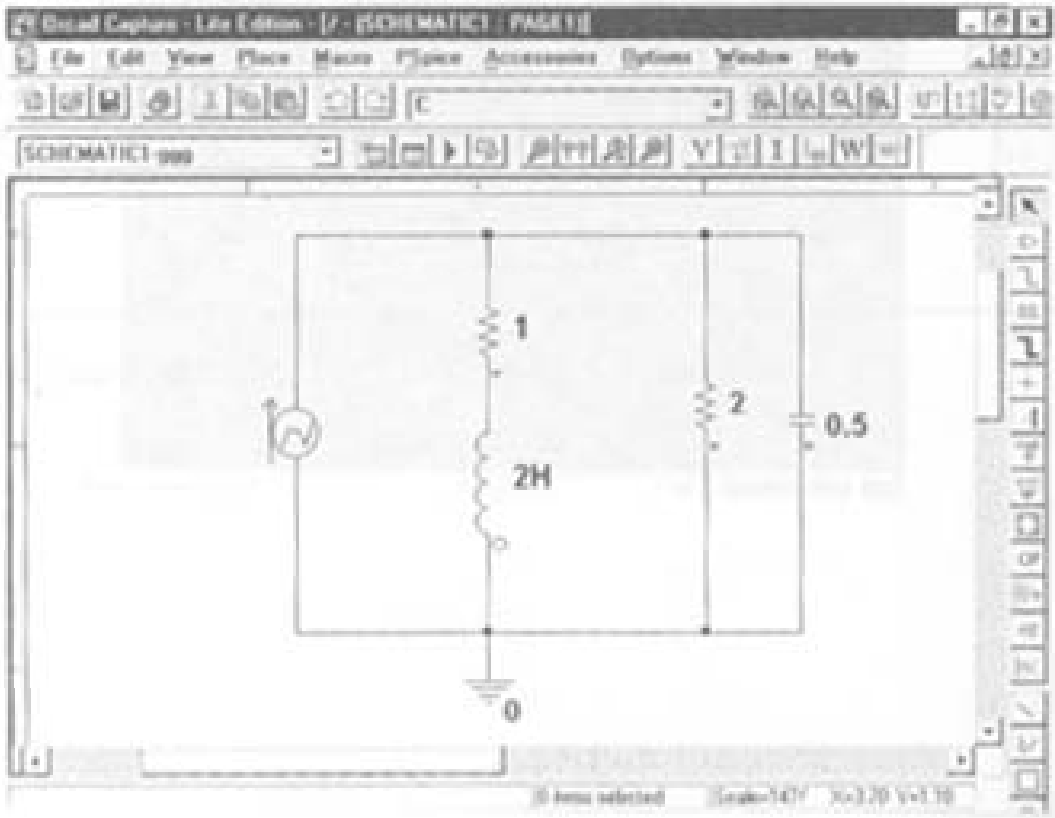
حل : الف ـ ابتدا شماتیک زیر را رسم می کنیم

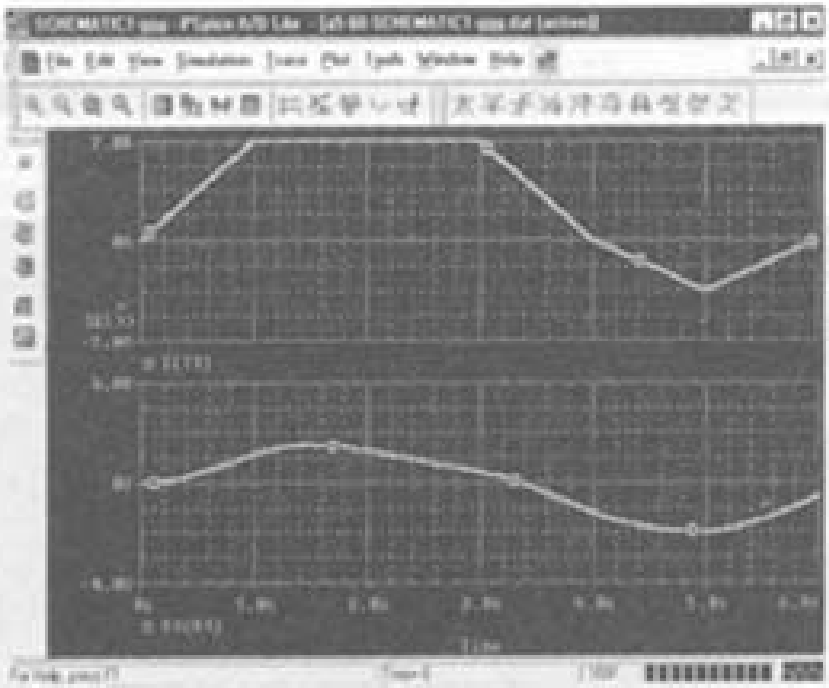


با اجرای شماتیک زیر بصورت ***Time domain*** و دادن مشخصات داده شده، شکل موجهای i_1 و v_2 بصورت زیر بدست خواهند آمد.



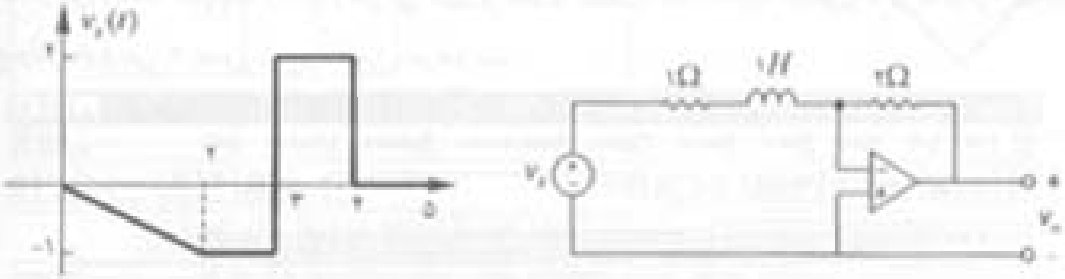
ب - در این حالت شماتیک زیر را رسم می کنیم و همانند قسمت (الف) اجرا خواهیم کرد که با این کار شکل موج ولتاژ خروجی v_2 بصورت زیر حاصل خواهد شد.





مسئله ۸۹

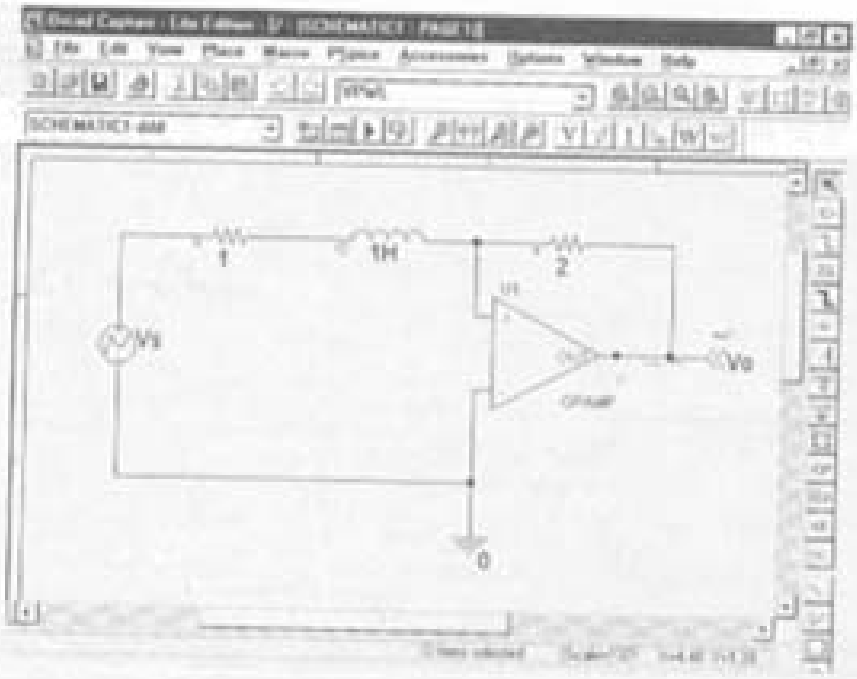
با استفاده از اسپایس v_o را برای $0 < t < 5$ رسم کنید. (آپ- امپ ایده آل است).



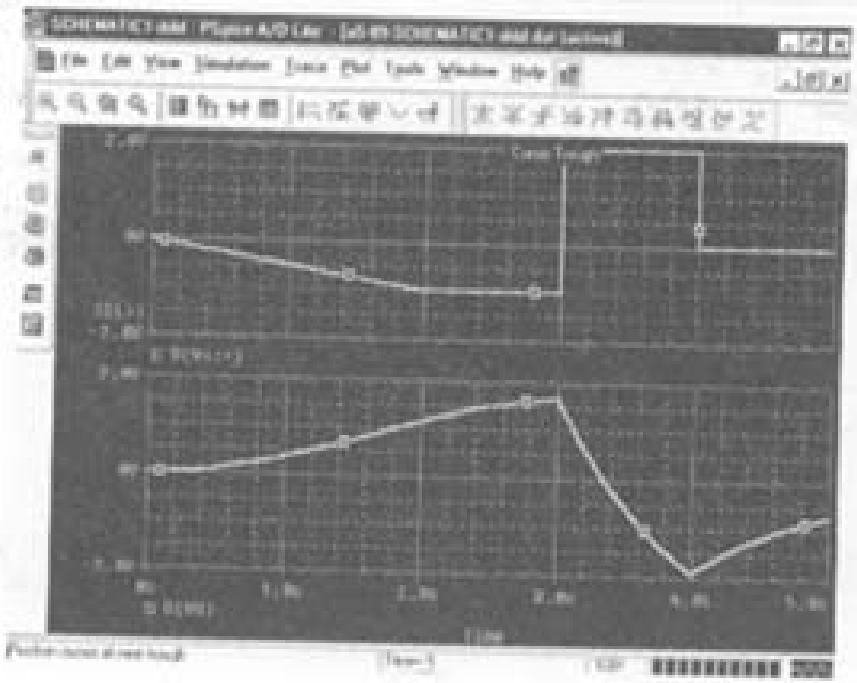
(ب) (الف)

شکل مسئله ۸۹

حل: ابتدا شماتیک زیر را رسم می کنیم که مشخصات v_s به آن داده شده است.

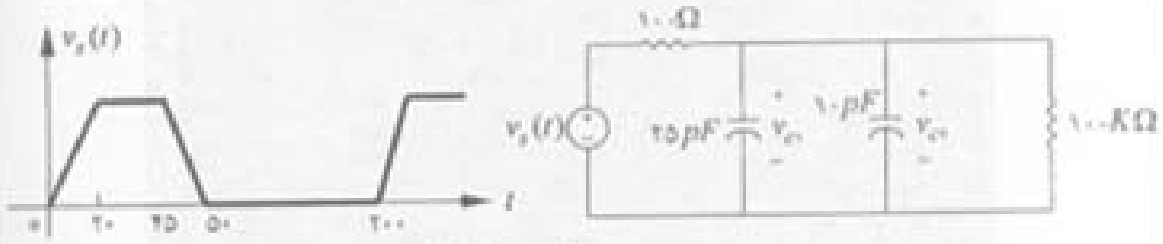


که با اجرای شماتیک فوق بصورت ***Time domain*** شکل موجهای V_s و V_o بصورت زیر رسم خواهند شد.



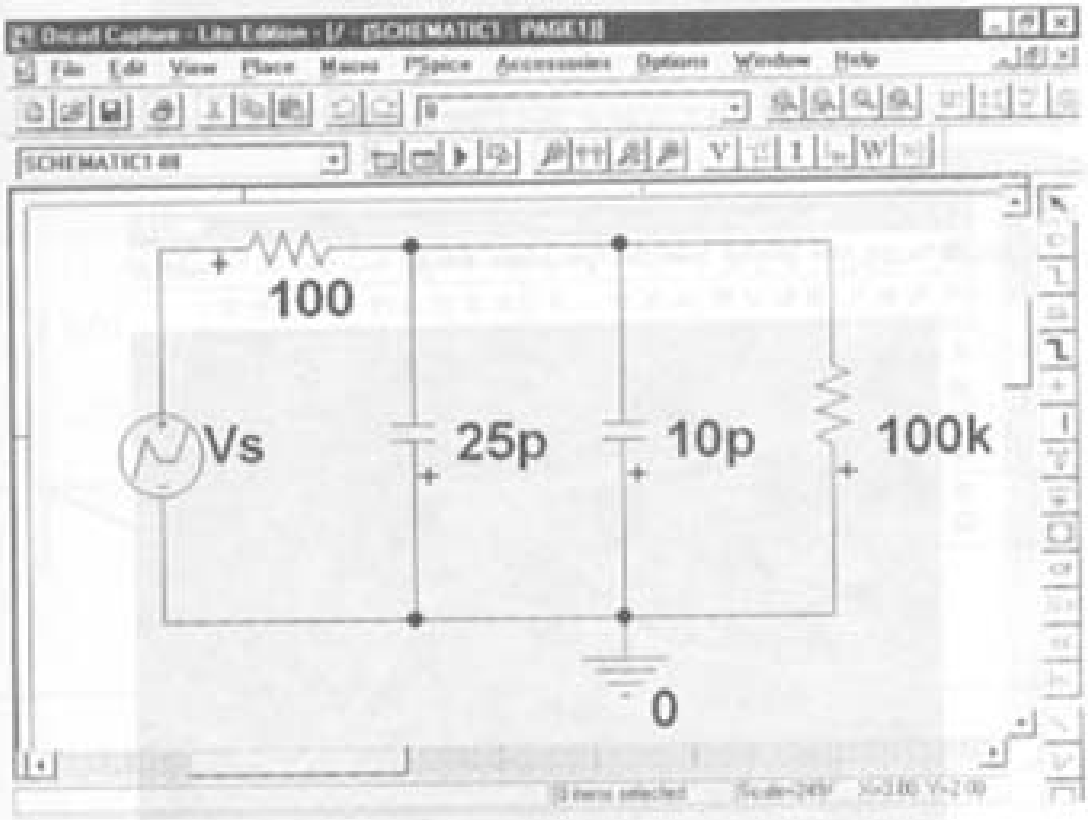
مسئله ۹۰

شکل موجهای v_{o1} و v_{o2} را برای $0 < t < 200\,nsec$ با استفاده از اسپایس رسم کنید.

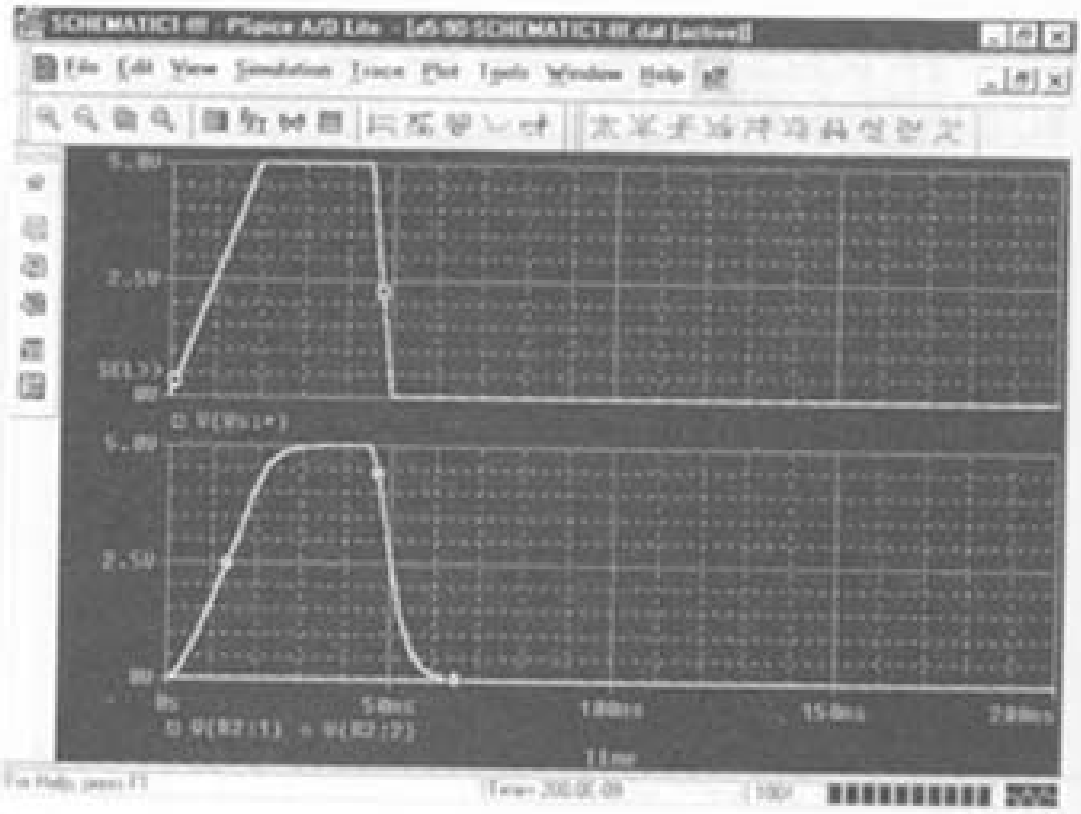


شکل مسئله ۹۰

حل : بدین منظور شماتیک زیر را رسم کرده و مشخصات لازم را اعمال می کنیم.



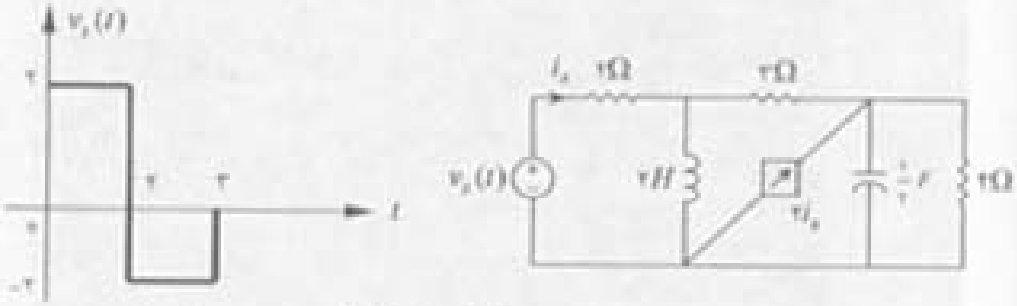
با اجرای شماتیک فوق بصورت ***Time domain*** شکل موجهای ولتاژ خازنها که یکسان می باشند بصورت زیر بدست خواهد آمد.



مسئله ۹۱

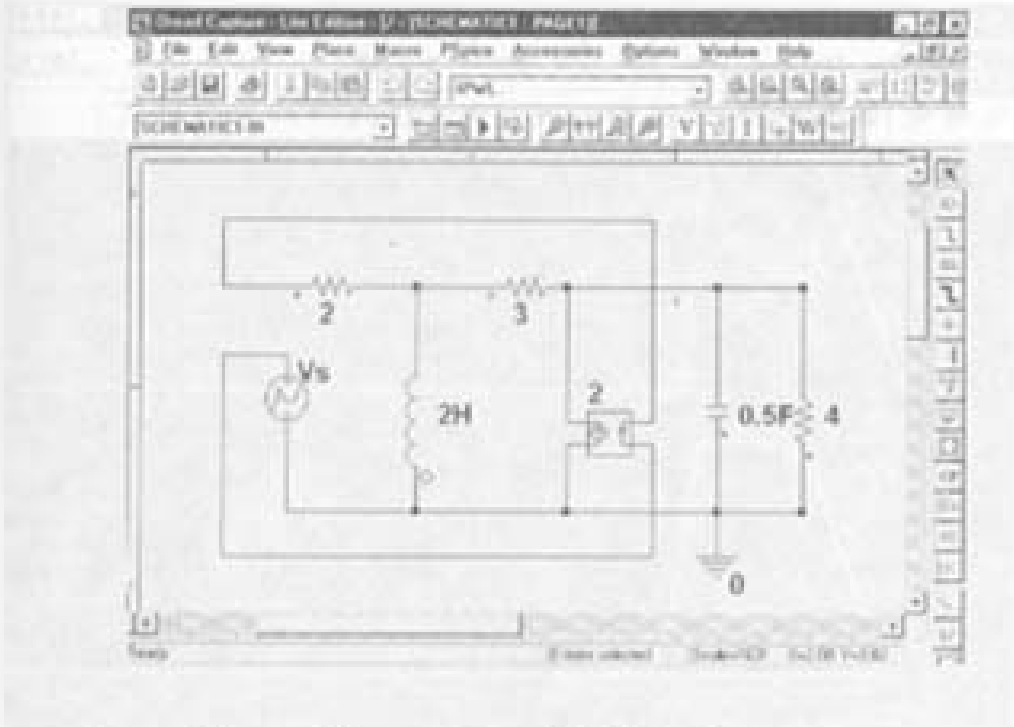
الف- شکل موج ولتاژ خازن v_c را با استفاده از اسپایس رسم کنید.

ب- اگر منبع جریان پله واحدی موازی با مقاومت ۲Ω اضافه شود قسمت (الف) را تکرار کنید.

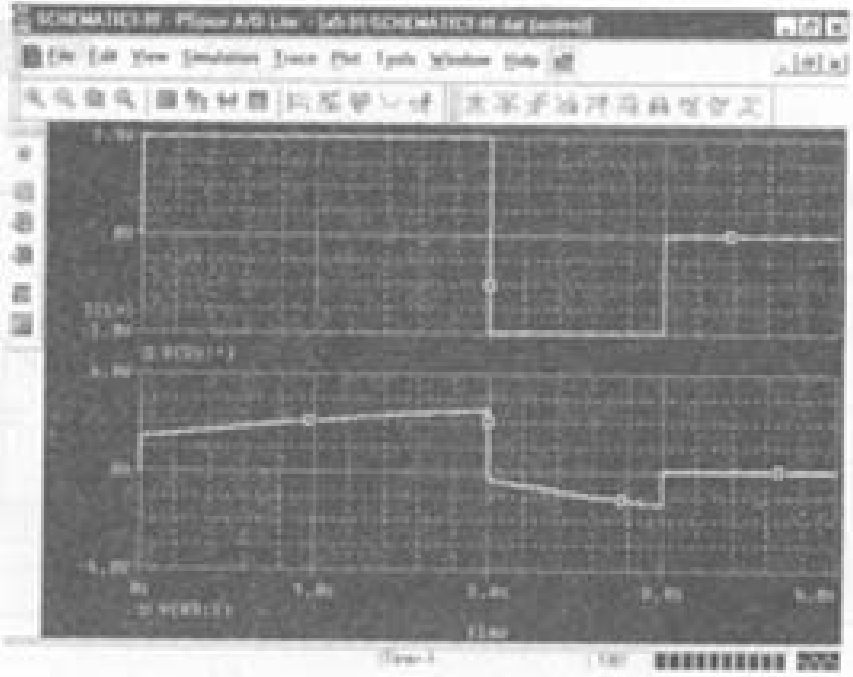


(ب) شکل مسئله ۹۰ (الف)

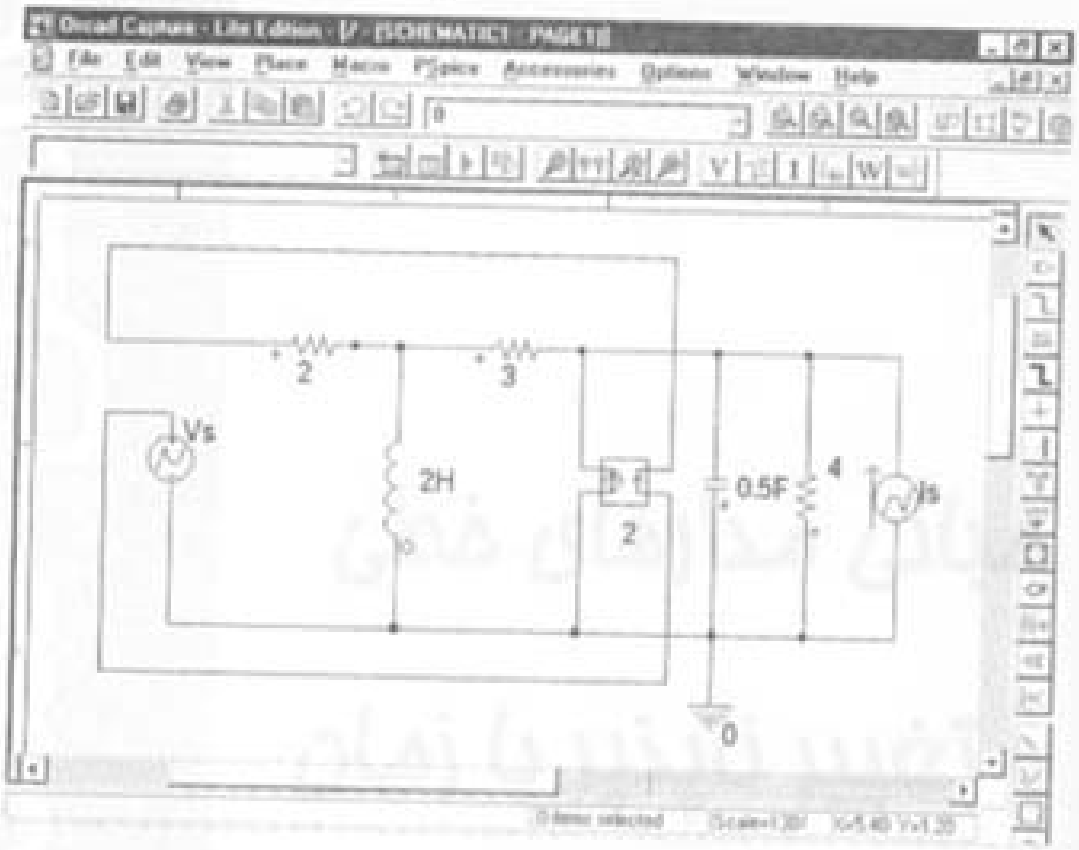
حل : الف ـ بدین منظور شماتیک زیر را رسم می کنیم که مشخصات v_s نیز در آن اعمال شده است.

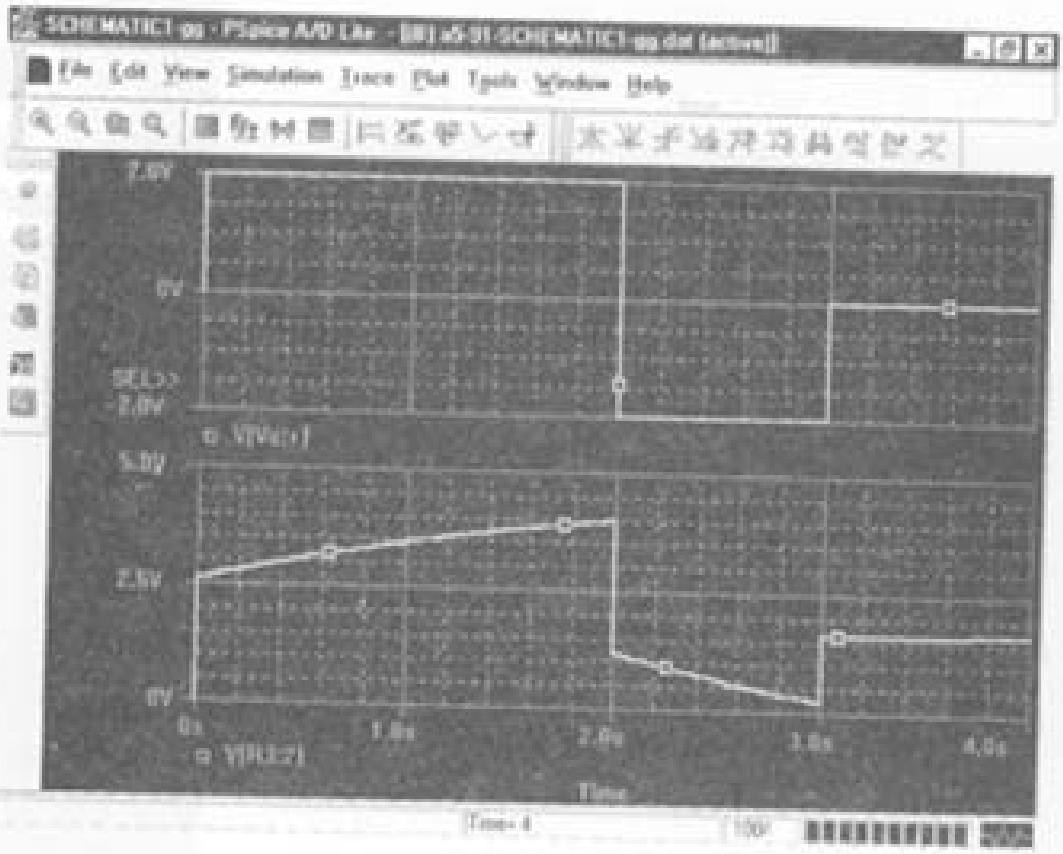


با اجرای شماتیک فوق بصورت ***Time domain*** شکل موجهای v_s و ولتاژ دو سر خازن بصورت زیر بدست خواهند آمد.



ب ـ با اضافه کردن منبع جریان گفته شده و اجرای مجدد قسمت (الف) شکل موجهای v_s و ولتاژ دو سر خازن در این حالت بصورت زیر حاصل خواهند شد.


Orcad Capture - Lite Edition - [/ - [SCHEMATIC1 : PAGE1]]
File Edit View Place Macro PSpice Accessories Options Window Help
2
3
Vs
2H
2
0.5F
4
Is
0


SCHEMATIC1-qq - PSpice A/D Lite - [(1) x5-51-SCHEMATIC1-qq.dat (active)]
File Edit View Simulation Trace Plot Tools Window Help
7.0V
0V
-7.0V
V(Vs:+)
5.0V
2.5V
0V
0s
1.0s
2.0s
3.0s
4.0s
V(R1:2)
Time