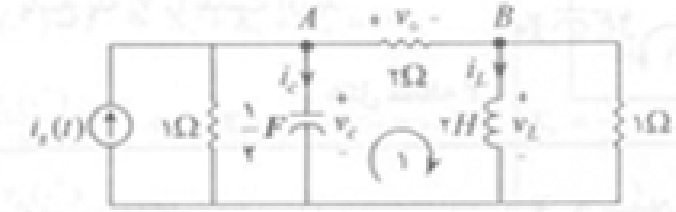
مسئله ۱

۱) معادلات گره را نوشته ومعادله دیفرانسیلی برحسب v_o بدست آورید و شرایط اولیه را مشخص کنید.

$(i_L(0)=I_0 \text{ و } v_c(0)=V_0)$



شکل مسئله ۱

حل : با نوشتن معادلات گره و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات انتگرال- دیفرانسیل خواهیم داشت.

$$\text{KCL برای گره } B \rightarrow -\frac{v_o}{2}+i_L+\frac{2\frac{di_L}{dt}}{1}=0 \rightarrow -\frac{v_o}{2}+(1+2D)i_L \rightarrow i_L=\frac{1}{2(2D+1)}v_o$$

$$\text{KCL برای گره } A \rightarrow -i_s+\frac{v_c}{1}+\frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt}+\frac{v_o}{2}=0 \rightarrow -i_s+\left(1+\frac{D}{2}\right)v_c+\frac{v_o}{2}=0$$

$$\rightarrow v_c=\frac{2i_s-v_o}{D+2}$$

$$\text{KVL برای مش ۱} \rightarrow -v_c+v_o+2\frac{di_L}{dt}=0 \rightarrow -\frac{2i_s-v_o}{D+2}+v_o+2D\left(\frac{1}{2(2D+1)}v_o\right)=0$$

$$\rightarrow (2D^2+9D+2)v_o=(4D+2)i_s \rightarrow 2\frac{d^2v_o}{dt^2}+9\frac{dv_o}{dt}+2\frac{dv_o}{dt}=4\frac{di_s}{dt}+2i_s$$

برای محاسبه شرایط اولیه می توان نوشت

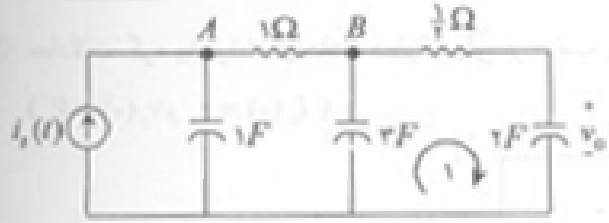
$$\text{KCL برای گره } B \rightarrow -\frac{v_o}{2}+i_L+\frac{v_L}{1}=0 \rightarrow -\frac{v_o}{2}+i_L+\frac{v_c-v_o}{1}=0 \rightarrow v_o=\frac{2}{3}(v_c+i_L)$$

$$\rightarrow v_o(0)=\frac{2}{3}(V_0+I_0)$$

$$\frac{dv_o}{dt}=\frac{2}{3}\left(\frac{dv_c}{dt}+\frac{di_L}{dt}\right)=\frac{2}{3}\left(2i_c+\frac{v_L}{2}\right)=\frac{2}{3}\left(2\left(i_s-\frac{v_c}{1}-\frac{v_o}{2}\right)+\frac{v_c-v_o}{2}\right)=\frac{4}{3}i_s-v_c-v_o$$

$$\rightarrow \frac{dv_o(0)}{dt}=\frac{4}{3}i_s(0)-V_0-\frac{2}{3}(V_0+I_0)=\frac{4}{3}i_s(0)-\frac{5}{3}V_0-\frac{2}{3}I_0$$

مسئله ۲



شکل مسئله ۲

- معادله دیفرانسیلی بر حسب v_o بنویسید.
- پاسخ پله v_o را بدست آورید.

حل : با توجه به شکل مسئله و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات انتگرال- دیفرانسیل داریم.

$$KVL \text{ برای مش ۱} \rightarrow -v_B + \frac{1}{2}\left(2\frac{dv_o}{dt}\right) + v_o = 0 \rightarrow v_B = \frac{dv_o}{dt} + v_o$$

$$KCL \text{ برای گره } B \rightarrow 3\frac{d}{dt}\left(\frac{dv_o}{dt} + v_o\right) + 2\frac{dv_o}{dt} + \frac{\frac{dv_o}{dt} + v_o - v_A}{1} = 0$$

$$\rightarrow v_A = 3\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 6\frac{dv_o}{dt} + v_o$$

$$KCL \text{ برای گره } A \rightarrow -i_s + \frac{d}{dt}\left(3\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 6\frac{dv_o}{dt} + v_o\right) + \frac{\left(3\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 6\frac{dv_o}{dt} + v_o\right) - \left(\frac{dv_o}{dt} + v_o\right)}{1} = 0$$

$$\rightarrow 3\frac{d^3 v_o}{dt^3} + 9\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 6\frac{dv_o}{dt} = i_s$$

در ادامه با جایگذاری $i_s(t) = u(t) = 1 \ , \ t > 0$ پاسخ پله v_o را محاسبه خواهیم کرد.

$$3\frac{d^3 v_o}{dt^3} + 9\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 6\frac{dv_o}{dt} = 1$$

$$\text{معادله مشخصه} : 3s^3 + 9s^2 + 6s = 0 \rightarrow s = 0, -1, -2 \rightarrow v_o(t) = \underbrace{K_1 + K_2 e^{-t} + K_3 e^{-2t}}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K_4 t}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

عدد ثابت K_4 را نمی توان به عنوان پاسخ خصوصی منظور کرد زیرا از پاسخ عمومی بدست می آید. بنابراین $K_4 t$ را به عنوان پاسخ خصوصی منظور می کنیم که باجایگذاری آن در معادله دیفرانسیل $6K_4 = 1$ و یا $K_4 = \frac{1}{6}$ خواهد شد. در ادامه شرایط اولیه را منظور می کنیم. در $t = 0^+$ خازنها اتصال کوتاه خواهند بود بنابراین داریم. (در $t = 0^-$ همه مقادیر را صفر در نظر بگیرید.)

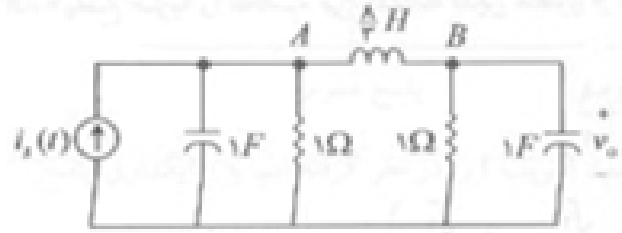
$$\rightarrow v_o(0^+)=0\ ,\ v_B=\frac{dv_o}{dt}+v_o \rightarrow \frac{dv_o(0^+)}{dt}=v_B(0^+)-v_o(0^+)=0-0=0$$

$$v_A=3\frac{d^2v_o}{dt^2}+6\frac{dv_o}{dt}+v_o \rightarrow \frac{d^2v_o(0^+)}{dt^2}=\frac{1}{3}\left(v_A(0^+)-6\frac{dv(0^+)}{dt}-v_o(0^+)\right)=\frac{1}{3}(0-0-0)=0$$

$$\begin{cases} v_o(0^+)=0 \rightarrow K_1+K_2+K_3=0 \\ \dfrac{dv_o(0^+)}{dt}=0 \rightarrow -K_2-2K_3+\dfrac{1}{6}=0 \\ \dfrac{d^2v_o(0^+)}{dt^2}=0 \rightarrow K_2+4K_3=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_1=-\dfrac{1}{4} \\ K_2=\dfrac{1}{3} \\ K_3=-\dfrac{1}{12} \end{cases} \rightarrow v_o(t)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{12}e^{-4t}+\frac{t}{6}$$

مسئله ۳

- معادله دیفرانسیلی بر حسب v_o بنویسید.
- پاسخ پله و ضربه v_o را بدست آورید.



شکل مسئله ۳

حل: با توجه به شکل مسئله می توان نوشت.

$$KCL \text{ برای گره } B \rightarrow \frac{1}{\frac{8}{3}}\int(v_o-v_A)dt+\frac{v_o}{1}+\frac{dv_o}{dt}=0 \rightarrow v_A=\frac{8}{3}\frac{d^2v_o}{dt^2}+\frac{8}{3}\frac{dv_o}{dt}+v_o$$

$$KCL \text{ برای گره } A \rightarrow -i_s+\frac{d}{dt}\left(\frac{8}{3}\frac{d^2v_o}{dt^2}+\frac{8}{3}\frac{dv_o}{dt}+v_o\right)+\frac{\frac{8}{3}\frac{d^2v_o}{dt^2}+\frac{8}{3}\frac{dv_o}{dt}+v_o}{1}$$

$$+\frac{1}{\frac{8}{3}}\int\left(\frac{8}{3}\frac{d^2v_o}{dt^2}+\frac{8}{3}\frac{dv_o}{dt}+v_o-v_o\right)dt=0 \rightarrow 8\frac{d^3v_o}{dt^3}+16\frac{d^2v_o}{dt^2}+14\frac{dv_o}{dt}+6v_o=3i_s$$

برای محاسبه پاسخ پله، $i_s(t)=u(t)=1\ ,\ t>0$ را جایگزین می کنیم.

$$8\frac{d^3v_o}{dt^3}+16\frac{d^2v_o}{dt^2}+14\frac{dv_o}{dt}+6v_o=3\ ,\ t>0$$

معادله مشخصه : $8s^3+16s^2+14s+6=0 \rightarrow s=-1\ ,-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\rightarrow v_o(t)=\underbrace{K_1e^{-t}+e^{-\frac{1}{2}t}\left(K_2\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t+K_3\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_4}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $6K_4 = 3$ و با $K_4 = \frac{1}{2}$ شده و با اعمال شرایط اولیه داریم.

$$\begin{cases} v_o(0) = 0 \;\rightarrow\; K_1 + K_2 + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{dv_o(0)}{dt} = 0 \;\rightarrow\; -K_1 - \frac{1}{2}K_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}K_3 = 0 \;\rightarrow\; K_1 = -\frac{1}{2}\;,\; K_2 = 0\;,\; K_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{d^2 v_o(0)}{dt^2} = 0 \;\rightarrow\; K_1 - \frac{K_2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}K_3 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow s(t) = v_o(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{1}{2}\;,\quad t > 0$$

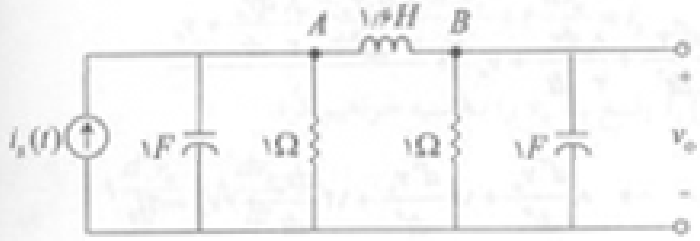
در ادامه پاسخ ضربه را محاسبه می کنیم که بدین منظور از پاسخ پله، مشتق می گیریم.

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\left(-\sqrt{2}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t + \sin\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$$

مسئله ۲

$v_o = ?$ ($i_s(t) = 2e^{-t}u(t)$ و شرایط اولیه صفر است).



شکل مسئله ٤

حل : با توجه به شکل مسئله و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات انتگرال- دیفرانسیل داریم.

KCL برای گره Ⓐ $\rightarrow \frac{1}{1/6}\int(v_o - v_B)dt + \frac{v_o}{1} + \frac{dv_o}{dt} = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{1/6D}(v_o - v_B) + v_o + Dv_o = 0$

$$\rightarrow v_B = \left(1/6D^2 + 1/6D + 1\right)v_o$$

KCL برای گره Ⓑ $\rightarrow -i_s + \frac{dv_B}{dt} + \frac{v_B}{1} + \frac{1}{1/6}\int(v_B - v_o)dt = 0$

$$\rightarrow \quad -i_s + D\left(1/6D^2 + 1/6D + 1\right)v_o + \left(1/6D^2 + 1/6D + 1\right)v_o + \frac{1}{1/6D}\left(1/6D^2 + 1/6D\right)v_o = 0$$

$$\rightarrow \quad \left(8D^3 + 16D^2 + 18D + 10\right)v_o = 5i_s \quad \rightarrow \quad 8\frac{d^3v_o}{dt^3} + 16\frac{d^2v_o}{dt^2} + 18\frac{dv_o}{dt} + 10v_o = 5i_s$$

با جایگذاری $i_s(t) = 2e^{-t}$, $t > 0$ داریم.

$$8\frac{d^3v_o}{dt^3} + 16\frac{d^2v_o}{dt^2} + 18\frac{dv_o}{dt} + 10v_o = 10e^{-t} \quad , \quad t > 0$$

معادله مشخصه : $8s^3 + 16s^2 + 18s + 10 = 0 \quad \rightarrow \quad s = -1 , -\frac{1}{2} \pm j$

$$\rightarrow \quad v_o(t) = \underbrace{K_1e^{-t} + e^{-\frac{1}{2}t}\left(K_2\cos t + K_3\sin t\right)}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K_4te^{-t}}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

برای اینکه پاسخ خصوصی از پاسخ عمومی حاصل نشود ضریب t را در نظر گرفته ایم. با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم.

$$8K_4\left(3e^{-t} - te^{-t}\right) + 16K_4\left(-2e^{-t} + te^{-t}\right) + 18\left(e^{-t} - te^{-t}\right) + 10te^{-t} = 10e^{-t}$$

$$10K_4e^{-t} = 10e^{-t} \quad \rightarrow \quad 10K_4 = 10 \quad \rightarrow \quad K_4 = 1$$

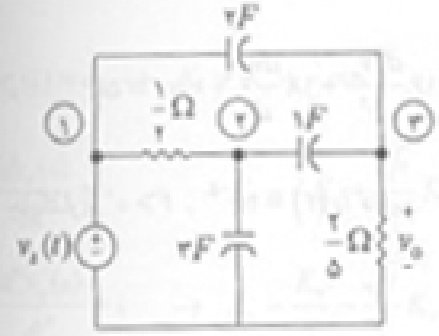
شرایط اولیه صفر بوده و در $t = 0^+$ خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز می باشد بنابراین داریم.

$$\begin{cases} v_o(0^+) = 0 \quad \rightarrow \quad K_1 + K_2 = 0 \\ \dfrac{dv_o(0^+)}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad -K_1 - \frac{1}{2}K_2 + K_3 + 1 = 0 \\ \dfrac{d^2v_o(0^+)}{dt^2} = 0 \quad \rightarrow \quad K_1 - \frac{3}{2}K_2 - K_3 - 2 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} K_1 = \frac{2}{5} \\ K_2 = -\frac{2}{5} \\ K_3 = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad v_o(t) = \frac{2}{5}e^{-t} - e^{-\frac{1}{2}t}\left(\frac{2}{5}\cos t + \frac{3}{5}\sin t\right) + te^{-t} \quad , \quad t > 0$$

مسئله ۵

معادله دیفرانسیلی بنویسید که v_o را به v_s ارتباط دهد.
پاسخ پله را حساب کنید.



شکل مسئله ۵

حل : با توجه به شکل مسئله و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$KCL \text{ برای گره ۲} \rightarrow \frac{v_2 - v_s}{\frac{1}{2}} + 2\frac{dv_2}{dt} + \frac{d(v_2 - v_o)}{dt} = 0$$

$$\rightarrow 2v_2 - 2v_s + 2Dv_2 + D(v_2 - v_o) = 0 \rightarrow v_2 = \frac{Dv_o + 2v_s}{4D+2}$$

$$KCL \text{ برای گره ۳} \rightarrow \frac{d}{dt}(v_o - v_2) + 2\frac{d}{dt}(v_o - v_s) + \frac{v_o}{\frac{2}{5}} = 0$$

$$\rightarrow D\left(v_o - \frac{Dv_o + 2v_s}{4D+2}\right) + 2D(v_o - v_s) + \frac{5}{2}v_o = 0 \rightarrow \left(11D^2 + 16D + 5\right)v_o = \left(8D^2 + 6D\right)v_s$$

$$\rightarrow 11\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 16\frac{dv_o}{dt} + 5v_o = 8\frac{d^2 v_s}{dt^2} + 6\frac{dv_s}{dt}$$

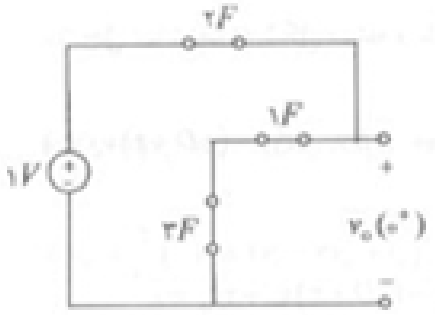
و برای محاسبه پاسخ پله $v_s(t) = u(t)$ را جایگذاری می کنیم.

$$11\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 16\frac{dv_o}{dt} + 5v_o = 8\delta'(t) + 6\delta(t)$$

ازآنجا که آخرین درجه مشتق توابع ویژه ازدرجه مشتقات v_o کمتر است لذا پاسخ v_o شامل تابع ویژه ای نخواهد بود.

$$\text{معادله مشخصه}: 11s^2 + 16s + 5 = 0 \rightarrow s = -1, -\frac{5}{11} \rightarrow v_o(t) = \left(K_1 e^{-t} + K_2 e^{-\frac{5}{11}t}\right), \ t > 0$$

در $t = 0^+$ خازنها اتصال کوتاه خواهند بود و مدار بصورت زیر خواهد شد.



$$\rightarrow \quad v_o(0^+) = \frac{2}{2+\frac{1\times 3}{1+3}}1V = \frac{8}{11}V$$

با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله "۰ تا "۰ داریم.

$$11\frac{dv_o(0^+)}{dt} + 16\left(\frac{8}{11}\right) = 6 \quad \rightarrow \quad \frac{dv_o(0^+)}{dt} = -\frac{62}{121}$$

$$\begin{cases} v_o(0^+) = \frac{8}{11} \rightarrow K_1 + K_2 = \frac{8}{11} \\ \frac{dv_o(0^+)}{dt} = -\frac{62}{121} \rightarrow -K_1 - \frac{5}{11}K_2 = -\frac{62}{121} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_1 = \frac{1}{3} \\ K_2 = \frac{13}{33} \end{cases} \rightarrow v_o(t) = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{13}{33}e^{-\frac{5}{11}t}, t > 0$$

روش دوم : در این روش $v_o(t) = \left(K_1 e^{-t} + K_2 e^{-\frac{5}{11}t}\right)u(t)$ در نظر گرفته شده و با جایگذاری در معادله دیفرانسیل K_1 و K_2 بدست خواهند آمد که قدری طولانی تر می باشد.

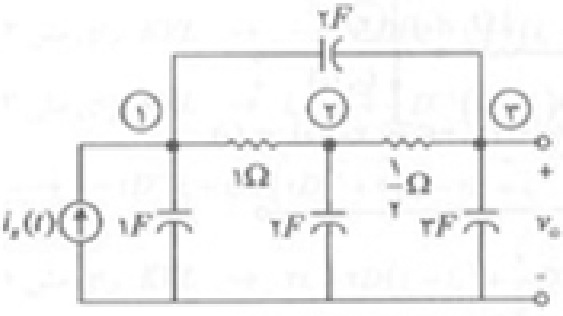
$$11\frac{d^2}{dt^2}\left\{(K_1 e^{-t} + K_2 e^{-\frac{5}{11}t})\,u(t)\right\} + 16\frac{d}{dt}\left\{(K_1 e^{-t} + K_2 e^{-\frac{5}{11}t})\,u(t)\right\} + 5(K_1 e^{-t} + K_2 e^{-\frac{15}{11}t})\,u(t)$$

$$= 8\delta'(t) + 6\delta(t)$$

$$\rightarrow 11(K_1 + K_2)\delta'(t) + \left\{\frac{262}{31}K_1 + \frac{330}{31}K_2\right\}\delta(t) = 8\delta'(t) + 6\delta(t) \rightarrow \begin{cases} K_1 + K_2 = \frac{8}{11} \\ \frac{262}{31}K_1 + \frac{330}{31}K_2 = 6 \end{cases}$$

$$\rightarrow K_1 = \frac{1}{3}, \; K_2 = \frac{13}{33}$$

مسئله ۶



شکل مسئله ۶

- معادله دیفرانسیلی برحسب v_o با استفاده از روش تحلیل گره تشکیل دهید.
- مرتبه معادله چیست وآن راچگونه توجیح می کنید.
- شرایط اولیه را برحسب ولتاژاولیه خازنها مشخص کنید.

حل : با توجه به شکل مسئله و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$KCL \text{ برای گره } ② \rightarrow 2D(v_o - v_1) + \frac{v_o - v_2}{\frac{1}{2}} + 3Dv_o = 0 \rightarrow 2Dv_1 + 2v_2 - (5D+2)v_o = 0$$

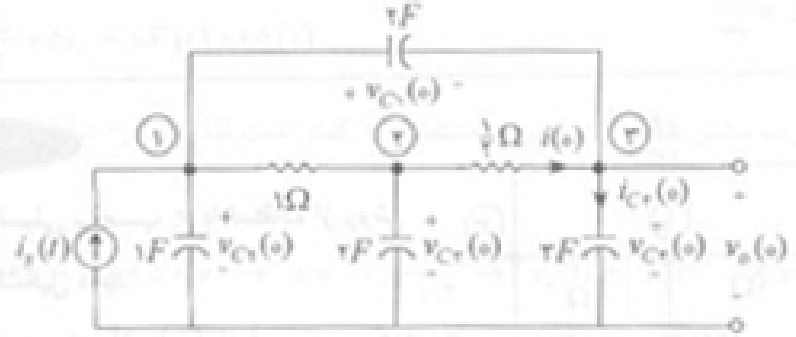
$$KCL \text{ برای گره } ③ \rightarrow \frac{v_3 - v_1}{1} + 2Dv_3 + \frac{v_3 - v_o}{\frac{1}{2}} = 0 \rightarrow v_1 - (2D+3)v_3 + 2v_o = 0$$

$$KCL \text{ برای گره } ① \rightarrow -i_s + Dv_1 + 2D(v_1 - v_o) + \frac{v_1 - v_3}{1} = 0 \rightarrow (3D+1)v_1 - v_3 - 2Dv_o = i_s$$

$$\rightarrow v_o = \frac{\begin{vmatrix} 2D & 2 & 0 \\ 1 & -(2D+3) & 0 \\ 3D+1 & -1 & i_s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2D & 2 & -(5D+2) \\ 1 & -(2D+3) & 2 \\ 3D+1 & -1 & -2D \end{vmatrix}} = \frac{2D^2 + 6D + 2}{22D^3 + 55D + 12D} i_s$$

$$\rightarrow 22\frac{d^3 v_o}{dt^3} + 55\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 12\frac{dv_o}{dt} = 2\frac{d^2 i_s}{dt^2} + 6\frac{di_s}{dt} + 2i_s$$

ملاحظه می شود که معادله درجه سه و لذا مدار مرتبه سوم است. با نگاهی به مدار چهار عنصر ذخیره کننده انرژی (خازن) دیده می شود وانتظار می رود که مدار مرتبه چهار باشد ولی با کمی دقت ملاحظه می شود که سه تا از خازنها تشکیل یک حلقه می دهند بنابراین ولتاژ آنها به هم وابسته بوده و در تعیین مرتبه مدار یکی از سه خازن فوق منظور نخواهد شد. پس در مجموع سه خازن را در نظر گرفته و مرتبه مدار سه خواهد بود. در ادامه به محاسبه شرایط اولیه بر حسب ولتاژ خازنها خواهیم پرداخت بدین منظور شکل زیر را در نظر می گیریم.



$$v_o(0) = v_{C_3}(0)$$

و با توجه به KCL های نوشته شده در قسمت قبل داریم.

$$2Dv_1 + 4v_1 - (5D+2)v_o = 0 \quad \rightarrow \quad Dv_1 = \frac{5}{2}Dv_o + v_o - v_1$$

$$(3D+1)v_1 - v_1 - 2Dv_o = i_s \quad \rightarrow \quad 3\left(\frac{5}{2}Dv_o + v_o - v_1\right) + v_1 - v_1 - 2Dv_o = i_s$$

$$Dv_o = \frac{2}{11}\left(-v_1 + 4v_1 - 3v_o + i_s\right) \quad \rightarrow \quad \frac{dv_o(0)}{dt} = \frac{2}{11}\left(-v_{C1}(0) + 4v_{C1}(0) - 3v_{C2}(0) + i_s(0)\right)$$

$$v_1 - (2D+3)v_1 + 2v_o = 0 \quad \rightarrow \quad 2Dv_1 = 2v_1 - 6v_1 + 4v_o$$

$$D^2 v_o = \frac{2}{11}\left(-Dv_1 + 4Dv_1 - 3Dv_o + Di_s\right)$$

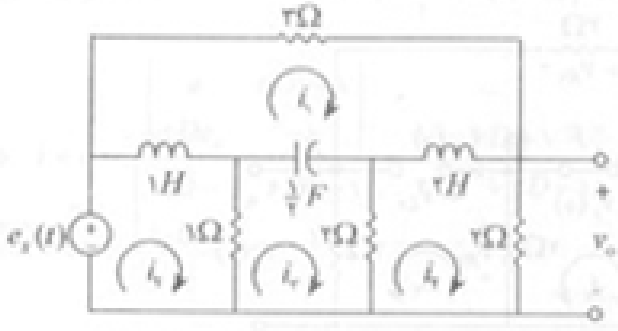
$$= \frac{2}{11}\left\{\left(-\frac{5}{2}Dv_o - v_o + v_1\right) + \left(2v_1 - 6v_1 + 4v_o\right) - 3Dv_o + Di_s\right\}$$

$$= \frac{2}{11}\left\{-\frac{11}{2}\left[\frac{2}{11}\left(-v_1 + 4v_1 - 3v_o + i_s\right)\right] + 2v_1 - 6v_1 + 4v_o + Di_s\right\} = \frac{2}{11}\left(3v_1 - 10v_1 + 7v_o + Di_s - i_s\right)$$

$$\rightarrow \quad \frac{d^2 v_o(0)}{dt^2} = \frac{2}{11}\left(3v_{C1}(0) - 10v_{C2}(0) + 7v_{C3}(0) + \frac{di_s(0)}{dt} - i_s(0)\right)$$

مسئله ۷

با استفاده از روش تحلیل مش معادله دیفرانسیلی بر حسب v_o تشکیل دهید و شرایط اولیه را مشخص کنید.



شکل مسئله ۷

حل : با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات انتگرال- دیفرانسیل داریم.

$$KVL \text{ برای مش ۲} \quad \rightarrow \quad -e_s + D(i_2 - i_1) + (i_2 - i_3) = 0 \quad \rightarrow \quad -Di_1 + (D+1)i_2 - i_3 = e_s$$

$$KVL \text{ برای مش ۳} \quad \rightarrow \quad i_3 - i_2 + \frac{1}{2}D^{-1}(i_3 - i_1) + 2(i_3 - i_4) = 0$$

$$\rightarrow \quad -2D^{-1}i_1 - i_2 + \left(2D^{-1} + 3\right)i_3 - 2i_4 = 0$$

$$KVL \text{ برای مش ۱} \quad \rightarrow \quad 3i_1 + 2D(i_1 - i_2) + \frac{1}{2}D^{-1}(i_1 - i_3) + D(i_1 - i_4) = 0$$

$$\rightarrow \left(2D+2D^{-1}+3\right)i_1 - Di_2 - 2D^{-1}i_3 - 2Di_4 = 0$$

برای مش ۲ $KVL \rightarrow 2\left(i_2-i_1\right)+2D\left(i_2-i_3\right)+2i_4=0 \rightarrow -2Di_1-2i_2-2i_3+\left(2D+2\right)i_4=0$

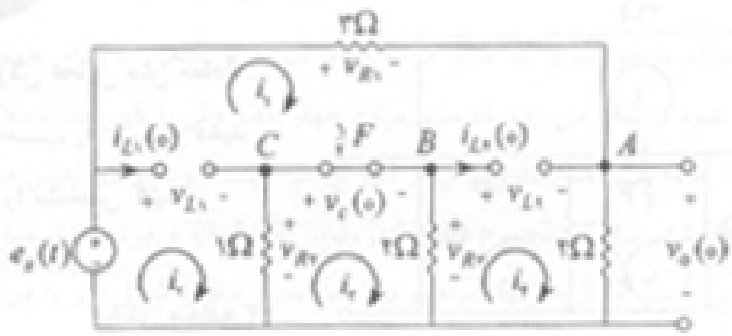
با استفاده از روش کرامر در حل دستگاه چهار معادله چهار مجهولی فوق خواهیم داشت.

$$\rightarrow v_o = 2i_4 = 2\frac{\begin{vmatrix} -D & D+1 & -1 & e_s \\ -2D^{-1} & -1 & 2D^{-1}+3 & 0 \\ 2D+2D^{-1}+3 & -D & -2D^{-1} & 0 \\ -2D & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -D & D+1 & -1 & 0 \\ -2D^{-1} & -1 & 2D^{-1}+3 & -2 \\ 2D+2D^{-1}+3 & -D & -2D^{-1} & 2D \\ -2D & -2 & -2 & 2D+4 \end{vmatrix}} = \frac{12D^3+20D^2+28D+4}{30D^4+56D^3+74D+32}e_s$$

$$\rightarrow \left(30D^4+56D^3+74D+32\right)v_o = \left(12D^3+20D^2+28D+4\right)e_s$$

$$\rightarrow 30\frac{d^4v_o}{dt^4}+56\frac{d^3v_o}{dt^3}+74\frac{dv_o}{dt}+32v_o = 12\frac{d^3e_s}{dt^3}+20\frac{d^2e_s}{dt^2}+28\frac{de_s}{dt}+4e_s$$

در $t=0$ سلفها مدار باز و خازن اتصال کوتاه می باشد.



برای گره A $KCL \rightarrow \frac{v_o}{2}-i_{L_1}+\frac{v_o-e_s}{3}=0 \rightarrow v_o=\frac{2}{5}e_s+\frac{6}{5}i_{L_1}$

$$\rightarrow v_o(0)=\frac{2}{5}e_s(0)+\frac{6}{5}i_{L_1}(0)$$

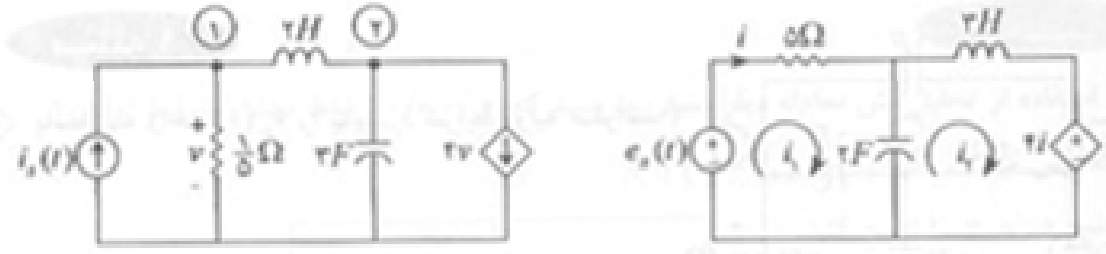
$$\frac{dv_o}{dt}=\frac{2}{5}\frac{de_s}{dt}+\frac{6}{5}\frac{di_{L_1}}{dt}=\frac{2}{5}\frac{de_s}{dt}+\frac{6}{10}v_{L_1}=\frac{2}{5}\frac{de_s}{dt}+\frac{6}{10}\left(v_{R_3}-v_o\right)$$

$$v_{R_3}=e_s-v_{L_1}-v_c$$

$$\rightarrow \frac{dv_o(0)}{dt}=\frac{2}{5}\frac{de_s(0)}{dt}+\frac{6}{10}\left(e_s(0)-v_{L_1}(0)-v_c(0)-v_o(0)\right)$$

مسئله ۸

- با نوشتن معادلات مش برای شکل(الف) و معادلات گره برای شکل (ب) نشان دهید دو مدار دوگان یکدیگر هستند.
- شرایط اضافی دیگر را در صورت وجود بیان کنید.



(ب) شکل مسئله ۸ (الف)

حل : با توجه به شکل (الف)، $i = i_1$ بوده و خواهیم داشت.

$$\text{KVL برای مش ۲} \rightarrow \frac{1}{2}D^{-1}(i_2 - i_1) + 2Di_2 + 6i_2 = 0 \rightarrow (8D-1)i_1 + (6D^2+1)i_2 = 0$$

$$\text{KVL برای مش ۱} \rightarrow -e_s + 5i_1 + \frac{1}{2}D^{-1}(i_1 - i_2) = 0 \rightarrow (10D+1)i_1 - i_2 = 2De_s$$

$$\rightarrow i = i_1 = \frac{\begin{vmatrix} e & 6D^2+1 \\ 2De_s & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8D-1 & 6D^2+1 \\ 10D+1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{6D+1}{30D^2+2D-18}e_s \rightarrow 30\frac{d^2i}{dt^2} + 2\frac{di}{dt} - 18i = \frac{6de_s}{dt} + e_s$$

و با توجه به شکل (ب)، $v = v_1$ بوده و خواهیم داشت.

$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \frac{1}{2}D^{-1}(v_2 - v_1) + 2Dv_2 + 6v_2 = 0 \rightarrow (8D-1)v_1 + (6D^2+1)v_2 = 0$$

$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow -i_s + \frac{v}{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}D^{-1}(v_1 - v_2) = 0 \rightarrow (10D+1)v_1 - v_2 = 2Di_s$$

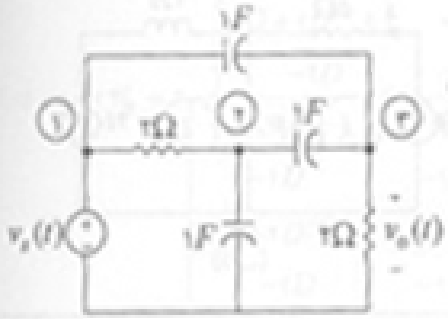
$$\rightarrow v = v_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 6D^2+1 \\ 2Di_s & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8D-1 & 6D^2+1 \\ 10D+1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{6D+1}{30D^2+2D-18}i_s \rightarrow 30\frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{dv}{dt} - 18v = \frac{6di_s}{dt} + i_s$$

ملاحظه می شود که معادله دیفرانسیل مدار (ب) همانند مدار (الف) است و فقط به جای جریان، ولتاژ و بجای منبع ولتاژ منبع جریان قرار گرفته است پس دو مدار دوگان یکدیگر هستند و برای اینکه جوابهای $i(t)$ و $v(t)$ دقیقاً برابر شوند باید مقادیر اولیه آنها یکسان باشد و این همان شرط اضافی خواسته شده است.

$$i(0)=v(0) \quad , \quad \frac{di(0)}{dt}=\frac{dv(0)}{dt}$$

مسئله ۹

پاسخ پله واحد $v_o(t)$ را بیابید. (شرایط اولیه صفرانند)



شکل مسئله ۹

حل: با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم

$$KCL \text{ برای گره } ③ \rightarrow \frac{v_o}{2}+D(v_o-v_2)+D(v_o-v_1)=0 \rightarrow v_2=\left(\frac{1}{2D}+2\right)v_o-v_1$$

$$KCL \text{ برای گره } ② \rightarrow \frac{\left(\frac{1}{2D}+2\right)v_o-v_1-v_2}{2}+D\left\{\left(\frac{1}{2D}+2\right)v_o-v_1\right\}$$

$$+D\left\{\left(\frac{1}{2D}+2\right)v_o-v_1-v_o\right\}=0$$

$$\rightarrow \left(2D^2+2D+\frac{1}{2}\right)v_o=\left(2D^2+D\right)v_1 \rightarrow 2\left(D+\frac{1}{2}\right)\left(D+\frac{1}{6}\right)v_o=2\left(D+\frac{1}{2}\right)v_1$$

$$\rightarrow \left(D+\frac{1}{6}\right)v_o=\frac{2}{3}Dv_1 \quad , \quad v_1(t)=u(t)=1 \rightarrow \frac{dv_o}{dt}+\frac{1}{6}v_o=\frac{2}{3}\delta(t)$$

$$\rightarrow \frac{dv_o}{dt}+\frac{1}{6}v_o=0 \quad , \quad t>0$$

در $t=0$ خازنها اتصال کوتاه بوده و مقاومت ها عملاً از مدار خارج می شوند بنابراین با استفاده از قاعده تقسیم ولتاژ داریم:

$$v_o(0^+)=\frac{1}{\frac{2(1)}{1+1}+1}v_1(0)=\frac{2}{3}$$

و در $t=\infty$ خازنها مدار باز شده و لذا جریان گذرنده از مقاومتها برابر صفر بوده و $v_o(\infty)=0$ می باشد.

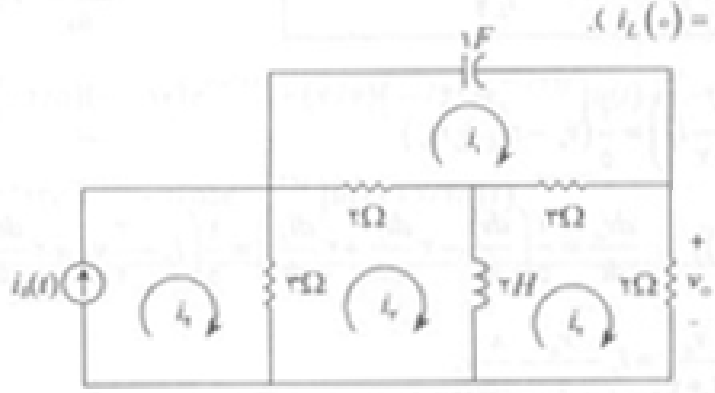
$$v_o(t) = K_1 e^{-\frac{1}{2}t} + K_2 \quad , \quad t > 0$$

$$\begin{cases} v_o(0) = \frac{2}{3} \rightarrow K_1 + K_2 = \frac{2}{3} \rightarrow K_1 = \frac{2}{3} \rightarrow v_o(t) = \frac{2}{3}u(t)e^{-\frac{1}{2}t} \\ v_o(\infty) = 0 \rightarrow K_2 = 0 \end{cases}$$

مسئله ۱۰

با استفاده از تحلیل مش معادله دیفرانسیلی بنویسید که v_o را به i_s ارتباط دهد و شرایط اولیه را مشخص کنید. ($v_C(0) = V_0$ و $i_L(0) = I_0$).

پاسخ ضربه v_o را تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۰

حل : با توجه به شکل مسئله و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات انتگرال- دیفرانسیل داریم.

$$i_4 = i_s$$

$$\text{برای مش ۳} \quad KVL \rightarrow 2(i_3 - i_s) + 2(i_3 - i_2) + 2D(i_3 - i_2) = 0$$

$$\rightarrow -2i_2 - 2Di_2 + (2D+5)i_3 = 2i_s$$

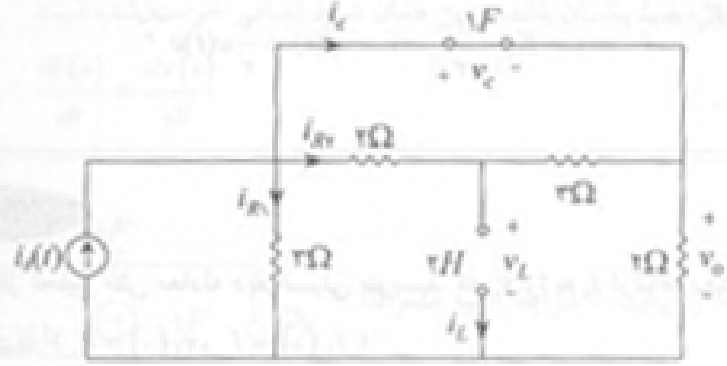
$$\text{برای مش ۲} \quad KVL \rightarrow 2D(i_2 - i_3) + 2(i_2 - i_1) + 2i_2 = 0 \rightarrow -2i_1 + (2D+5)i_2 - 2Di_3 = 0$$

$$\text{برای مش ۱} \quad KVL \rightarrow D^{-1}i_1 + 3(i_1 - i_2) + 2(i_1 - i_3) = 0 \rightarrow (5D+1)i_1 - 3Di_2 - 2Di_3 = 0$$

$$\rightarrow v_o = 2i_3 = 2\frac{\begin{vmatrix} -2 & 3i_s & 2D+5 \\ -3 & 0 & -2D \\ 5D+1 & 0 & -2D \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & -2D & 2D+5 \\ -3 & 2D+5 & -2D \\ 5D+1 & -3D & -2D \end{vmatrix}} = \frac{60D^2 + 28D}{50D^2 + 80D + 25} i_s$$

$$\rightarrow 50\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 80\frac{dv_o}{dt} + 25v_o = 60\frac{d^2 i_s}{dt^2} + 28\frac{di_s}{dt}$$

با استفاده از قضیه جمع آثار و قوانین تقسیم ولتاژ و جریان v_o را بدست خواهیم آورد.(توجه کنید در حالت اولیه خازن را اتصال کوتاه و سلف را مدار باز در نظر می گیریم).



$$v_o = \frac{2}{2+3}v_c - 2\left(\frac{3}{2+3}i_L\right) + 2\left(\frac{3}{2+3}i_s\right) = \frac{2}{5}\left(v_c - 3i_L + 3i_s\right)$$

$$\rightarrow \quad v_o(0) = \frac{2}{5}\left(V_o - 3I_o + 3i_s(0)\right) \ , \quad \frac{dv_o}{dt} = \frac{2}{5}\left(\frac{dv_c}{dt} - 3\frac{di_L}{dt} + 3\frac{di_s}{dt}\right) = \frac{2}{5}\left(i_c - \frac{3}{2}v_L + 3\frac{di_s}{dt}\right)$$

$$i_c = i_s - i_{R_1} - i_{R_2} = i_s - \frac{v_o + v_c}{3} - \frac{v_c}{2+3} = i_s - \frac{v_o}{3} - \frac{8}{15}v_c$$

$$v_L = v_o + 3i_{R_2} = v_o + 3\frac{v_c}{2+3} = v_o + \frac{3}{5}v_c \rightarrow \frac{dv_o}{dt} = \frac{2}{5}\left(i_s - \frac{v_o}{3} - \frac{8}{15}v_c - \frac{2}{3}\left(v_o + \frac{3}{5}v_c\right) + 3\frac{di_s}{dt}\right)$$

$$\rightarrow \quad \frac{dv_o(0)}{dt} = \frac{2}{5}\left(-\frac{23}{15}v_c(0) + \frac{9}{5}i_L(0) + i_s(0) + 3\frac{di_s(0)}{dt}\right)$$

برای محاسبه پاسخ ضربه ابتدا به محاسبه پاسخ پله می پردازیم.

$$i_s(t) = u(t) \quad \rightarrow \quad 5\cdot\frac{d^2v_o}{dt^2} + 8\cdot\frac{dv_o}{dt} + 25v_o = 6\cdot\delta'(t) + 28\delta(t)$$

می دانیم که به ازای $t = 0$ ، $\delta'(t) = \delta(t) = 0$ می باشد. با فرض $v_c(0) = i_L(0) = 0$ و با توجه به مقادیر اولیه بدست آمده داریم.

$$5\cdot\frac{d^2v_o}{dt^2} + 8\cdot\frac{dv_o}{dt} + 25v_o = 0 \quad , \quad v_o(0) = \frac{6}{5} \quad , \quad \frac{dv_o(0)}{dt} = \frac{2}{5}$$

معادله مشخصه : $5\cdot s^2 + 8\cdot s + 25 = 0 \quad \rightarrow \quad s = -1/17 \ , \ -0/94$

$$\rightarrow \quad v_o(t) = \left(K_1e^{-1/17t} + K_2e^{-0/94t}\right)u(t)$$

$$\begin{cases} v_o(0) = \frac{6}{5} \rightarrow K_1 + K_2 = 1/2 \\ \frac{dv_o(0)}{dt} = \frac{2}{5} \rightarrow -1/7K_1 - 0/22K_2 = 0/4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_1 = -2/5 \\ K_2 = 3/7 \end{cases}$$

$$\rightarrow v_o(t) = \left(-2/5e^{-1/17t} + 3/7e^{-0/22t}\right)u(t)$$

و با گرفتن مشتق از پاسخ پله، پاسخ ضربه را بصورت زیر بدست می آوریم.

$$h(t) = \frac{dv_o(t)}{dt}$$

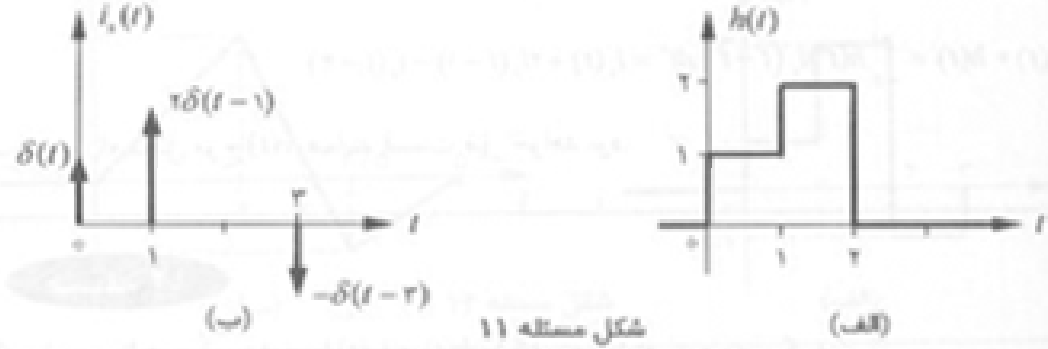
$$= \left((-2/5)(-1/17)e^{-1/17t} + (3/7)(-0/22)e^{-0/22t}\right)u(t) + \left(-2/5e^{-1/17t} + 3/7e^{-0/22t}\right)\Big|_{t=0} \delta(t)$$

$$= \left(2/93e^{-1/17t} - 1/55e^{-0/22t}\right)u(t) + 1/2\delta(t)$$

مسئله ۱۱

$h(t)$ پاسخ ضربه مدار است. پاسخ مدار را به ورودی $i_s(t)$ تعیین و رسم کنید.

فرض کنید نمودار(الف) ورودی و نمودار(ب) پاسخ ضربه باشد.پاسخ حالت صفرمداررا تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۱

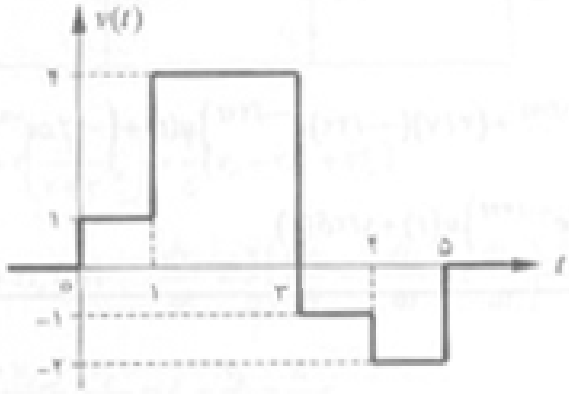
حل : با فرض اینکه مدار خطی تغییر ناپذیر با زمان بوده و $v(t)$ پاسخ ورودی $i_s(t)$ باشد خواهیم داشت.

$$i_s(t) = \delta(t) + 2\delta(t-1) - \delta(t-3) \rightarrow v(t) = \int_0^t h(t')i_s(t-t')dt' = h(t) + 2h(t-1) - h(t-3)$$

بنابراین با توجه به شکل موج $h(t)$ ، شکل موج $v(t)$ را می توان بصورت زیر رسم کرد.

$$h(t)=\begin{cases}1\ , & 0<t<1\\ 2\ , & 1<t<2\end{cases}\ \rightarrow\ 2h(t-1)=\begin{cases}2\ , & 1<t<2\\ 4\ , & 2<t<3\end{cases}\ ,\quad h(t-3)=\begin{cases}1\ , & 3<t<4\\ 2\ , & 4<t<5\end{cases}$$

$$\rightarrow\ v(t)=\begin{cases}1+0+0\ , & 0<t<1\\ 2+2+0\ , & 1<t<2\\ 0+2+0\ , & 2<t<3\\ 0+0-1\ , & 3<t<4\\ 0+0-2\ , & 4<t<5\end{cases}\ \rightarrow\ v(t)=\begin{cases}1\ , & 0<t<1\\ 2\ , & 2<t<3\\ -1\ , & 3<t<4\\ -2\ , & 4<t<5\end{cases}$$



همچنین با اعمال مفروضات داده شده خواهیم داشت

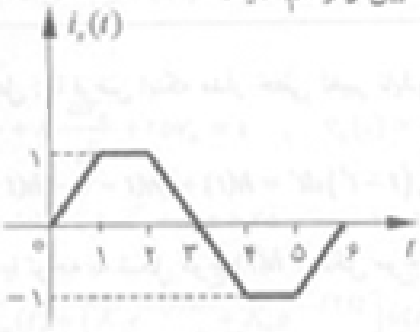
$$i_s(t)=\begin{cases}1\ , & 0<t<1\\ 2\ , & 1<t<2\end{cases}\ ,\quad h(t)=\delta(t)+2\delta(t-1)-\delta(t-3)$$

$$v(t)=i_s(t)*h(t)=\int_0^t h(t')i_s(t-t')dt'=i_s(t)+2i_s(t-1)-i_s(t-3)$$

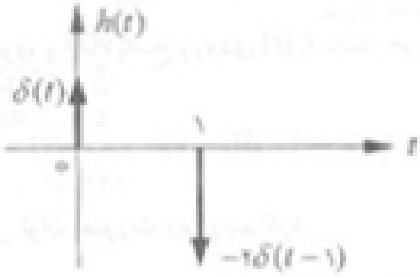
واضح است که شکل موج $v(t)$ همانند قسمت قبل خواهد بود.

مسئله ۱۲

پاسخ حالت صفر مداری با $i_s(t)$ و $h(t)$ بشکل زیر را تعیین و رسم کنید.



(ب)



(الف)

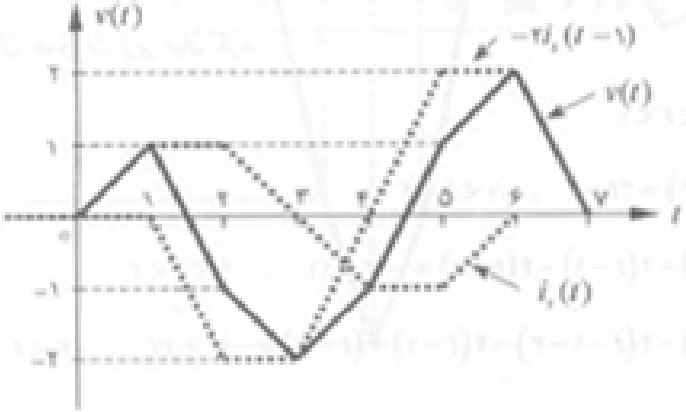
شکل مسئله ۱۲

حل : با فرض اینکه خروجی $v(t)$ بوده و مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان باشد خواهیم داشت.

$$h(t) = \delta(t) - 2\delta(t-1)$$

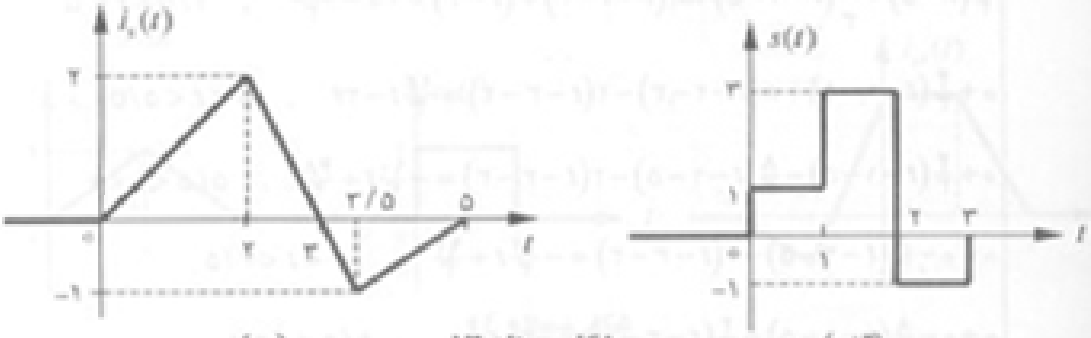
$$v(t) = i_s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t')i_s(t-t')dt' = i_s(t) - 2i_s(t-1)$$

شکل موج $v(t)$ بصورت زیر بدست می آید.



مسئله ۱۳

پاسخ ضربه مداری با $i_s(t)$ و $s(t)$ بشکل زیر را تعیین و رسم کنید.



(ب) شکل مسئله ۱۳ (الف)

حل : ابتدا با توجه به پاسخ پله، پاسخ ضربه را بدست می آوریم.

$$s(t) = \big(u(t) - u(t-1)\big) + 3\big(u(t-1) - u(t-2)\big) - \big(u(t-2) - u(t-3)\big)$$

$$= u(t) + 2u(t-1) - 4u(t-2) + u(t-3)$$

$$\rightarrow \quad h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \delta(t) + 2\delta(t-1) - 4\delta(t-2) + \delta(t-3)$$

حال با استفاده از انتگرال کانو لوشن پاسخ حالت صفر را به ازای ورودی $i_s(t)$ تعیین می کنیم.

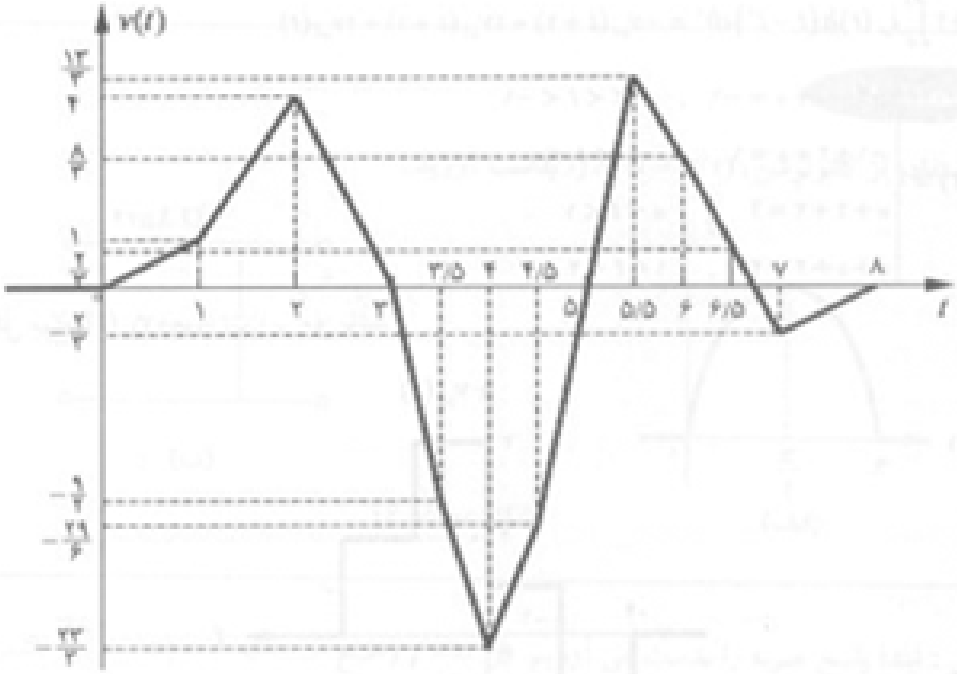
$$v(t)=i_s(t)*h(t)=\int_0^t h(t')i_s(t-t')dt'=i_s(t)+2i_s(t-1)-4i_s(t-2)+i_s(t-3)$$

$$i_s(t)=\begin{cases} t & , \quad 0<t<2 \\ -2(t-3) & , \quad 2<t<2/5 \\ \frac{2}{3}(t-5) & , \quad 2/5<t<5 \end{cases}$$

بنابراین $v(t)$ را می توان بصورت زیر بیان کرد.

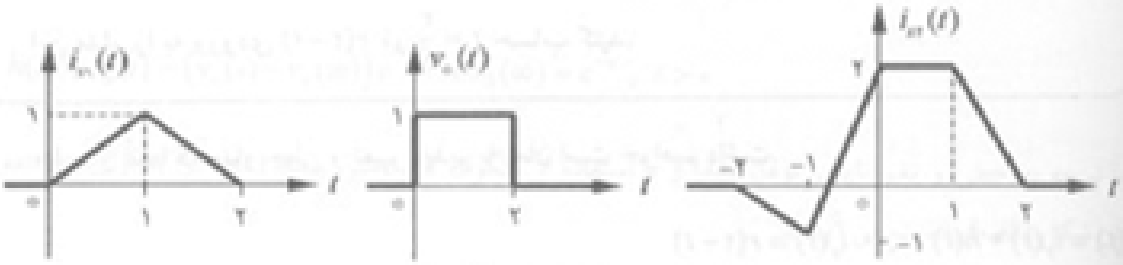
$$\rightarrow \quad v(t)=\begin{cases} t \quad , \quad 0<t<1 \\ t+2(t-1)=3t-2 \quad , \quad 1<t<2 \\ -2(t-3)+2(t-1)-4(t-2)=-4t+12 \quad , \quad 2<t<3 \\ -2(t-3)-4(t-1-3)-4(t-2)+(t-3)=-7t+27 \quad , \quad 3<t<2/5 \\ \frac{2}{3}(t-5)-4(t-1-3)-4(t-2)+(t-3)=-\frac{19}{3}t+\frac{53}{3} \quad , \quad 2/5<t<4 \\ \frac{2}{3}(t-5)-4(t-1-3)+8(t-2-3)+(t-3)=\frac{17}{3}t-\frac{31}{3} \quad , \quad 4<t<4/5 \\ \frac{2}{3}(t-5)+\frac{4}{3}(t-1-5)+8(t-2-3)+(t-3)=17-\frac{143}{3} \quad , \quad 4/5<t<5 \\ 0+\frac{4}{3}(t-1-5)+8(t-2-3)-2(t-3-3)=\frac{23}{3}t-36 \quad , \quad 5<t<5/5 \\ 0+\frac{4}{3}(t-1-5)-\frac{5}{3}(t-2-5)-2(t-3-3)=-\frac{1}{3}t+\frac{65}{3} \quad , \quad 5/5<t<6 \\ 0+0-\frac{5}{3}(t-2-5)-2(t-3-3)=-\frac{13}{3}t+\frac{31}{3} \quad , \quad 6<t<6/5 \\ 0+0-\frac{5}{3}(t-2-5)+\frac{2}{3}(t-3-5)=-2t+\frac{7}{3} \quad , \quad 6/5<t<7 \\ 0+0+0+\frac{2}{3}(t-3-5)=\frac{2}{3}t-\frac{16}{3} \quad , \quad 7<t<8 \end{cases}$$

و لذا شکل موج $v(t)$ بصورت زیر خواهد بود.



مسئله ۱۴

پاسخ حالت صفر یک مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان به ورودی $i_{s_1}(t)$ ، $v_o(t)$ می باشد. پاسخ حالت صفر را به ورودی $i_{s_2}(t)$ تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۴

حل : با فرض اینکه پاسخ حالت صفر به ازای ورودی $i_{s_2}(t)$ ، $v_{o_2}(t)$ باشد خواهیم داشت.

$$v_{o_2}(t) = i_{s_2}(t) * h(t) = \int_0^t i_{s_2}(t')h(t-t')\,dt'$$

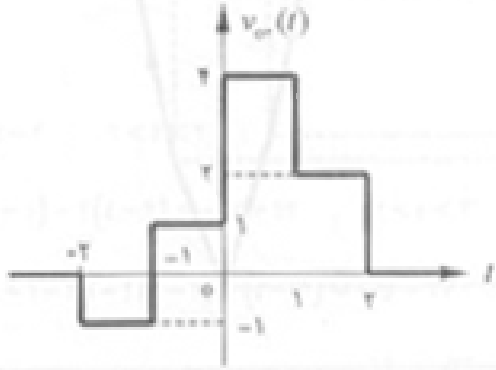
$$i_{s_2}(t) = -i_{s_1}(t+2) + 2i_{s_1}(t+1) + 2i_{s_1}(t) \quad , \quad v_{o_1}(t) = i_{s_1}(t) * h(t)$$

$$v_{o_2}(t) = \int_0^t i_{s_2}(t')h(t-t')\,dt' = -\int_0^t i_{s_1}(t'+2)h(t-t')\,dt' + 2\int_0^t i_{s_1}(t'+1)h(t-t')\,dt'$$

$$+2\int_0^t i_{in}(t)h(t-t')dt' = -v_{in}(t+2)+2v_{in}(t+1)+2v_{in}(t)$$

$$\rightarrow\ v_{out}(t)=\begin{cases}-1+0+0=-1 & , \quad -2<t<-1\\ -1+2+0=1 & , \quad -1<t<0\\ 0+2+2=2 & , \quad 0<t<1\\ 0+0+2=2 & , \quad 1<t<2\end{cases}$$

بنابراین شکل موج $v_{out}(t)$ بصورت زیر می باشد.



مسئله ۱۵

پاسخ ضربه یک مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان $h(t)=\sum_{K=0}^{\infty}\delta(t-K)$ است. پاسخ حالت صفر این مدار را به ورودی $r(2-t)$ در $t=\frac{3}{2}$ حساب کنید.

حل : از آنجا که مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان است خواهیم داشت.

$$v(t)=i_s(t)*h(t) \quad , \quad i_s(t)=r(2-t)$$

$$v(t)=\int_0^t h(t')r(2-(t-t'))dt'=\int_0^t\sum_{K=0}^{\infty}\delta(t-K)\,r(2-(t-t'))\,dt=\sum_{K=0}^{\infty}r(2-(t-K))$$

$$\rightarrow\ v(t)=\sum_{K=0}^{\infty}r(2+K-t) \quad \rightarrow\ v\left(\frac{3}{2}\right)=\sum_{K=0}^{\infty}r\left(K+\frac{1}{2}\right)=r\left(\frac{1}{2}\right)+r\left(\frac{3}{2}\right)+r\left(\frac{5}{2}\right)+\cdots$$

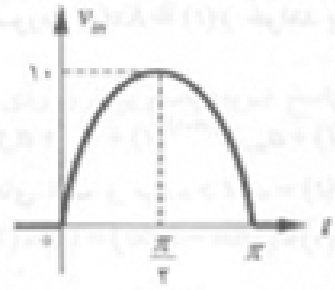
طبق تعریف تابع شیب واحد $r(2-t)=\begin{cases}2-t\ , & 2-t>0\\ 0\ , & 2-t<0\end{cases}=\begin{cases}2-t\ , & t<2\\ 0\ , & t>0\end{cases}$ می باشد بنابراین داریم.

$$v\left(\frac{3}{2}\right)=\left(2-\frac{1}{2}\right)+\left(2-\frac{3}{2}\right)+0+\cdots=2$$

مسئله ۱۶

با استفاده از کانولوشن، $v_o(t=2/2)$ را بدست آورید.

(ب)



(الف)

شکل مسئله ۱۶

حل : ابتدا پاسخ ضربه را بدست می آوریم. در $t=\infty$ واضح است که $v_o(\infty)=0$ می باشد و در $t=0$ خازن اتصال کوتاه بوده و جریان $\frac{\delta(t)}{625\times10^{-3}}$ از آن می گذرد (فرض $v_{in}=\delta(t)$) بنابراین داریم.

$$v_o(0^+)=v_o(0^-)+\frac{1}{1/6\times10^{-6}}\int_{0^-}^{0^+}\frac{\delta(t)}{625\times10^{-3}}dt=0+\frac{1}{1/6\times625\times10^{-6}}=1$$

$$\text{ثابت زمانی}=RC=1/6\times625\times10^{-6}=1$$

$$\rightarrow\ h(t)=v_o(t)=\left(v_o(0)-v_o(\infty)\right)e^{-\frac{t}{RC}}+v_o(\infty)=e^{-t}\ ,\ t>0$$

با توجه به خطی و تغییرناپذیر بودن مدار و با استفاده از انتگرال کانولوشن پاسخ $v_o(t)$ را به ازای v_{in} داده شده در شکل (الف) بدست می آوریم.

$$v_o(t)=\int_0^t v_{in}(t')h(t-t')dt'=\int_0^t 10\sin t'.\,e^{-(t-t')}dt'=10e^{-t}\int_0^t 10\sin t'e^{-t'}dt'$$

$$=10e^{-t}\cdot\frac{e^{t'}}{2}\cdot\left(\sin t'-\cos t'\right)\Big|_0^t=5\left(\sin t-\cos t+e^{-t}\right)$$

$$v_o(2/2)=5\left(\sin 2/2-\cos 2/2+e^{-2/2}\right)=7/5\,V$$

مسئله ۱۷

الف- در یک مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان ثابت کنید اگر به ازای ورودی $x(t) = u(t)$ خروجی $y(t) = Ku(t)$ باشد، پاسخ به ازای هر ورودی دلخواه $x(t)$ بصورت $y(t) = Kx(t)$ خواهد بود.

ب- اگر معادله دیفرانسیل مدار بصورت زیر باشد.

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \dots + b_1 x^{(1)}(t) + b_0 x(t)$$

تحت چه شرایطی همواره $y(t) = Kx(t)$ است.(در قسمت های الف و ب، $t > 0$ ، $x(t) = 0$ و $y(t)$ پاسخ حالت صفر است)

حل : الف ـ از آنجا که مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان است لذا اگر ورودی برابر مشتق $u(t)$ باشد خروجی نیز برابر مشتق $Ku(t)$ خواهد شد.

$$\rightarrow \quad x(t) = \frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \quad \rightarrow \quad y(t) = h(t) = \frac{dy(t)}{dt} = K\delta(t)$$

و چون به ازای $t < 0$ ، $x(t) = 0$ بوده و مدار در حالت صفر می باشد لذا به ازای ورودی دلخواه $x(t)$ خواهیم داشت.

$$y(t) = \int_0^t h(t')x(t-t')\,dt' = \int_0^t K\delta(t')x(t-t')\,dt' = Kx(t-t')\Big|_{t'=0} = Kx(t)$$

ب ـ شرط اینکه $y(t) = Kx(t)$ پاسخ معادله دیفرانسیل باشد این است که در معادله دیفرانسیل صدق کند.

$$a_n Kx^{(n)}(t) + a_{n-1} Kx^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 Kx^{(1)}(t) + a_0 Kx = b_m x^{(m)}(t) + \dots + b_1 x^{(1)}(t) + b_0 x(t)$$

و شرط برقرار بودن رابطه فوق این است که مرتبه مشتق دو طرف برابر باشد و یا $n = m$ باشد. بنابراین به ازای $n = m$، $y(t) = Kx(t)$ پاسخ حالت صفر مدار با معادله دیفرانسیل فوق و ورودی $x(t)$ خواهد بود.

مسئله ۱۸

در یک مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان برای ورودی $x(t) = e^t u(t)$ پاسخ حالت صفر $y(t) = (\sin t)u(t)$ حاصل شده است.

الف- پاسخ ضربه این مدار را تعیین کنید.

ب- پاسخ حالت صفر این مدار را به ورودی $x_1(t) = (\sin t)u(t)$ بدست آورید.

حل : الف ـ می توان نوشت.

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$x(t) = e^{t}u(t) \quad \rightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt} = e^{t}u(t) + e^{t}\Big|_{t=0}\delta(t) = e^{t}u(t) + \delta(t) \quad \rightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt} - x(t) = \delta(t)$$

بنابراین پاسخ ضربه، پاسخ برای ورودی $\frac{dx(t)}{dt} - x(t)$ می باشد که با توجه به خطی و تغییر ناپذیر بودن مدار داریم.

$$h(t) = \frac{dy(t)}{dt} - y(t) = \left\{(\cos t)u(t) + (\sin t)\Big|_{t=0}\delta(t)\right\} - (\sin t)u(t) = (\cos t - \sin t)u(t)$$

ب ـ پاسخ حالت صفر خواسته شده را می توان با استفاده از انتگرال کانولوشن بدست آورد.

$$y_1(t) = x_1(t) * h(t) \quad , \quad x_1(t) = (\sin t)u(t) \quad , \quad h(t) = (\cos t - \sin t)u(t)$$

$$\rightarrow y_1(t) = \int_0^t h(t')x_1(t-t')dt' = \int_0^t (\sin t' - \cos t')\sin(t-t')dt'$$

$$= \int_0^t \left\{\sin t\left(\sin t'\cos t' - \cos^2 t'\right) - \cos t'\left(\sin^2 t' - \sin t'\cos t'\right)\right\} dt'$$

$$= \int_0^t \left\{\sin t\left(\frac{1}{2}\sin 2t' - \frac{1+\cos 2t'}{2}\right) - \cos t\left(\frac{1-\cos 2t'}{2} - \frac{1}{2}\sin 2t'\right)\right\} dt'$$

$$= \left\{\sin t\left(-\frac{1}{4}\cos 2t' - \frac{1}{2}t' - \frac{1}{4}\sin 2t'\right) - \cos t\left(\frac{1}{2}t' - \frac{1}{4}\sin 2t' + \frac{1}{4}\cos 2t'\right)\right\}\Bigg|_0^t$$

$$= -\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}t(\sin t + \cos t)$$

روش دوم : در این روش از تبدیل لاپلاس و رابطه $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ کمک می گیریم.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{s^2+1}}{\frac{1}{s-1}} = \frac{s-1}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} \quad \rightarrow \quad h(t) = \cos t - \sin t \ , \ t > 0$$

$$Y_1(s) = H(s)\cdot X_1(s) = \frac{s-1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1} = \frac{s}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s^2+1)^2}$$

$$\rightarrow \quad y_1(t) = \frac{1}{2}t\sin t - \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$$

مسئله ۱۹

در یک مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان برای ورودی $x(t)=(e^{-t}-\sin t)u(t)$ پاسخ حالت صفر $y(t)=\delta(t)$ حاصل شده است.

الف- پاسخ ضربه مدار را تعیین کنید.

ب- آیا شرایط اولیه ای وجود دارد که به ازای آن، پاسخ ورودی صفر با گذشت زمان به سمت بی نهایت میل کند.

حل : الف ـ با توجه به خطی و تغییر ناپذیر بودن مدار می توان نوشت.

$$x(t)=\left(e^{-t}-\sin t\right)u(t) \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt}=\left(-e^{-t}-\cos t\right)u(t)+\left(e^{-t}-\sin t\right)\Big|_{t=0}\delta(t)$$

$$=\left(-e^{-t}-\cos t\right)u(t)+\delta(t)$$

$$\frac{dx^2}{dt^2}=\left(e^{-t}+\sin t\right)u(t)+\left(-e^{-t}-\cos t\right)\Big|_{t=0}\delta(t)+\delta'(t)=\left(e^{-t}+\sin t\right)u(t)-2\delta(t)+\delta'(t)$$

$$\frac{dx^2}{dt^2}+x=2e^{-t}u(t)-2\delta(t)+\delta'(t)$$

$$\frac{dx^3}{dt^3}+\frac{dx}{dt}=-2e^{-t}u(t)+2e^{-t}\Big|_{t=0}\delta(t)-2\delta'(t)+\delta''(t)=-2e^{-t}u(t)+2\delta(t)-2\delta'(t)+\delta''(t)$$

$$\frac{dx^3}{dt^3}+\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+x=\delta''(t)-\delta(t)$$

به ازای ورودی فوق پاسخ $\frac{dy^3}{dt^3}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y$ می باشد بنابر این داریم.

$$\frac{dh^3}{dt^3}-\frac{dh}{dt}=\delta^{(2)}(t)+\delta^{(1)}(t)+\delta^{(1)}(t)+\delta(t)$$

معادله مشخصه : $s^3-s=0 \quad \rightarrow \quad s=1,0 \quad \rightarrow \quad h(t)=\left(K_1+K_2e^t\right)u(t)+K_3\delta^{(1)}(t)+K_4\delta(t)$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل خواهیم داشت.

$$K_3\delta^{(2)}(t)+\left(K_4-K_3\right)\delta^{(1)}(t)+\left(K_1+K_2-K_4\right)\delta^{(1)}(t)-K_1\delta(t)$$

$$=\delta^{(2)}(t)+\delta^{(1)}(t)+\delta^{(1)}(t)+\delta(t)$$

$$\rightarrow \begin{cases} K_2 = 1 \\ K_1 - K_2 = 1 \\ -K_1 + K_1 - K_2 = 1 \\ -K_1 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_1 = -1 \\ K_2 = 2 \\ K_3 = 1 \\ K_4 = 2 \end{cases} \rightarrow h(t) = \left(-1 + 2e^{t}\right)u(t) + \delta'(t) + 2\delta(t)$$

روش دوم : در این روش از تبدیل لاپلاس و بکارگیری رابطه $H(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$ استفاده می کنیم. برای قسمت (الف) داریم.

$$H(s) = \frac{1}{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s^2+1}} = \frac{s^3 + s^2 + s + 1}{s(s-1)} = -\frac{1}{s} + \frac{2}{s-1} + s + 2$$

$$\rightarrow h(t) = -1 + 2e^{t} + \delta'(t) + 2\delta(t) \ , \ t > 0$$

ب ـ ابتدا معادله دیفرانسیل مدار را بدست می آوریم.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(s+1)(s^2+1)}{s(s-1)} \rightarrow \frac{d^3y(t)}{dt^3} - \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^3x(t)}{dt^3} + \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

به ازای ورودی صفر $x(t) = 0$ معادله دیفرانسیل مدار بصورت زیر خواهد شد.

$$\frac{dy^3}{dt^3} - \frac{dy}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dt} - y = 0 \rightarrow y(t) = Ke^{t}u(t)$$

که به ازای $K = y(0) \neq 0$ پاسخ با گذشت زمان به بی نهایت میل می کند.

مسئله ۲۰

در یک مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان برای ورودی $(e^{-2t}\cos t)u(t)$ پاسخ حالت صفر $e^{-t}u(t)$ بدست آمده است. پاسخ پله این مدار را تعیین کنید. (در حوزه زمان حل کنید)

حل : با توجه به خطی و تغییر ناپذیر بودن مدار می توان نوشت.

$$x(t) = \left(e^{-2t}\cos t\right)u(t) \rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = -\left(2e^{-2t}\cos t\right)u(t) - \left(e^{-2t} - \sin t\right)u(t) + \delta(t)$$

$$\rightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \left(3e^{-2t}\cos t\right)u(t) + \left(4e^{-2t}\sin t\right)u(t) - 2\delta(t) + \delta'(t)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4\frac{dx(t)}{dt} + 5x(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) \quad , \quad y(t) = e^{-t}u(t)$$

$$\rightarrow \frac{dh}{dt} + 2h = \frac{dy^2}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 5y = 2e^{-t}u(t) + 3\delta(t) + \delta'(t)$$

معادله مشخصه : $s+2=0 \rightarrow s=-2 \rightarrow h(t)=\underbrace{K_1u(t)e^{-2t}+K_2\delta(t)}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_3u(t)e^{-t}}_{\text{پاسخ خصوصی}}$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل به ازای $t=0$ داریم

$$-K_3e^{-t}+2K_3e^{-t}=2e^{-t} \rightarrow K_3=2$$

با جایگذاری $h(t)$ در معادله دیفرانسیل داریم

$$(K_1+2K_2+2)\delta(t)+K_2\delta'(t)=2\delta(t)+\delta'(t) \rightarrow \begin{cases} K_2=1 \\ K_1+2K_2+2=2 \rightarrow K_1=-1 \end{cases}$$

$$\rightarrow h(t)=\left(2e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)+\delta(t)$$

در ادامه با استفاده از انتگرال کانولوشن پاسخ پله را به ازای $t>0$ ، $x(t)=u(t)=1$ حساب خواهیم کرد.

$$s(t)=x(t)*h(t) \quad , \quad x(t)=u(t)=1 \quad , \quad h(t)=\left(2e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)+\delta(t)$$

$$s(t)=\int_0^t x(t')h(t-t')dt'=\int_0^t h(t-t')dt'=\int_0^t\left(2e^{t'-t}-e^{2t'-2t}+\delta(t')\right)dt'$$

$$=\left(2e^{t'-t}-\frac{1}{2}e^{2t'-2t}\right)\Big|_0^t+1=\left(2-\frac{1}{2}\right)-\left(2e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)+1$$

$$\rightarrow s(t)=-2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{5}{2} \quad , \quad t>0 \quad \rightarrow \quad s(t)=\left(-2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{5}{2}\right)u(t)$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس نیز می توانیم پاسخ پله را بصورت زیر حساب کنیم

$$H(s)=\frac{S(s)}{U(s)} \rightarrow S(s)=U(s)\cdot H(s)=U(s)\cdot\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s}\,\frac{\frac{1}{s+1}}{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}}$$

$$S(s)=\frac{(s+1)^2+1}{s(s+1)(s+2)}=-\frac{2}{s+1}+\frac{\frac{1}{2}}{s+2}+\frac{\frac{5}{2}}{s} \rightarrow s(t)=-2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{5}{2} \ , \ t>0$$

مسئله ۲۱

برای ورودی $x(t)=(\cos t-\sin t)u(t)$ پاسخ حالت صفر یک مدار خطی تغییر ناپذیر با زمان بصورت $\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)$ است. پاسخ ضربه و پاسخ پله این مدار را بدست آورید.

حل : با توجه به خطی و تغییر ناپذیر بودن مدار با زمان می توان نوشت.

$$x(t)=(\cos t-\sin t)u(t) \quad , \quad y(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)$$

$$\frac{dx}{dt}=(-\sin t-\cos t)\,u(t)+\delta(t) \;\rightarrow\; \frac{d^2x}{dt^2}=(-\cos t+\sin t)-\delta(t)+\delta'(t)$$

$$\rightarrow\; \frac{d^2x}{dt^2}+x=-\delta(t)+\delta'(t) \;\rightarrow\; \frac{d^2y}{dy^2}+y=-h+\frac{dh}{dt}$$

$$\rightarrow\; \frac{dh}{dt}-h=\left(2e^{-t}-5e^{-2t}\right)u(t)+\delta(t)$$

معادله مشخصه : $s-1=0 \;\rightarrow\; s=1 \;\rightarrow\; h(t)=\underbrace{K_1e^{t}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_2e^{-t}+K_3e^{-2t}}_{\text{پاسخ خصوصی}} \;,\; t>0$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل به ازای $t>0$ داریم.

$$-2K_2e^{-t}-3K_3e^{-2t}=2e^{-t}-5e^{-2t} \;\rightarrow\; K_2=-1\,,\,K_3=\frac{5}{3}$$

و با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+ $h(0^+)=1$ شده بنابراین داریم.

$$h(0^+)=1 \;\rightarrow\; K_1-1+\frac{5}{3}=1 \;\rightarrow\; K_1=\frac{1}{3} \;\rightarrow\; h(t)=\left(\frac{1}{3}e^{t}-e^{-t}+\frac{5}{3}e^{-2t}\right)u(t)$$

در ادامه با استفاده از انتگرال کانولوشن پاسخ پله را نیز محاسبه خواهیم کرد.

$$x(t)=u(t) \;\rightarrow\; s(t)=x(t)*h(t)=\int_0^t x(t')h(t-t')\,dt'$$

$$=\int_0^t\left(\frac{1}{3}e^{t'-t}-e^{t'-t}+\frac{5}{3}e^{2t'-2t}\right)dt'=\left(-\frac{1}{3}e^{t'-t}-e^{t'-t}+\frac{5}{6}e^{2t'-2t}\right)\Bigg|_0^t$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-1+\frac{5}{6}\right)-\left(-\frac{1}{3}e^{t}-e^{-t}+\frac{5}{6}e^{-2t}\right)\;,\; t>0 \;\rightarrow\; s(t)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}e^{t}+e^{-t}-\frac{5}{6}e^{-2t}\right)u(t)$$

مسئله را با استفاده از تبدیل لاپلاس نیز می توان بصورت زیر حل کرد.

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}}{\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}}=\frac{s^2+1}{(s-1)(s+1)(s+2)}=\frac{\frac{1}{3}}{s-1}-\frac{1}{s+1}+\frac{\frac{5}{3}}{s+2}$$

$$\rightarrow\; h(t)=\frac{1}{3}e^{t}-e^{-t}+\frac{5}{3}e^{-2t}\;,\; t>0$$

$$S(s)=U(s)\cdot H(s)=\frac{1}{s}\left(\frac{s^2+1}{(s-1)(s+1)(s+2)}\right)=\frac{-\frac{1}{2}}{s}+\frac{\frac{1}{3}}{s-1}+\frac{1}{s+1}-\frac{\frac{5}{6}}{s+2}$$

$$\rightarrow \quad s(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^{t} + e^{-t} - \frac{5}{6}e^{-3t} \ , \quad t > 0$$

مسئله ۲۲

پاسخ حالت صفر یک مدار خطی تغییر ناپذیر با زمان برای ورودی $x(t) = e^{-t}u(t)$ بصورت $y(t) = \left(e^{-t} + 2e^{-3t}\right)u(t)$ است. پاسخ پله این مدار چیست.(در حوزه زمان حل کنید)

حل : از آنجا که مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان است لذا می توان نوشت.

$$\frac{dx(t)}{dt} = -e^{-t}u(t) + \delta(t) \quad \rightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \delta(t) \quad \rightarrow \quad \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = h(t)$$

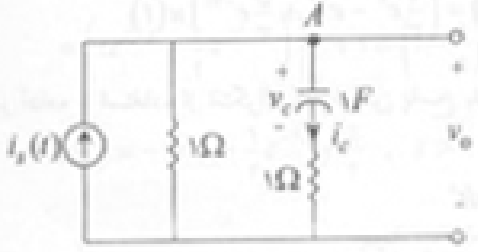
$$\rightarrow \quad h(t) = \left(-2e^{-3t}\right)u(t) + \delta(t) \quad \rightarrow \quad s(t) = \int_0^t h(t')dt' = \int_0^t \left(-2e^{-3t'} + \delta(t')\right)dt'$$

$$= e^{-3t'}\Big|_0^t + 1 = e^{-3t} - 1 + 1 = e^{-3t} \quad \rightarrow \quad s(t) = \left(e^{-3t}\right)u(t)$$

مسئله ۲۳

پاسخ حالت صفر v_o را تعیین کنید. $i_s(t) = e^{-t}u(t)$

اگر $v_c(0) = -1\,V$ باشد، پاسخ کامل $v_o(t)$ را حساب کنید.



شکل مسئله ۲۳

حل : با توجه به شکل مدار داریم

$$v_o = v_c + i_c = v_c + \frac{dv_c}{dt} = v_c + Dv_c \quad \rightarrow \quad v_c = \frac{1}{D+1}v_o \quad \rightarrow \quad i_c = \frac{dv_c}{dt} = Dv_c = \frac{D}{D+1}v_o$$

$$KCL \text{ برای گره } A \quad \rightarrow \quad -i_s + \frac{v_o}{1} + i_c = 0 \quad \rightarrow \quad -i_s + \frac{v_o}{1} + \frac{D}{D+1}v_o = 0$$

$$\rightarrow \quad (2D+1)v_o = (D+1)i_s \quad \rightarrow \quad \frac{2dv_o}{dt} + v_o = \frac{di_s}{dt} + i_s = -e^{-t}u(t) + \delta(t) + e^{-t}u(t) = \delta(t)$$

معادله مشخصه : $2s + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad s = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad v_o(t) = Ke^{-\frac{1}{2}t} \ , \quad t > 0$

در $t = 0^+$ خازن اتصال کوتاه بوده بنابراین داریم

$$i_c(0^+) = \frac{1}{1+1}i_s(0^+) = \frac{1}{2}A \quad \rightarrow \quad v_o(0^+) = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad K = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad v_o(t) = \frac{1}{2}u(t)e^{-\frac{1}{2}t}$$

برای محاسبه پاسخ کامل ابتدا پاسخ ورودی صفر را بدست می آوریم.

$$i_c(t)=0 \rightarrow 2\frac{dv_c}{dt}+v_c=0 \rightarrow v_c(t)=Ke^{-t/2}\ ,\ t>0$$

$$v_c(0)=v_c(0)=-1 \rightarrow K=-1 \rightarrow v_c(t)=-u(t)e^{-t/2}$$

پاسخ کامل برابر مجموع پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر می باشد.

$$v_o(t)=\frac{1}{2}u(t)e^{-t/2}-u(t)e^{-t/2}=-\frac{1}{2}u(t)e^{-t/2}$$

مسئله ۲۴

پاسخ ضربه معادلات دیفرانسیل زیر را تعیین کنید.

۱) $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+3y=2\frac{dx}{dt}+x$

۲) $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+2y=\frac{dx}{dt}+2x$

۳) $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+4y=\frac{dx}{dt}+x$

۴) $\frac{d^3y}{dt^3}+2\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+2y=\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x$

۵) $\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=2\frac{d^2x}{dt^2}+x$

۶) $\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=2\frac{d^2x}{dt^2}+x$

حل : در معادلات دیفرانسیل شامل تابع ضربه پاسخ علاوه بر پاسخ عمومی و خصوصی شامل توابع ویژه $\sum_{k=0}^{n-m} K_k\delta^{(k-m-1)}(t)$ نیز می باشد. که در آن n بیشترین درجه مشتقات خروجی و m بیشترین درجه مشتقات تابع ضربه است. با در نظر گرفتن این موضوع به حل معادلات فوق می پردازیم(واضح است که اگر $n-m<0$ باشد پاسخ شامل ضربه ای نخواهد بود.)

$$x(t)=\delta(t) \rightarrow y(t)=h(t)$$

۱) $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+3y=2\delta^{(1)}(t)+\delta(t)$

معادله مشخصه : $s^2+2s+3=0 \rightarrow s=-1,-3 \rightarrow y(t)=Ae^{-t}+Be^{-3t}$

۲) $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+2y=\delta^{(1)}(t)+\delta(t)$

معادله مشخصه : $s^2+2s+2=0 \rightarrow s=-1\pm j \rightarrow y(t)=e^{-t}(A\cos t+B\sin t)$

۳) $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+4y=\delta^{(1)}(t)+\delta(t)$

معادله مشخصه : $s^2+2s+4=0 \rightarrow s=-2,-2 \rightarrow y(t)=(A+Bt)e^{-2t}$

$$۴)\ \frac{d^3y}{dt^3}+۲\frac{d^2y}{dt^2}+۶\frac{dy}{dt}+۲y=\delta^{(1)}(t)+۳\delta^{(1)}(t)+۲\delta(t)$$

معادله مشخصه : $s^3+۲s^2+۶s+۲=۰ \quad \rightarrow \quad s=-۲\,,-۱\pm j$

$$\rightarrow\ y(t)=Ae^{-2t}+e^{-t}\left(B\cos t+C\sin t\right)$$

$$۵)\ \frac{d^2y}{dt^2}+۳\frac{dy}{dt}+۲y=۲\delta^{(1)}(t)+\delta(t)$$

معادله مشخصه : $s^2+۳s+۲=۰ \quad \rightarrow \quad s=-۱\,,-۲ \quad \rightarrow \quad y(t)=Ae^{-t}+Be^{-2t}+K_0\delta(t)$

$$۶)\ \frac{d^2y}{dt^2}+۳\frac{dy}{dt}+۲y=۲\delta^{2}(t)+\delta(t)$$

معادله مشخصه : $s^2+۳s+۲=۰ \quad \rightarrow \quad s=-۱\,,-۲$

$$\rightarrow\ y(t)=Ae^{-t}+Be^{-2t}+K_0\delta(t)+K_1\delta^{(1)}(t)$$

مسئله ۲۵

کانولوشن دو سیگنال نشان داده شده را محاسبه و رسم کنید.

شکل مسئله ۲۵

حل : با توجه به شکل توابع می توان نوشت

$$v(t)=i_s(t)*h(t)\quad,\quad i_s(t)=u(t)$$

$$۰<t<۱ \quad \rightarrow \quad h(t)=۱ \quad \rightarrow \quad v(t)=\int_0^t h(t')i_s(t-t')dt'=\int_0^t u(t-t')dt=-r(t-t')\Big|_0^t$$

$$=-r(۰)+r(t)=t$$

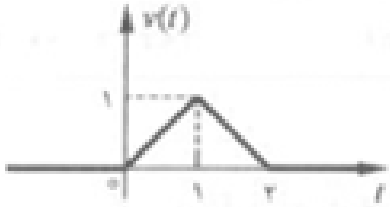
$$۱<t<۲ \quad \rightarrow \quad h(t)=-۱ \quad \rightarrow \quad v(t)=v(۱)+\int_1^t -i_s(t-t')dt'=۱-\int_1^t u(t-t')dt'$$

$$=r(t-t')\Big|_1^t+۱=r(۰)-r(t-۱)+۱=-t+۲$$

$$t>2 \rightarrow h(t)=0 \rightarrow v(t)=v(2)+\int_{0} 0\times i_s(t-t')\,dt' = v(2)=0$$

$$\rightarrow v(t)=\begin{cases} t & , 0<t<1 \\ -t+2 & , 1<t<2 \\ 0 & , t>2 \end{cases}$$

بنابراین $v(t)$ را بصورت زیر می توان رسم کرد.



مسئله ۲۶

اگر بدانیم پاسخ ضربه مداری بصورت $h(t)$ مسئله۲۵باشد، پاسخ حالت صفر این مدار را به ورودی $i_s(t)$ مسئله ۲۵ ، بدون استفاده از انتگرال کانولوشن بدست آورید.

حل : از آنجا که $i_s(t)=u(t)$ می باشد لذا پاسخ حالت صفر خواسته شده پاسخ پله بوده که با انتگرال گیری از پاسخ ضربه $h(t)$ بدست می آید که با توجه به شکل موج $h(t)$ داریم.

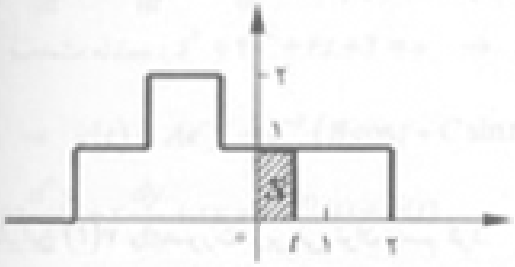
$$h(t)=\begin{cases} 1 & , 0<t<1 \\ -1 & , 1<t<2 \\ 0 & , t>2 \end{cases} \quad , \quad s(t)=\int_{-\infty} h(t)\,dt=\begin{cases} t & , 0<t<1 \\ -t+2 & , 1<t<2 \\ 0 & , t>2 \end{cases}$$

مسئله ۲۷

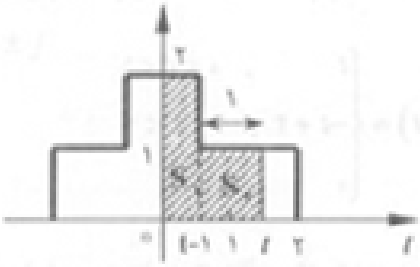
کانولوشن دو سیگنال داده شده را محاسبه و رسم کنید.

شکل مسئله ۲۷

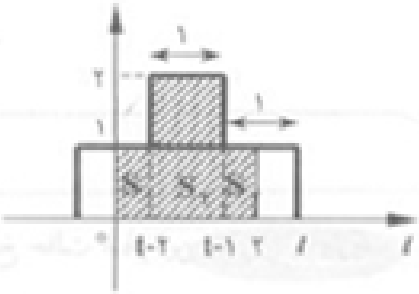
حل : برای حل مسئله از شکل توابع و سطح زیر منحنی آنها استفاده خواهیم کرد(روش ترسیمی).



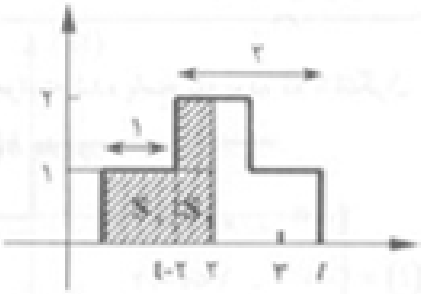
$$0<t<1 \quad \rightarrow \quad v(t)=s=t$$



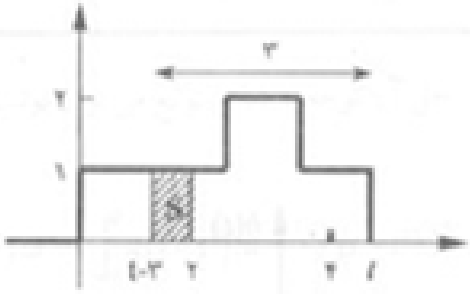
$$1<t<2 \quad \rightarrow \quad v(t)=s_1+s_2=2(t-1)+1=2t-1$$



$$2<t<3 \quad \rightarrow \quad v(t)=s_1+s_2+s_3=(t-2)+2+(2-(t-1))$$



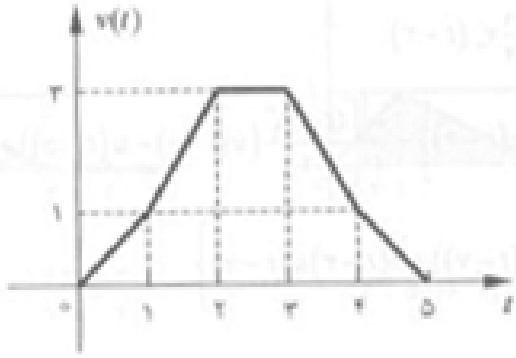
$$3<t<4 \quad \rightarrow \quad v(t)=s_1+s_2=1+2(2-(t-3))=9-2t$$



$$4<t<5 \quad \rightarrow \quad v(t)=s=(2-(t-3))=5-t$$

$$\rightarrow \quad v(t)=\begin{cases} t & , \ 0<t<1 \\ 2t-1 & , \ 1<t<2 \\ 3 & , \ 2<t<3 \\ 9-2t & , \ 3<t<4 \\ 5-t & , \ 4<t<5 \end{cases}$$

بنابراین نمودار $v(t)$ بصورت زیر خواهد شد.



مسئله ۲۸

پاسخ حالت صفر را به دو طریق بدست آورید.

۱- بدون استفاده از انتگرال کانولوشن ۲- با استفاده از انتگرال کانولوشن

شکل مسئله ۲۸

حل : ۱- با توجه به خطی و تغییرناپذیری مدار با زمان و بدون بکارگیری انتگرال کانولوشن داریم.

$$i_s(t) = t\big(u(t) - u(t-1)\big) + \left(\frac{3}{2} - \frac{t}{2}\right)\big(u(t-1) - u(t-3)\big)$$

$$= tu(t) - \frac{3}{2}(t-1)u(t-1) + \frac{1}{2}(t-3)u(t-1) = r(t) - \frac{3}{2}r(t-1) + \frac{1}{2}r(t-3)$$

پاسخ شیب با دو بار انتگرال گیری از پاسخ ضربه بدست می آید.

$$h(t) = \begin{cases} 1 & , 0 < t < 2 \\ 0 & , \quad t > 2 \end{cases} \rightarrow s(t) = \int h(t)dt = \begin{cases} t & , 0 < t < 2 \\ 2 & , \quad t > 2 \end{cases}$$

$$\text{پاسخ شیب} = v_s(t) = \int s(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & , 0 < t < 2 \\ 2t & , \quad t > 2 \end{cases} = \frac{t^2}{2}\big(u(t) - u(t-2)\big) + 2tu(t-2)$$

و پاسخ حالت صفر به ورودی $i_s(t)$ با توجه به $i_s(t)$ بدست آمده بصورت زیر حاصل خواهد شد.

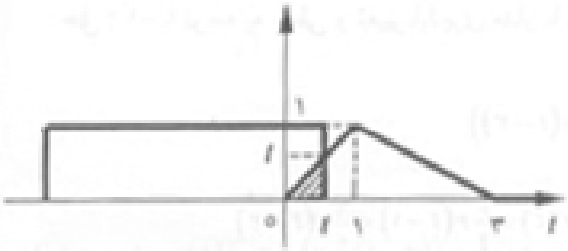
$$v(t)=v_0(t)-\frac{3}{2}v_0(t-1)+\frac{1}{2}v_0(t-3)$$

$$=\left\{\frac{t^2}{2}\left(u(t)-u(t-2)\right)+2tu(t-2)\right\}-\frac{3}{2}\left\{\frac{(t-1)^2}{2}\left(u(t-1)-u(t-5)\right)+2(t-1)u(t-5)\right\}$$

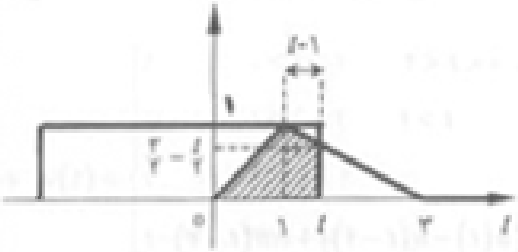
$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{(t-3)^2}{2}\left(u(t-3)-u(t-7)\right)+2(t-3)u(t-7)\right\}$$

$$\rightarrow\ v(t)=\begin{cases}\frac{t^2}{2}\ , & 0<t<1\\ \frac{t^2}{2}-\frac{3}{2}(t-1)^2=-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}\ , & 1<t<3\\ \frac{t^2}{2}-\frac{3}{2}(t-1)^2+\frac{1}{2}(t-3)^2=\frac{3}{2}\ , & 3<t<4\\ 2t-\frac{3}{2}(t-1)^2+\frac{1}{2}(t-3)^2=-\frac{1}{2}t^2+2t-\frac{13}{2}\ , & 4<t<5\\ 2t-6(t-1)+\frac{1}{2}(t-3)^2=\frac{1}{2}t^2-\frac{7}{2}t+\frac{29}{2}\ , & 5<t<7\\ 2t-6(t-1)+2(t-3)=0\ , & t>7\end{cases}$$

۲- حال با استفاده از انتگرال کانولوشن و به روش ترسیمی $v(t)$ را بدست می آوریم.

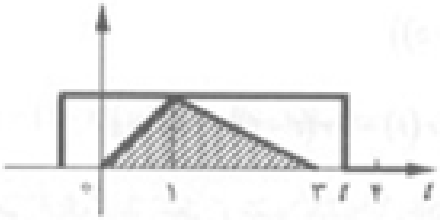


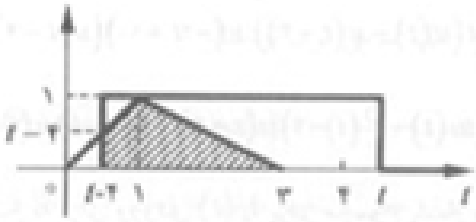
$$0<t<1\ \rightarrow\ v(t)=\frac{t\times t}{2}=\frac{t^2}{2}$$



$$1<t<3\ \rightarrow\ v(t)=\frac{1\times 1}{2}+\frac{(t-1)}{2}\left(\frac{3}{2}-t+1\right)$$

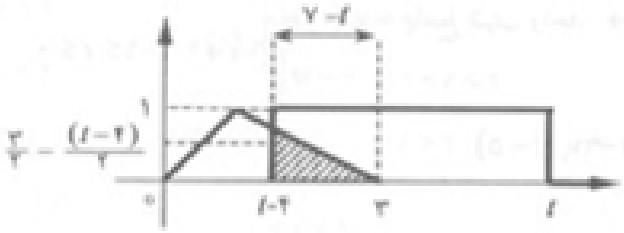
$$=-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}$$





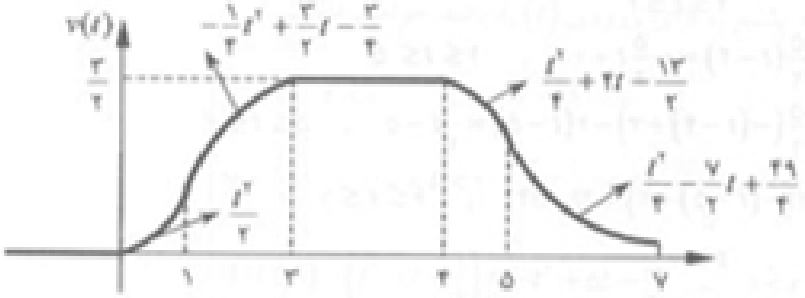
$$۲ < t < ۴ \rightarrow v(t) = \frac{۱ \times ۳}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

$$۴ < t < ۵ \rightarrow v(t) = \frac{۳}{۲} - \frac{(t-۲)^۲}{۲} = -\frac{t^۲}{۲} + ۲t - \frac{۱۳}{۲}$$



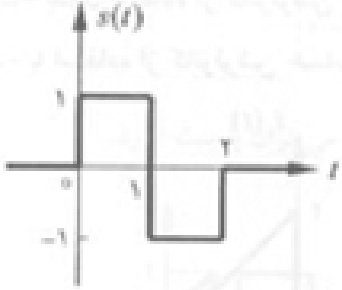
$$۵ < t < ۷ \rightarrow v(t) = \frac{(۷-t)\left(\frac{۳}{۲} - \frac{t-۲}{۲}\right)}{۲} = \frac{t^۲}{۴} - \frac{۷}{۲}t + \frac{۴۹}{۴}$$

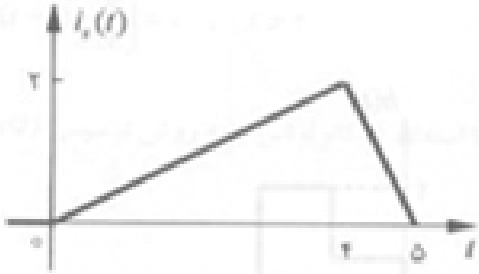
بنابراین شکل موج پاسخ حالت صفر $v(t)$ بصورت زیر خواهد بود.



مسئله ۲۹

پاسخ پله مداری داده شده است. پاسخ حالت صفر را برای ورودی $i_s(t)$ بدست آورید.





شکل مسئله ۲۹

حل : می توان نوشت.

$$i_s(t)=\frac{1}{2}t\big(u(t)-u(t-2)\big)+(-2t+10)\big(u(t-2)-u(t-5)\big)$$

$$=\frac{1}{2}tu(t)-\frac{5}{2}(t-2)u(t-2)-2(t-5)u(t-5)=\frac{1}{2}r(t)-\frac{5}{2}r(t-2)-2r(t-5)$$

با فرض اینکه مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان باشد پاسخ به ازای ورودی $i_s(t)$ برابر مجموع پاسخ به ازای سه تابع شیب است همچنین پاسخ شیب برابر انتگرال پاسخ پله می باشد بنابراین داریم

$$s(t)=\begin{cases}1 & , \quad 0\le t\le 1\\ -1 & , \quad 1\le t\le 2\end{cases} \rightarrow \text{پاسخ شیب واحد}=v_1(t)=\begin{cases}t & , \quad 0\le t\le 1\\ -t+2 & , \quad 1\le t\le 2\end{cases}$$

$$v(t)=\frac{1}{2}v_1(t)-\frac{5}{2}v_1(t-2)-2v_1(t-5)$$

$$\rightarrow v(t)=\begin{cases}0 & , \quad t\le 0\\ \frac{1}{2}t & , \quad 0\le t\le 1\\ -\frac{1}{2}t+1 & , \quad 1\le t\le 2\\ 0 & , \quad 2\le t\le 2\\ -\frac{5}{2}(t-2)=-\frac{5}{2}t+10 & , \quad 2\le t\le 5\\ -\frac{5}{2}\big(-(t-2)+2\big)-2(t-5)=\frac{1}{2}t-5 & , \quad 5\le t\le 6\\ -2\big(-(t-5)+2\big)=2t-12 & , \quad 6\le t\le 7\\ 0 & , \quad t\ge 7\end{cases}$$

مسئله ۳۰

ورودی یک مدار خطی تغییر ناپذیر با زمان و پاسخ ضربه آن داده شده اند از پاسخ حالت صفر را:

الف- بدون استفاده از کانولوشن حساب کنید.

ب- با استفاده از کانولوشن حساب کنید.

شکل مسئله ۳۰

حل : الف ـ می توان نوشت.

$$i_s(t)=(2-t)\big(u(t)-u(t-2)\big)=2u(t)-tu(t)+(t-2)u(t-2)=2u(t)-r(t)+r(t-2)$$

از آنجا که مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان است لذا با انتگرال گیری های متوالی می توان پاسخ پله و پاسخ ضربه را بدست آورد.

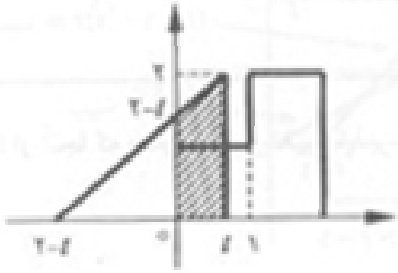
$$h(t)=\begin{cases}0 & , t<0\\ 1 & , 0<t<1\\ 2 & , 1<t<2\\ 0 & , t>2\end{cases}\quad\rightarrow\quad s(t)=\begin{cases}0 & , t<0\\ t & , 0<t<1\\ 2t-1 & , 1<t<2\\ 0 & , t>2\end{cases}$$

$$\text{پاسخ شیب}=v_s(t)=\begin{cases}\dfrac{t^2}{2} & , 0<t<1\\ t^2-t+\dfrac{1}{2} & , 1<t<2\\ 2t-\dfrac{7}{2} & , t>2\end{cases}$$

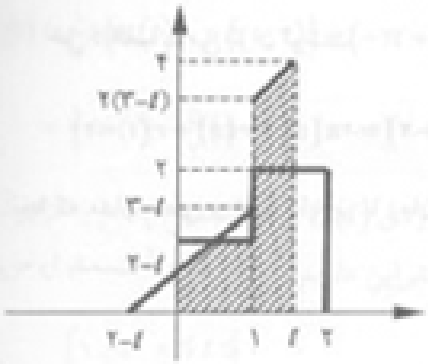
بنابراین اگر $v(t)$ پاسخ به ازای ورودی $i_s(t)$ باشد خواهیم داشت.

$$v(t)=2s(t)-v_s(t)+v_s(t-2)=\begin{cases}0 & , t<0\\ 2t-\dfrac{t^2}{2} & , 0<t<1\\ 2(2t-1)-\left(t^2-t+\dfrac{1}{2}\right)=-t^2+5t-\dfrac{5}{2} & , 1<t<2\\ 6-\left(2t-\dfrac{7}{2}\right)+\dfrac{(t-2)^2}{2}=\dfrac{t^2}{2}-5t+\dfrac{23}{2} & , 2<t<3\\ 6-\left(2t-\dfrac{7}{2}\right)+\left[(t-2)^2-(t-2)+\dfrac{1}{2}\right]=t^2-8t+16 & , 3<t<4\\ 6-\left(2t-\dfrac{7}{2}\right)+\left[2(t-2)-\dfrac{7}{2}\right]=0 & , t>4\end{cases}$$

ب ـ با استفاده از کانولوشن و به روش ترسیمی $v(t)$ را بصورت زیر می توان بدست آورد.

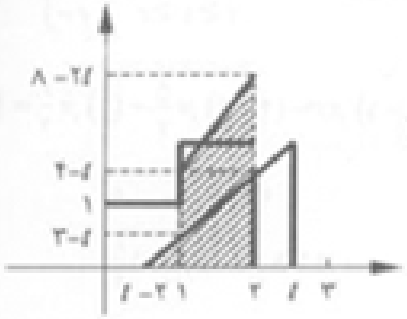


$$0<t<1\quad\rightarrow\quad v(t)=\left(\frac{2-t+2}{2}\right)(t)=2t-\frac{t^2}{2}$$



$$۱ < t < ۲ \rightarrow v(t) = \left(\frac{۲ - t + ۳ - t}{۲}\right)(۱) + \left(\frac{۶ - ۲t + ۴}{۲}\right)(t - ۱)$$

$$= -t^{۲} + ۵t - \frac{۵}{۲}$$



$$۲ < t < ۳ \rightarrow v(t) = \frac{((۳ - t)(۱ - (t - ۲))}{۲} + \left(\frac{۴ - t + ۸ - ۲t}{۲}\right)(۱)$$

$$= \frac{t^{۲}}{۲} - ۵t + \frac{۲۳}{۲}$$

$$۳ < t < ۴ \rightarrow v(t) = \frac{(۸ - ۲t)(۴ - (t - ۲))}{۲}$$

$$= t^{۲} - ۸t + ۱۶$$

مسئله ۳۱

پاسخ حالت صفر را بدست آورید. (مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان است.)

شکل مسئله ۳۱

حل : از آنجا که مدار خطی و تغییر ناپذیر است می توان نوشت.

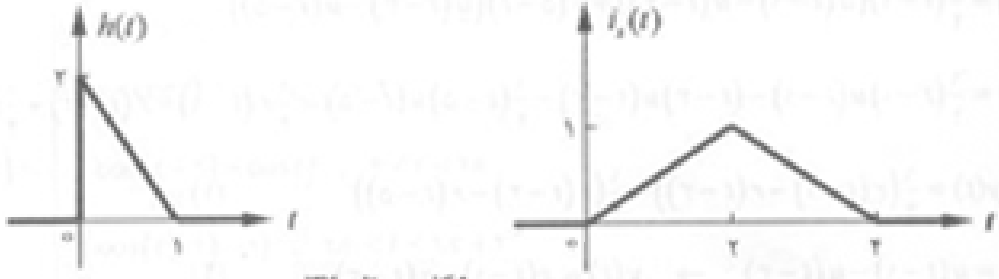
$$i_s(t)=3t\big(u(t)-u(t-1)\big)=3tu(t)-3(t-1)u(t-1)-3u(t-1)=3r(t)-3r(t-1)-3u(t-1)$$

$$h(t)=\begin{cases}0 & , t<0\\ 1 & , 0<t<2\\ 0 & , t>0\end{cases}\rightarrow s(t)=\begin{cases}0 & , t<0\\ t & , 0<t<2\\ 2 & , t>2\end{cases}\rightarrow \text{پاسخ شیب}=v_1(t)=\begin{cases}0 & , t<0\\ \frac{t^2}{2} & , 0<t<2\\ 2t-2 & , t>2\end{cases}$$

$$v(t)=3v_1(t)-3v_1(t-1)-3s(t-1)=\begin{cases}0 & , t\leq 0\\ 3\frac{t^2}{2} & , 0\leq t<1\\ 3\frac{t^2}{2}-3\frac{(t-1)^2}{2}-3(t-1)=\frac{3}{2} & , 1<t<2\\ 3(2t-2)-3\frac{(t-1)^2}{2}-3(t-1)=-\frac{3}{2}t^2+6t-\frac{9}{2} & , 2<t<3\\ 3(2t-2)-3\big(2(t-1)-2\big)-3(2)=0 & , t>3\end{cases}$$

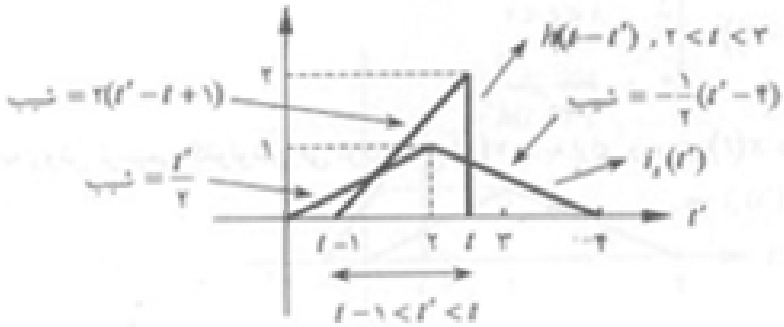
مسئله ۳۲

پاسخ حالت صفر را در فاصله $2\leq t\leq 3$ تعیین کنید.(مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان است).



شکل مسئله ۳۲

حل : با بکار گیری انتگرال کانولوشن و با استفاده از روش ترسیمی داریم.



$$2<t<3 \quad \rightarrow \quad v(t)=i_s(t)*h(t)=\int_{-1}^{t} i_s(t')h(t-t')dt'$$

$$\rightarrow \quad v(t)=\int_{-1}^{t}\frac{1}{2}t'\left(2-2(t-t')\right)dt'+\int_{1}^{t}\left(2-\frac{1}{2}t'\right)\left(2-2(t-t')\right)dt'=\frac{t^3}{3}-3t^2+\frac{17}{2}t-\frac{21}{6}$$

مسئله ۳۳

الف- در یک مدار خطی و تغییرناپذیر با زمان برای ورودی $x(t)$ پاسخ حالت صفر $y(t)$ حاصل شده است. پاسخ را برای $x(t)=\begin{cases}\sin t & , \ 0\le t\le 2\pi \\ 0 & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$ بدست آورید.

ب- کانولوشن $x(t)$ و $y(t)$ را تعیین کنید.

شکل مسئله ۳۳

حل : **الف** ـ با توجه به شکل مسئله می توان نوشت.

$$y(t)=\frac{1}{2}(t-1)\left(u(t-1)-u(t-3)\right)+\frac{1}{2}(5-t)\left(u(t-3)-u(t-5)\right)$$

$$=\frac{1}{2}(t-1)u(t-1)-(t-3)u(t-3)-\frac{1}{2}(t-5)u(t-5)=\frac{1}{2}r(t-1)-r(t-3)+\frac{1}{2}r(t-5)$$

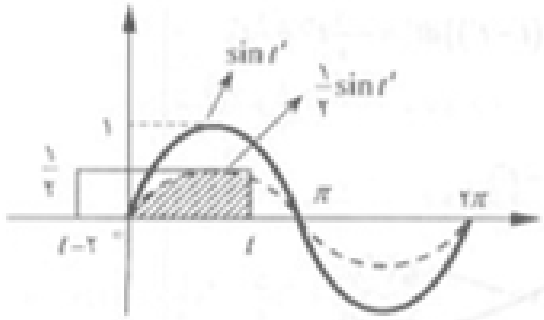
$$\rightarrow \quad y(t)=\frac{1}{2}\left(r(t-1)-r(t-3)\right)-\frac{1}{2}\left(r(t-3)-r(t-5)\right) \qquad (1)$$

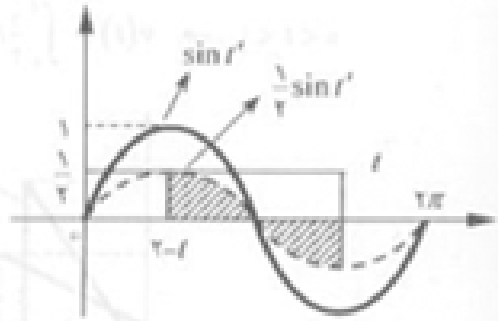
$$x(t)=u(t-1)-u(t-3) \quad \rightarrow \quad y(t)=s(t-1)-s(t-3) \qquad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \quad \rightarrow \quad s(t-1)=\frac{1}{2}\left(r(t-1)-r(t-3)\right) \quad \rightarrow \quad h(t-1)=\frac{1}{2}\left(u(t-1)-u(t-3)\right)$$

$$\rightarrow \quad h(t)=\frac{1}{2}\left(u(t)-u(t-2)\right)=\begin{cases}\frac{1}{2} & , \ 1<t<2 \\ 0 & , \ \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

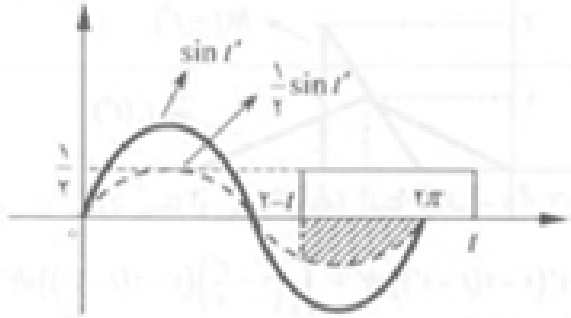
بنابراین به روش ترسیمی کانولوشن می توان پاسخ $v(t)$ را به ازای ورودی $x(t)$ داده شده بدست آورد.





$$0 < t < 2 \rightarrow v(t) = \int_0^t \frac{1}{2}\sin t'dt' = \frac{1}{2}(1-\cos t)$$

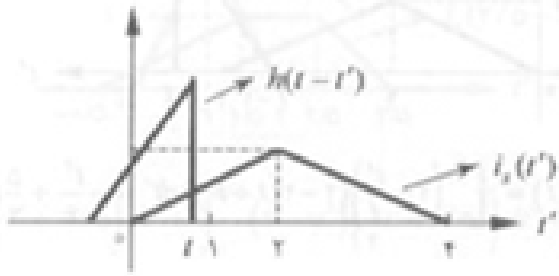
$$2 < t < 2\pi \rightarrow v(t) = \int_{2-t}^t \frac{1}{2}\sin t'dt' = \frac{1}{2}\left(\cos(t-2)-\cos t\right)$$



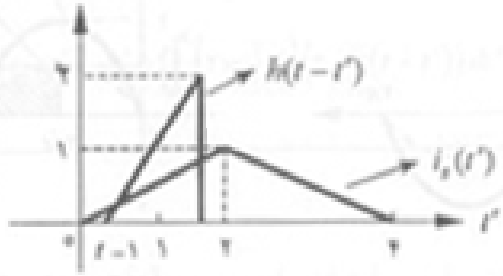
$$2\pi < t < 2+2\pi \rightarrow v(t) = \int_{2-t}^{2\pi} \frac{1}{2}\sin t'dt' = \frac{1}{2}\left(\cos(t-2)-1\right)$$

$$\rightarrow v(t) = \begin{cases} 0 \quad , \quad t < 0 \\ \frac{1}{2}(1-\cos t) \quad , \quad 0 < t < 2 \\ \frac{1}{2}\left(\cos(t-2)-\cos t\right) \quad , \quad 2 < t < 2\pi \\ \frac{1}{2}\left(\cos(t-2)-1\right) \quad , \quad 2\pi < t < 2\pi+2 \\ 0 \quad , \quad t > 2\pi+2 \end{cases}$$

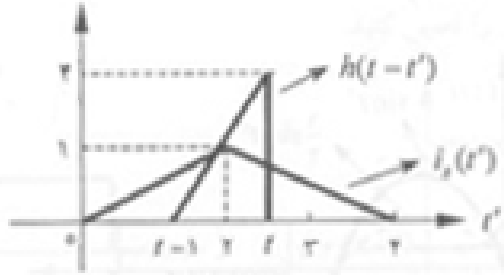
پ ـ با توجه به رابطه $v(t) = h(t) * i_s(t) = \int_0^t i_s(t')h(t-t')dt'$ و با توجه به شکل های زیر داریم.



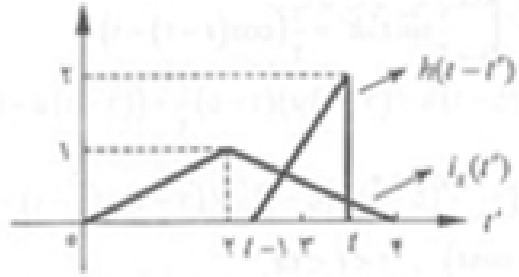
$$0<t<1 \;\rightarrow\; v(t)=\int_0^t \frac{1}{2}t'\left(2-2(t-t')\right)dt'=-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t^2$$



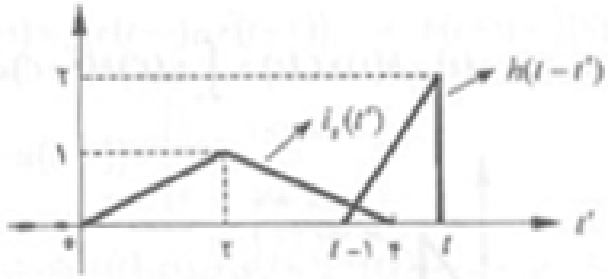
$$1<t<2 \;\rightarrow\; v(t)=\int_{t-1}^t \frac{1}{2}t'\left(2-2(t-t')\right)dt'=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}$$



$$2<t<3 \;\rightarrow\; v(t)=\int_{t-1}^2 \frac{1}{2}t'\left(2-2(t-t')\right)dt'+\int_2^t\left(2-\frac{t'}{2}\right)\left(2-2(t-t')\right)dt'=\frac{1}{6}t^3-\frac{5}{3}t^2+\frac{11}{2}t-\frac{7}{3}$$



$$3<t<4 \;\rightarrow\; v(t)=\int_{t-1}^t \left(2-\frac{t'}{2}\right)\left(2-2(t-t')\right)dt'=-\frac{t}{2}+\frac{1}{6}$$



$$4<t<5 \;\rightarrow\; v(t)=\int_{t-1}^4 \left(2-\frac{t'}{2}\right)\left(2-2(t-t')\right)dt'=-\frac{t^3}{6}+\frac{5}{2}t^2-\frac{15}{2}t+\frac{113}{6}$$

$$\rightarrow \quad v(t)=\begin{cases} 0 & , \quad t<0 \\ -\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t^2 & , \quad 0<t<1 \\ -\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{3} & , \quad 1<t<2 \\ \frac{1}{6}t^3-\frac{5}{2}t^2+\frac{11}{2}t-\frac{7}{3} & , \quad 2<t<3 \\ -\frac{t}{2}+\frac{1}{6} & , \quad 3<t<4 \\ -\frac{1}{6}t^3+\frac{5}{2}t^2-\frac{15}{2}t+\frac{113}{6} & , \quad 4<t<5 \\ 0 & , \quad t>5 \end{cases}$$

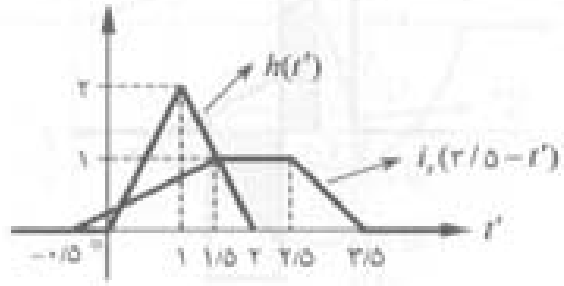
مسئله ۳۴

پاسخ حالت صفر را در $t=3/5$ حساب کنید. (مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان است).

شکل مسئله ۳٤

حل: با توجه به رابطه انتگرال کانولوشن داریم

$$v(t)=i_s(t)*h(t)=\int_0^t h(t')i_s(t-t')dt' \rightarrow v(3/5)=\int_0^{3/5} h(t')i_s(3/5-t')dt'$$



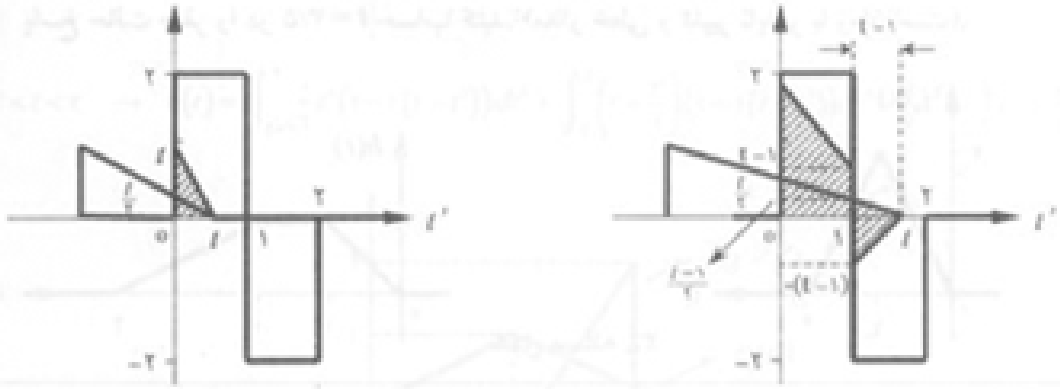
$$\rightarrow v(3/5)=\int_0^1 2t'\left(\frac{1}{2}t'+0/25\right)dt'+\int_1^{1/5}(2-2t')\left(\frac{1}{2}t'+0/25\right)dt'+\int_{1/5}^{2}(2-2t')dt'=1/279V$$

مسئله ۳۵

با استفاده از کانولوشن پاسخ حالت صفر را برای ورودی $i_s(t)$ تعیین و رسم کنید.

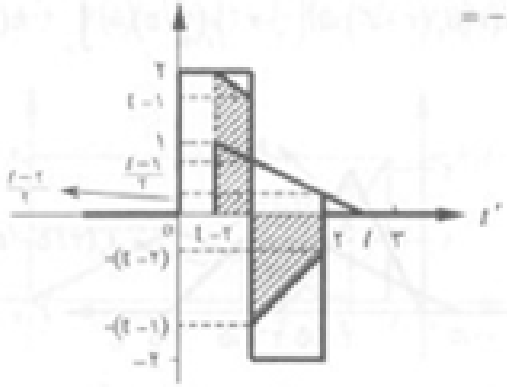
شکل مسئله ۳۵

حل : با فرض خطی و تغییر ناپذیر بودن مدار و با استفاده از روش ترسیمی داریم.

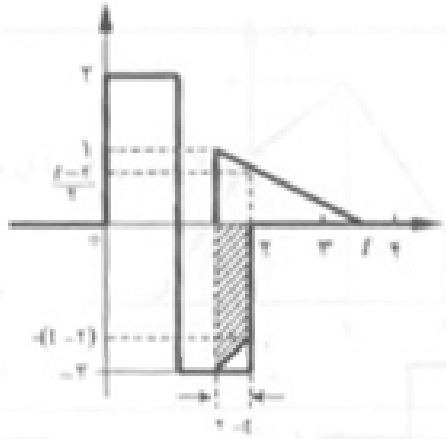


$$0<t<1 \rightarrow v(t)=\frac{t\times t}{2}=\frac{t^2}{2}$$

$$1<t<2 \rightarrow v(t)=\left(\frac{t-1+t}{2}\right)(1)+\frac{(t-1)(t-1)}{2}=-\frac{t^2}{2}+2t-1$$



$$2<t<3 \rightarrow v(t)=\left(\frac{2+t-1}{2}\right)\left(1-(t-2)\right)+\left(\frac{t-1+t-2}{2}\right)(1)=-\frac{t^2}{2}+\frac{3}{2}$$

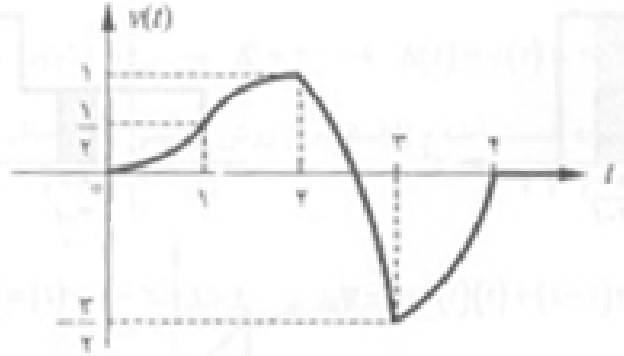


$$۲ < t < ۴ \rightarrow v(t) = -\left(\frac{t-۲+۲}{۲}\right)(۴-t) = \frac{t^۲}{۲} - ۴t$$

بنابراین پاسخ حالت صفر $v(t)$ بصورت زیر می باشد.

$$\rightarrow \quad v(t) = \begin{cases} ۰ \quad , \quad t < ۰ \\ \frac{t^۲}{۲} \quad , \quad ۰ < t < ۱ \\ -\frac{t^۲}{۲} + ۴t - ۱ \quad , \quad ۱ < t < ۲ \\ -\frac{t^۲}{۲} + ۳ \quad , \quad ۲ < t < ۳ \\ \frac{t^۲}{۲} - ۴t \quad , \quad ۳ < t < ۴ \\ ۰ \quad , \quad t > ۴ \end{cases}$$

نمودار $v(t)$ در شکل زیر رسم شده است.



مسئله ۳۶

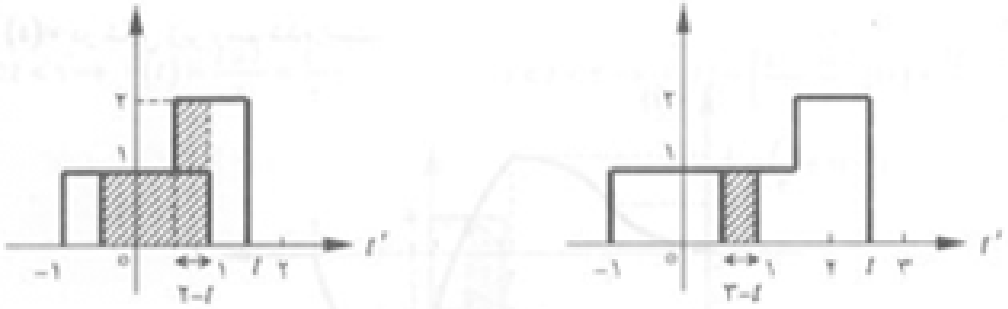
کانولوشن دو سیگنال داده شده را تعیین و رسم کنید.

شکل مسئله ۳۶

حل : با فرض $v(t) = i_s(t) * h(t)$ و خطی وتغییر ناپذیر بودن دو سیگنال و با استفاده از روش ترسیمی داریم.

$-۱ < t < ۰ \rightarrow v(t) = ۲(t+۱) = ۲t + ۲$

$۰ < t < ۱ \rightarrow v(t) = (۱)(t) + (۱)(۲) = t + ۲$

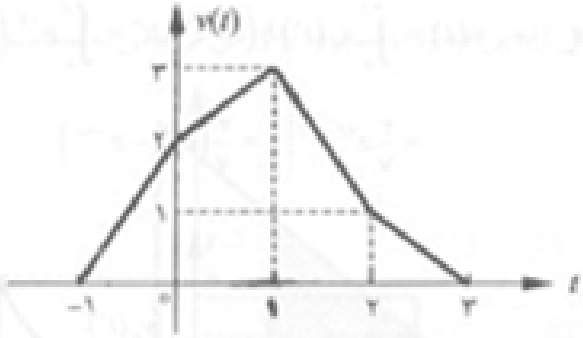


$۱ < t < ۲ \rightarrow v(t) = ۲(۲-t) + (۱)(۱) = ۵ - ۲t$

$۲ < t < ۳ \rightarrow v(t) = (۳-t)(۱) = ۳ - t$

بنابراین کانولوشن دو سیگنال $h(t)$ و $i_s(t)$ بصورت زیر خواهد بود که آن را رسم کرده ایم.

$$\rightarrow \quad v(t)=\begin{cases} 0 & , \quad t<0 \\ 2t+2 & , \quad -1<t<0 \\ t+2 & , \quad 0<t<1 \\ 5-2t & , \quad 1<t<2 \\ 3-t & , \quad 2<t<3 \\ 0 & , \quad t>3 \end{cases}$$

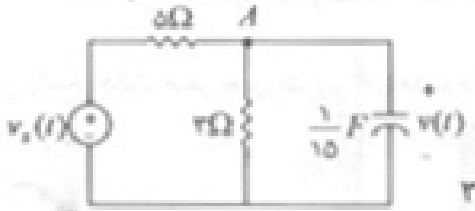


مسئله ۳۷

الف- پاسخ ضربه مدار را تعیین کنید.

ب- با استفاده از انتگرال کانولوشن پاسخ حالت صفر را به ورودی زیر تعیین و رسم کنید.

$$v_s(t)=e^{-t}\left(u(t)-u(t-2)\right)$$



شکل مسئله ۳۷

حل : الف- با توجه به شکل مدار $v_s=0$ بوده و خواهیم داشت.

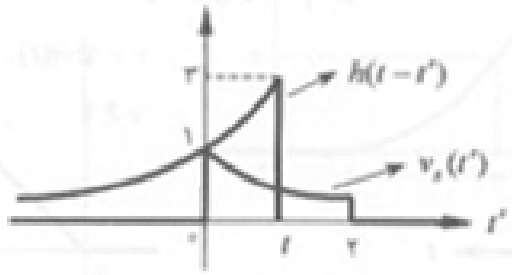
$$KCL \text{ برای گره } A \rightarrow \quad \frac{v-v_s}{5}+\frac{v}{3}+\frac{1}{15}\frac{dv}{dt}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt}+8v=3v_s=3\delta(t)$$

معادله مشخصه: $s+8=0 \quad \rightarrow \quad s=-8 \quad \rightarrow \quad v(t)=Ke^{-8t}$

از آنجا که حالت اولیه صفر است لذا $v(0^-)=0$ بوده و با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

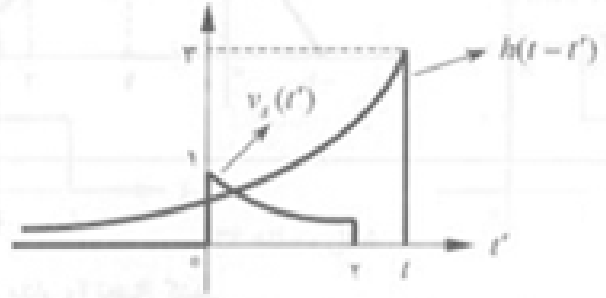
$$v(0^+)-v(0^-)+0=3 \quad \rightarrow \quad v(0^+)=3 \quad \rightarrow \quad K=3 \quad \rightarrow \quad h(t)=v(t)=3e^{-8t}, \ t>0$$

ب- با توجه به پاسخ ضربه بدست آمده و با استفاده از روش ترسیمی پاسخ حالت صفررا به ازای ورودی $v_s(t)$ داده شده محاسبه می کنیم.



$$0<t<2 \;\rightarrow\; v(t)=\int_0^t v_s(t')h(t-t')dt'=\int_0^t e^{-t'}\left(2e^{-8(t-t')}\right)dt'=\int_0^t 2e^{7t'-8t}dt'$$

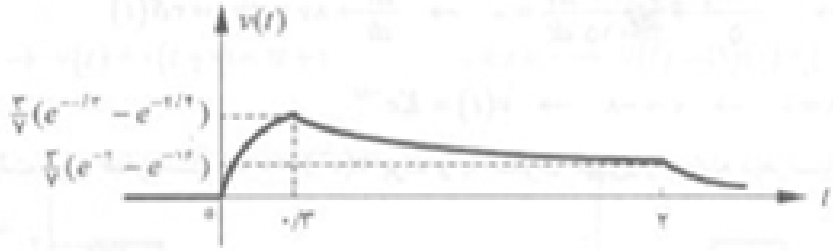
$$=\frac{2}{7}e^{7t'-8t}\Big|_0^t=\frac{2}{7}\left(e^{-t}-e^{-8t}\right)$$



$$t>2 \;\rightarrow\; v(t)=\int_0^2 2e^{7t'-8t}dt'=\frac{2}{7}e^{7t'-8t}\Big|_0^2=\frac{2}{7}\left(e^{14-8t}-e^{-8t}\right)$$

بنابراین پاسخ حالت صفر بصورت زیر خواهد بود که آن را رسم می کنیم.

$$\rightarrow\; v(t)=\begin{cases}0 \;, & t<0\\ \frac{2}{7}\left(e^{-t}-e^{-8t}\right) \;, & 0<t<2\\ \frac{2}{7}\left(e^{14-8t}-e^{-8t}\right) \;, & t>2\end{cases}$$

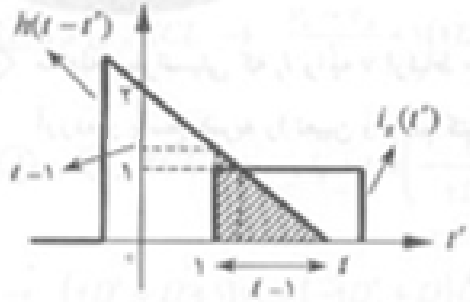


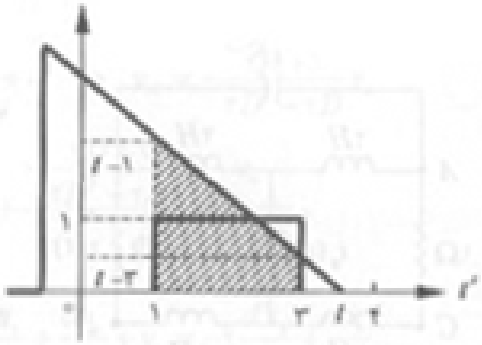
مسئله ۳۸

کانولوشن دو سیگنال داده شده را تعیین و رسم کنید.

شکل مسئله ۳۸

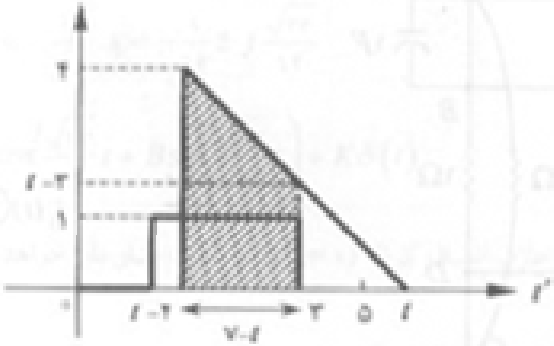
حل : بدین منظور با استفاده از روش ترسیمی به محاسبه کانولوشن در بازه های مختلف می پردازیم.





$$1<t<3 \rightarrow v(t)=\frac{(t-1)(t-1)}{2}=\frac{t^2}{2}-t+\frac{1}{2}$$

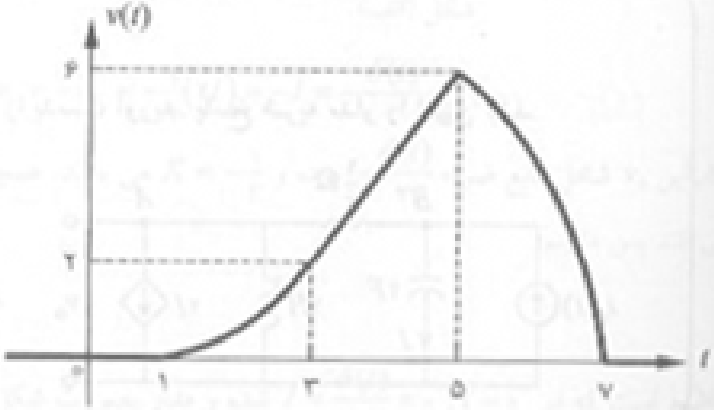
$$3<t<5 \rightarrow v(t)=\left(\frac{t-1+t+3}{2}\right)(3-1)=2t-4$$



$$5<t<7 \rightarrow v(t)=\left(\frac{t-3+4}{2}\right)(7-t)=-\frac{t^2}{2}+3t+\frac{7}{2}$$

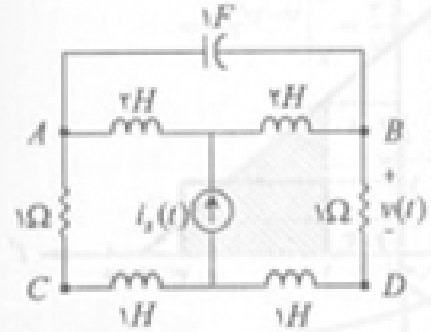
بنابراین کانولوشن دو تابع بصورت زیر خواهد بود که آن را رسم می کنیم.

$$v(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<1\\ \frac{t^2}{2}-t+\frac{1}{2} & , \quad 1<t<3\\ 2t-4 & , \quad 3<t<5\\ -\frac{t^2}{2}+3t+\frac{7}{2} & , \quad 5<t<7\\ 0 & , \quad t>7\end{cases}$$



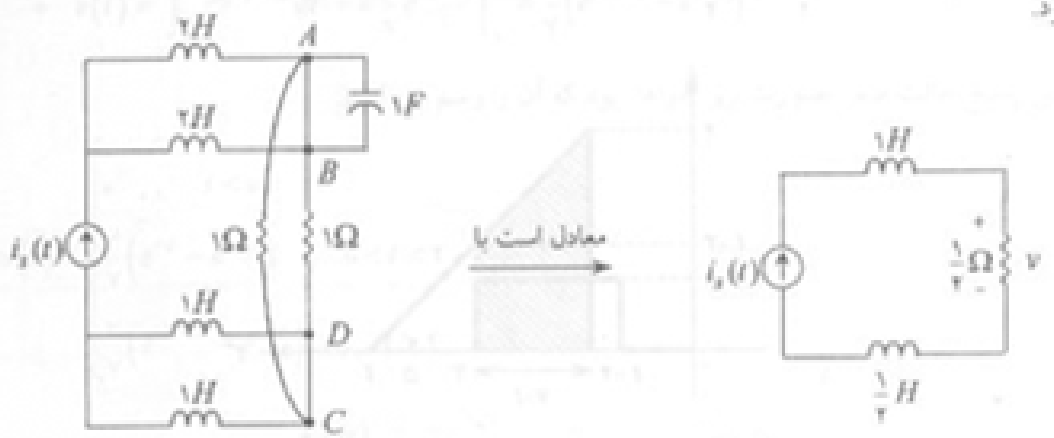
مسئله ۳۹

معادله دیفرانسیلی که i_s را به v ارتباط می دهد بدست آورده و پاسخ ضربه را تعیین و رسم کنید.



شکل مسئله ۳۹

حل : با توجه به تقارن مدار، نقاط B و A و همچنین D و C هم پتانسیل بوده و مدار را می توان بصورت زیر رسم کرد.

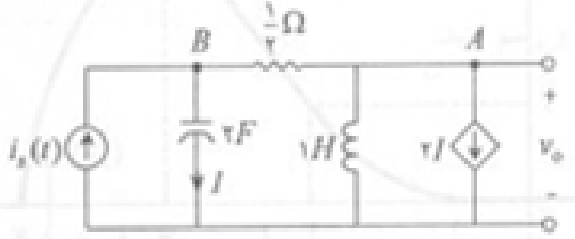


بنابراین داریم.

$$v(t)=\frac{1}{2}i_s(t) \quad \rightarrow \quad h(t)=v(t)\big|_{i_s(t)=\delta(t)}=\frac{1}{2}\delta(t)$$

مسئله ۴۰

معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده v_o به i_s را بدست آورید. پاسخ ضربه مدار را تعیین کنید.



شکل مسئله ۴۰

حل : با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات انتگرال دیفرانسیل داریم.

$$I = 2\frac{dv_A}{dt} = 2Dv_A \;,\; v_B = v_o$$

KCL برای گره Ⓑ $\rightarrow \dfrac{v_o - v_A}{\frac{1}{2}} + 2(2Dv_A) + \dfrac{1}{D}v_o = 0 \;\rightarrow\; v_A = -\dfrac{2D+1}{4D^2-2D}v_o$

KCL برای گره Ⓐ $\rightarrow -i_s + 2D\left(-\dfrac{2D+1}{4D^2-2D}v_o\right) + \dfrac{-\dfrac{2D+1}{4D^2-2D}v_o - v_o}{\frac{1}{2}} = 0$

$$\rightarrow \left(6D^2 + D + 1\right)v_o = \left(-2D^2 + D\right)i_s \;\rightarrow\; 6\frac{d^2v_o}{dt^2} + \frac{dv_o}{dt} + v_o = -2\frac{d^2i_s}{dt^2} + \frac{di_s}{dt}$$

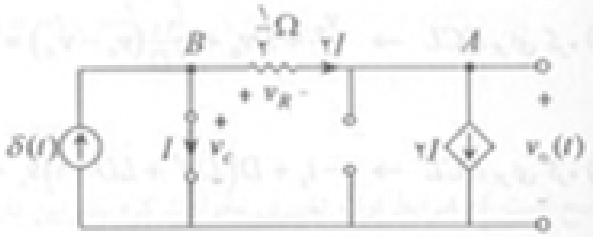
در ادامه با جایگذاری $i_s(t) = \delta(t)$ پاسخ ضربه را بدست خواهیم آورد.

$$6\frac{d^2v_o}{dt} + \frac{dv_o}{dt} + v_o = -2\delta^{(2)}(t) + \delta^{(1)}(t)$$

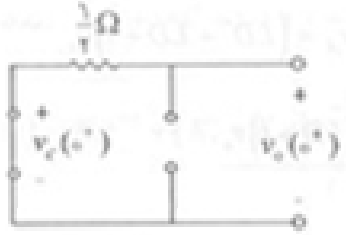
معادله مشخصه: $6s^2 + s + 1 = 0 \;\rightarrow\; s = -\dfrac{1}{12} \pm j\dfrac{\sqrt{23}}{12}$

$$\rightarrow\; v_o(t) = u(t)e^{-\frac{t}{12}}\left(A\cos\frac{\sqrt{23}}{12}t + B\sin\frac{\sqrt{23}}{12}t\right) + K\delta(t)$$

مطابق شکل (الف) در $t = 0$ خازن اتصال کوتاه ($v_c = 0$) و سلف مدار باز خواهد بود و خواهیم داشت.



شکل (الف)



شکل (ب)

$$2I + I = \delta(t) \;\rightarrow\; I = \frac{\delta(t)}{3} \;,\; v_o = -v_R = -\frac{1}{2}(2I) = -I = -\frac{\delta(t)}{3}$$

بنابراین v_o شامل تابع ضربه $-\dfrac{\delta(t)}{3}$ بوده و $K = -\dfrac{1}{3}$ می باشد. همچنین جریان ضربه $I = \dfrac{\delta(t)}{3}$ از خازن عبور می کند پس داریم.

$$v_c(0^+) = v_c(0^-) + \frac{1}{2}\int_{0^-}^{0^+}\frac{\delta(t)}{3}dt = \frac{1}{6}V$$

واضح است که در $t = 0^+$، $I = \dfrac{\delta(t)}{3} = 0$ شده و مدار بصورت شکل (ب) می باشد. پس داریم.

$$v_o(0^+) = v_c(0^+) = \frac{1}{6} \;\rightarrow\; A = \frac{1}{6}$$

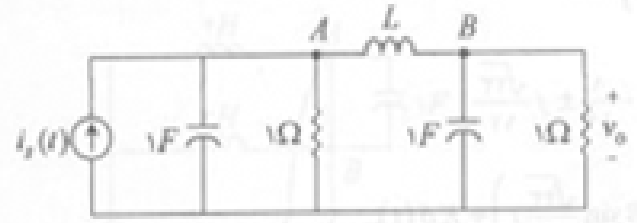
و با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+، $\frac{dv_0(0^+)}{dt}$ را بدست خواهیم آورد.

$$\frac{dv_0(0^+)}{dt}+\frac{1}{6}=0 \rightarrow \frac{dv_0(0^+)}{dt}=-\frac{1}{6} \rightarrow -\frac{1}{12}A+\frac{\sqrt{23}}{12}B=-\frac{1}{6} \rightarrow B=-\frac{11}{6\sqrt{23}}$$

$$\rightarrow h(t)=v_0(t)=u(t)e^{-\frac{t}{12}}\left(\frac{1}{6}\cos\frac{\sqrt{23}}{12}t-\frac{11}{6\sqrt{23}}\sin\frac{\sqrt{23}}{12}t\right)-\frac{\delta(t)}{2}$$

مسئله ۴۱

معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده i_s و v_0 را بنویسید. برای $L=2H$ و $L=8H$ پاسخ ضربه مدار را تعیین کنید.



شکل مسئله ۴۱

حل: با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات انتگرال- دیفرانسیل داریم.

KCL برای گره B $\rightarrow \frac{v_0}{1}+Dv_0+\frac{1}{LD}(v_0-v_A)=0 \rightarrow v_A=\left(LD^2+LD+1\right)v_0$

KCL برای گره A $\rightarrow -i_s+D\left(LD^2+LD+1\right)v_0+\frac{\left(LD^2+LD+1\right)v_0}{1}$

$$+\frac{1}{LD}\left(\left(LD^2+LD+1\right)v_0-v_0\right)=0$$

$$\rightarrow \left(LD^3+2LD^2+(L+2)D+2\right)v_0=i_s \rightarrow L\frac{d^3v_0}{dt^3}+2L\frac{d^2v_0}{dt^2}+(L+2)\frac{dv_0}{dt}+2v_0=i_s$$

حال به ازای $L=2H$ و $i_s(t)=\delta(t)$ پاسخ ضربه را بدست می آوریم.

$$2\frac{d^3v_0}{dt^3}+8\frac{d^2v_0}{dt^2}+6\frac{dv_0}{dt}+2v_0=\delta(t)$$

معادله مشخصه: $2s^3+8s^2+6s+2=0 \rightarrow s=-1,\ -\frac{1}{2}\pm j\frac{1}{2}$

$$\rightarrow v_0(t)=K_1e^{-t}+e^{-\frac{1}{2}t}\left(K_2\cos\frac{1}{2}t+K_3\sin\frac{1}{2}t\right),\ t>0$$

در $t = 0^+$ خازنها اتصال کوتاه و سلف مدار باز است بنابراین داریم.

$$v_o(0^+) = \frac{dv_o(0^+)}{dt} = 0$$

همچنین با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

$$2\frac{d^2 v_o(0^+)}{dt^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 v_o(0^+)}{dt^2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} v_o(0^+) = 0 & \rightarrow \; K_1 + K_2 = 0 \\ \dfrac{dv_o(0^+)}{dt} = 0 & \rightarrow \; K_1 - \frac{1}{2}K_2 + \frac{1}{2}K_3 = 0 \\ \dfrac{d^2 v_o(0^+)}{dt^2} = \frac{1}{2} & \rightarrow \; K_1 - \frac{1}{2}K_3 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} K_1 = \frac{1}{2} \\ K_2 = -\frac{1}{2} \\ K_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad v_o(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + e^{-\frac{1}{2}t}\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}t\right), \; t > 0$$

در ادامه به ازای $L = 8H$ و $i_s(t) = \delta(t)$ پاسخ ضربه را بدست خواهیم آورد.

$$8\frac{d^3 v_o}{dt^3} + 16\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 10\frac{dv_o}{dt} + 2v_o = \delta(t)$$

معادله مشخصه : $8s^3 + 16s^2 + 10s + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad s = -1, \; -\frac{1}{2}, \; \frac{1}{2}$

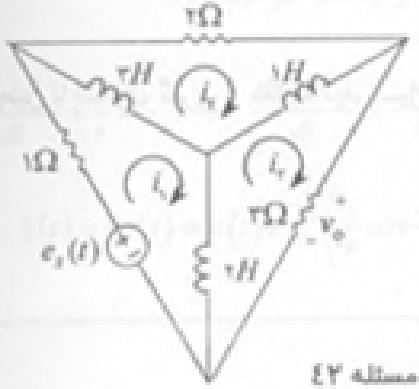
$$\rightarrow \quad v_o(t) = K_1 e^{-t} + (K_2 + K_3 t)e^{-\frac{1}{2}t}, \; t > 0$$

واضح است که شرایط اولیه تغییری نخواهند کرد بنابراین داریم.

$$\begin{cases} v_o(0^+) = 0 & \rightarrow \; K_1 + K_2 = 0 \\ \dfrac{dv_o(0^+)}{dt} = 0 & \rightarrow \; -K_1 - \frac{1}{2}K_2 + K_3 = 0 \\ \dfrac{d^2 v_o(0^+)}{dt^2} = \frac{1}{2} & \rightarrow \; K_1 + \frac{1}{2}K_2 - \frac{1}{2}K_3 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} K_1 = \frac{2}{5} \\ K_2 = -\frac{2}{5} \\ K_3 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad h(t) = v_o(t) = \frac{2}{5}e^{-t} + \left(-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}t\right)e^{-\frac{1}{2}t}, \; t > 0$$

مسئله ۴۲



شکل مسئله ۴۲

الف- معادله دیفرانسیلی بنویسید که e_s را به v_o ارتباط دهد. پاسخ ضربه v_o را حساب کنید.

ب- معادلات حالت این مدار را بنویسید.

(توجه کنید که فقط دو متغیر حالت مستقل وجود دارد)

حل : الف ـ با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$KVL \text{ برای مش ۳} \rightarrow -2D(i_3-i_2)+D(i_3-i_1)+3i_3=0$$

$$KVL \text{ برای مش ۲} \rightarrow 3D(i_2-i_3)+2i_2+D(i_2-i_1)=0$$

$$KVL \text{ برای حلقه بیرونی} \rightarrow -e_s+i_1+2i_2+3i_3=0$$

$$\rightarrow \begin{cases} -2Di_1+Di_2+(3D+3)i_3=0 \\ -3Di_1+(4D+2)i_2-Di_3=0 \\ i_1+2i_2+3i_3=e_s \end{cases} \rightarrow v_o=3i_3=3\frac{\begin{vmatrix} -2D & -2D & 0 \\ -3D & 4D+2 & 0 \\ 1 & 2 & e_s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2D & -D & 3D+3 \\ -3D & 4D+2 & -D \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{11D^2+4D}{22D^2+16D+2}$$

$$\rightarrow (22D^2+16D+2)V_o=(11D^2+4D)i_s \rightarrow 22\frac{d^2v_o}{dt^2}+16\frac{dv_o}{dt}+2v_o=11\frac{d^2i_s}{dt^2}+4\frac{di_s}{dt}$$

با جایگذاری $i_s(t)=\delta(t)$ پاسخ ضربه v_o را می توان بصورت زیر یافت.

$$22\frac{d^2v_o}{dt^2}+16\frac{dv_o}{dt}+2v_o=11\delta^{(2)}(t)+4\delta^{(1)}(t)$$

$$\text{معادله مشخصه}: 22s^2+16s+2=0 \rightarrow s=\frac{-4\pm\sqrt{5}}{11}$$

$$\rightarrow v_o(t)=\left(K_1e^{-\frac{4+\sqrt{5}}{11}t}+K_2e^{-\frac{4-\sqrt{5}}{11}t}\right)+K_3\delta(t)$$

مقادیر K_i ها را با جایگذاری v_c در معادله دیفرانسیل می توان بدست آورده و $v_c(t)$ را بصورت زیر نوشت.

$$v_c(t)=\left(-\frac{4+\sqrt{5}}{44}e^{-\frac{44+\sqrt{5}}{11}t}+\frac{4-\sqrt{5}}{44}e^{-\frac{4-\sqrt{5}}{11}t}\right)+\frac{1}{2}\delta(t)$$

ب ـ با توجه به معادله $i_1+2i_2+3i_3=e_s$ واضح است که سه متغیر جریان در نظر گرفته شده به هم وابسته اند بنابراین انتخاب دوتا از جریانهای فوق به عنوان متغیر حالت کافی خواهد بود با جایگذاری $i_1=-2i_2-3i_3+e_s$ در دو معادله دیگر داریم.

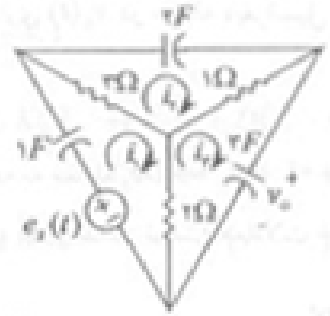
$$\begin{cases}10Di_2+8Di_3=-2i_2+3De_s\\3Di_2+9Di_3=-3i_2+2De_s\end{cases}\rightarrow\begin{cases}Di_2=-\frac{3}{11}i_2+\frac{2}{11}i_3+\frac{1}{6}De_s\\Di_3=\frac{1}{11}i_2-\frac{5}{11}i_3+\frac{1}{6}De_s\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}\frac{di_2}{dt}\\\frac{di_3}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{11}&\frac{2}{11}\\\frac{1}{11}&-\frac{5}{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_2\\i_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{de_s}{dt}\\\frac{de_s}{dt}\end{bmatrix}$$

مسئله ۴۳

الف- معادله دیفرانسیلی بنویسید که e_s را به v_o ارتباط دهد. پاسخ ضربه را حساب کنید.

ب- معادلات حالت این مدار را بنویسید.



شکل مسئله ۴۳

حل : الف- با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$KVL \text{ برای حلقه بیرونی} \rightarrow \frac{1}{D}i_1+\frac{1}{2D}i_2+\frac{1}{2D}i_3-e_s=0$$

$$KVL \text{ برای مش ۲} \rightarrow \frac{1}{2D}i_2+(i_2-i_1)+2(i_2-i_3)=0$$

$$KVL \text{ برای مش ۳} \rightarrow (i_3-i_2)+\frac{1}{2D}i_3+2(i_3-i_1)=0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 6i_1 + 3i_2 + 2i_3 = 6De_s \\ -6Di_1 + (8D+1)i_2 - 2Di_3 = 0 \\ -6Di_1 - 3Di_2 + (2D+1)i_3 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow v_o = \frac{1}{3D} i_3 = \frac{1}{3D} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 3 & 6De_s \\ -6D & 8D+1 & 0 \\ -6D & -3D & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -6D & 8D+1 & -2D \\ -6D & -3D & 9D+1 \end{vmatrix}} = \frac{22D^2+2}{103D^2+23D+3} e_s$$

$$\rightarrow (103D^2+23D+3)v_o = (22D^2+2)e_s \quad \rightarrow \quad 103\frac{d^2v_o}{dt^2} + 23\frac{dv_o}{dt} + 3v_o = 22\frac{d^2v_o}{dt^2} + 2\frac{dv_o}{dt}$$

حال با جایگذاری $e_s(t) = \delta(t)$ پاسخ ضربه را محاسبه خواهیم کرد.

$$\rightarrow \quad 103\frac{d^2v_o}{dt^2} + 23\frac{dv_o}{dt} + 3v_o = 22\delta^{(1)}(t) + 2\delta(t)$$

معادله مشخصه : $103s^2 + 23s + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad s = -0/11 \pm j0/13$

$$\rightarrow \quad v_o(t) = \left(A\cos 0/13t + B\sin 0/13t\right)e^{-0/1t} + C\delta(t)$$

که با جایگذاری $v_o(t)$ در معادله دیفرانسیل و تعیین ضرایب مجهول $v_o(t)$ بصورت زیر بدست می آید.

$$v_o(t) = \left(1/37\cos 0/13t - 0/61\sin 0/13t\right)e^{-0/1t} + 2/15\delta(t)$$

ب ـ با توجه به معادله $6i_1 + 3i_2 + 2i_3 = 6De_s$ که از معادلات KVL بدست آمد واضح است که جریانهای فوق به هم وابسته اند و لذا در نوشتن معادلات حالت فقط i_2 و i_3 را به عنوان متغیرهای حالت برمی گزینیم.

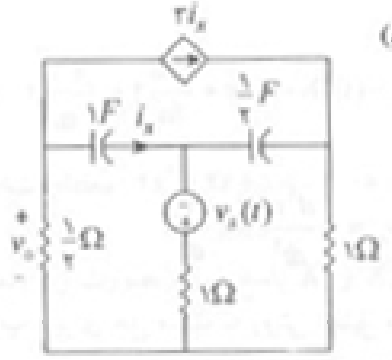
$$\begin{cases} 6i_1 + 3i_2 + 2i_3 = 6De_s \\ -6Di_1 + (8D+1)i_2 - 2Di_3 = 0 \\ -6Di_1 + 3Di_2 + (9D+1)i_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Di_3 = -\frac{1}{11}i_3 + \frac{6D^2}{11}e_s \\ Di_2 = \frac{1}{11}i_2 - \frac{2}{121}i_3 - \frac{22}{33}De_s + \frac{1}{11}De_s \end{cases}$$

مسئله ۴۴

الف- معادله دیفرانسیل v_o بر حسب v_s را بنویسید. (تحلیل گره)

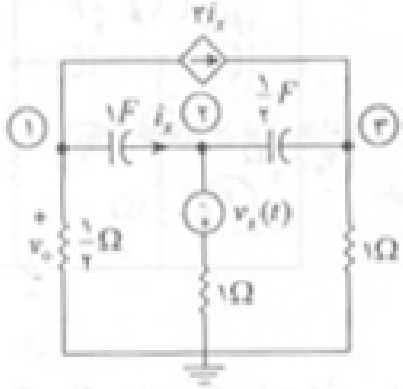
ب- معادله قسمت (الف) را با تحلیل مش بنویسید.

پ- پاسخ ضربه مدار را تعیین کنید.



شکل مسئله ٤٤

حل : الف ـ برای نوشتن معادلات گره شکل زیر را رسم کرده و از روش نمایش اپراتوری استفاده می کنیم.



$i_x = D(v_1 - v_2)$

① گره برای KCL $\rightarrow$ $\dfrac{v_1}{\frac{1}{2}} + D(v_1 - v_2) + 2D(v_1 - v_3) = 0$

② گره برای KCL $\rightarrow$ $-D(v_1 - v_2) + \dfrac{v_2 + v_s}{1} + \dfrac{1}{2}D(v_2 - v_3) = 0$

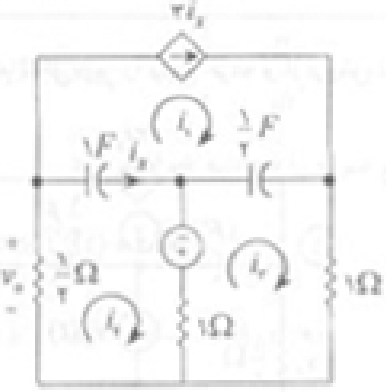
③ گره برای KCL $\rightarrow$ $\dfrac{1}{2}D(v_2 - v_3) + \dfrac{v_o}{1} - 2D(v_1 - v_3) = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} (4D+2)v_1 - 4Dv_3 = 0 \\ 2Dv_1 - (3D+1)v_2 + Dv_3 = 2v_s \\ -6Dv_1 + 5Dv_2 + (D+2)v_3 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad v_o = v_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -4D & -4D \\ 4v_s & -3D-2 & D \\ 0 & 5D & D+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4D+2 & -4D & 0 \\ 4D & -3D-2 & D \\ -6D & 5D & D+2 \end{vmatrix}} = \frac{-D^2-4D}{4D^2+4D+1} v_s$$

$$\rightarrow \quad (4D^2+4D+1)v_o = (-D^2-4D)v_s \quad \rightarrow \quad 4\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 4\frac{dv_o}{dt} + v_o = -\frac{d^2 v_s}{dt^2} - 4\frac{dv_s}{dt}$$

پ - برای حل مسئله به روش تحلیل مش شکل زیر را رسم می کنیم



با توجه به شکل فوق می توان نوشت.

$$i_x = i_1 - i_2 \ , \ i_x = i_1 - i_3 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}i_1 = i_1 - i_2 \quad \rightarrow \quad 4i_1 - 3i_2 = 0$$

$$\text{برای مش ۲} \quad KVL \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2}i_2 + \frac{1}{D}(i_2 - i_1) - v_s + (i_2 - i_3) = 0$$

$$\text{برای مش ۳} \quad KVL \quad \rightarrow \quad (i_3 - i_2) + v_s + \frac{2}{D}(i_3 - i_1) + i_3 = 0$$

$$\rightarrow \quad \begin{cases} 4i_1 - 3i_2 = 0 \\ (D+2)\, i_1 - (2D+2)\, i_2 + 2D\, i_3 = -2Dv_s \\ 2Di_1 + Di_2 - (2D+2)\, i_3 = Dv_s \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad v_o = -\frac{1}{2}i_2 = -\frac{1}{2} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -2Dv_s & -2D-2 & 2D \\ Dv_s & D & -2D-2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ D+2 & -2D-2 & 2D \\ 2D & D & -2D-2 \end{vmatrix}} = \frac{-D^2-4D}{4D^2+4D+1} v_s$$

$$\rightarrow \quad 2\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 2\frac{dv_o}{dt} + v_o = -\frac{d^2 v_s}{dt^2} - 2\frac{dv_s}{dt}$$

ب ـ برای محاسبه پاسخ ضربه با جایگذاری $v_s(t) = \delta(t)$ داریم.

$$\rightarrow \quad 2\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 2\frac{dv_o}{dt} + v_o = -\delta''(t) - 2\delta'(t)$$

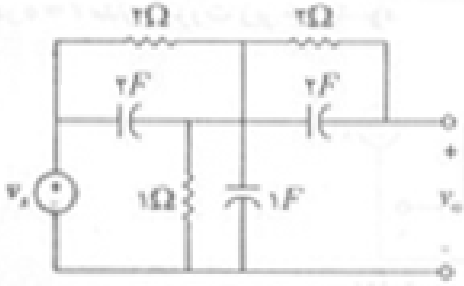
معادله مشخصه : $2s^2 + 2s + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad s = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad v_o(t) = \left(K_1 + K_2 t\right)e^{-\frac{1}{2}t} + K_3\delta(t)$

که با جایگذاری $v_o(t)$ در معادله دیفرانسیل و محاسبه ضرایب K_1 و K_2 و K_3 پاسخ ضربه بصورت زیر بدست خواهد آمد.

$$\rightarrow \quad v_o(t) = \left(1 - \frac{3}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2}\delta(t)$$

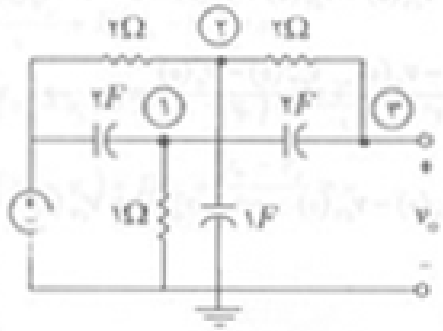
مسئله ۴۵

معادله دیفرانسیلی بنویسید که v_s را به v_o ارتباط دهد.
پاسخ پله را حساب کنید.



شکل مسئله ۴۵

حل : از روش تحلیل گره استفاده می کنیم بدین منظور ابتدا شکل زیر را رسم خواهیم کرد.



KCL برای گره ① $\rightarrow \quad 2D(v_1 - v_s) + \frac{v_1}{1} + 2D(v_1 - v_2) = 0$

KCL برای گره ② $\rightarrow \quad \frac{v_2 - v_s}{2} + Dv_2 + \frac{v_2 - v_o}{2} = 0$

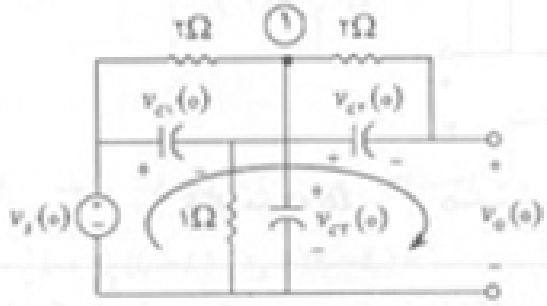
KCL برای گره ۲ $\rightarrow \quad 2D(v_2 - v_1) + \dfrac{v_2 - v_1}{2} = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} (4D+1)v_1 - 2Dv_2 = 2Dv_s \\ (2D+2)v_1 - v_2 = v_s \\ 4Dv_1 + v_2 - (4D+1)v_2 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad v_o = v_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4D+1 & 0 & 2Dv_s \\ 0 & 2D+2 & v_s \\ v_s & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4D+1 & 0 & 2D \\ 0 & 2D+1 & -1 \\ 4D & 1 & -4D-1 \end{vmatrix}} = \frac{10D^3 + 16D^2 + 4D + 1}{16D^3 + 22D^2 + 6D} v_s$$

$$\rightarrow \quad 16\frac{d^3 v_o}{dt^3} + 22\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 6\frac{dv_o}{dt} = 16\frac{d^3 v_s}{dt} + 4\frac{dv_s}{dt} + v_s$$

در $t = 0$ مدار بصورت زیر خواهد بود.



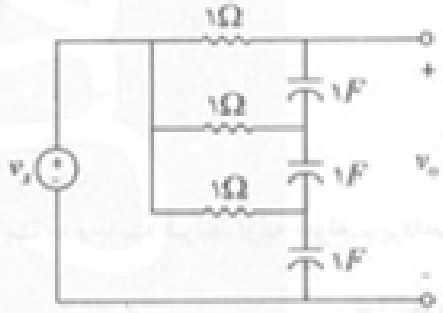
KVL برای حلقه ۱ $\rightarrow \quad -v_s(0) + v_{C_1}(0) + v_{C_2}(0) + v_o(0) = 0 \quad \rightarrow \quad v_o(0) = v_s(0) - v_{C_1}(0) - v_{C_2}(0)$

KCL برای گره ۱ $\rightarrow \quad \dfrac{v_{C_3}(0) - v_s(0)}{2} + \dfrac{v_{C_3}(0) - v_o(0)}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad v_s(0) = 2v_{C_3}(0) - v_o(0)$

$$\rightarrow \quad v_o(0) = 2v_{C_3}(0) - v_o(0) - v_{C_1}(0) - v_{C_2}(0) \quad \rightarrow \quad v_o(0) = v_{C_3}(0) - \frac{v_{C_1}(0) + v_{C_2}(0)}{2}$$

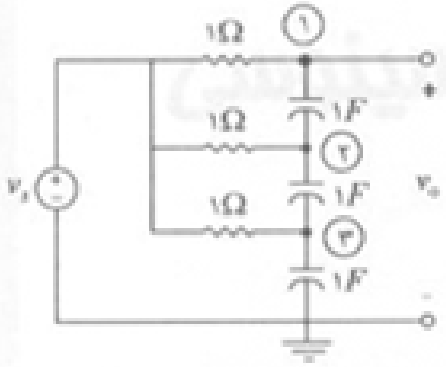
مسئله ۴۶

معادله دیفرانسیل v_o بر حسب v_s و شرایط اولیه را بر حسب شرایط اولیه خازنها مشخص کنید.



شکل مسئله ۴۶

حل : از روش تحلیل گره استفاده می کنیم.



با توجه به شکل فوق و با بکارگیری نمایش ایراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$\begin{cases} \text{KCL برای گره ۱} \rightarrow \dfrac{v_1 - v_s}{1} + D(v_1 - v_2) = 0 \\ \text{KCL برای گره ۲} \rightarrow D(v_2 - v_1) + D(v_2 - v_3) + \dfrac{v_2 - v_s}{1} = 0 \\ \text{KCL برای گره ۳} \rightarrow D(v_3 - v_2) + Dv_3 + \dfrac{v_3 - v_s}{1} = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (D+1)v_1 - Dv_2 = v_s \\ Dv_1 - (2D+1)v_2 + Dv_3 = -v_s \\ -Dv_2 + (2D+1)v_3 = v_s \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad v_o = v_1 = \frac{\begin{vmatrix} v_s & -D & 0 \\ -v_s & -2D-1 & D \\ v_s & -D & 2D+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D+1 & -D & 0 \\ D & -2D-1 & D \\ 0 & -D & 2D+1 \end{vmatrix}} = \frac{6D^2+5D+1}{D^3+6D^2+5D+1}$$

$$\rightarrow \quad 2\frac{d^3 v_o}{dt} + 6\frac{d^2 v_o}{dt} + 5\frac{dv_o}{dt} + v_o = 6\frac{d^2 v_s}{dt^2} + 5\frac{dv_s}{dt} + v_s$$

و در نهایت به محاسبه شرایط اولیه خواهیم پرداخت. معادله درجه سوم است و لذا سه اولیه لازم است.

$$v_o = v_{C1} + v_{C2} + v_{C3} \quad \rightarrow \quad v_o(0) = v_{C1}(0) + v_{C2}(0) + v_{C3}(0)$$