مسئله ۱

فازورهای A و B را چنان تعیین کنید که

$$2A+5B=j10\left(1+\sqrt{3}\right)\ ,\ |B|=2\ ,\ |A|=5\sqrt{2}$$

حل : با توجه به مقادیر داده شده داریم.

$$A=A_m e^{j\theta}=5\sqrt{2}e^{j\theta}=5\sqrt{2}\left(\cos\theta+j\sin\theta\right)\ ,\ B=B_m e^{j\phi}=2e^{j\phi}=2\left(\cos\phi+j\sin\phi\right)$$

$$2A+5B=j10\left(1+\sqrt{3}\right)\ \rightarrow\ \left(10\sqrt{2}\cos\theta+20\cos\phi\right)+j\left(10\sqrt{2}\sin\theta+20\sin\phi\right)=j10\left(1+\sqrt{3}\right)$$

$$\rightarrow\ \begin{cases}10\sqrt{2}\cos\theta+20\cos\phi=0\\ 10\sqrt{2}\sin\theta+20\sin\phi=10\left(1+\sqrt{3}\right)\end{cases}\ \rightarrow\ \theta=\frac{3\pi}{4}\ ,\ \phi=\frac{\pi}{3}\ \rightarrow\ A=5\sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}\ ,\ B=2e^{j\frac{\pi}{3}}$$

مسئله ۲

با استفاده از روش فازوری عبارتهای زیر را بصورت یک سیگنال سینوسی نمایش دهید.

الف ـ $x(t)=2\sin\left(4t+18^\circ\right)-3\cos\left(4t+45^\circ\right)+2\frac{d^2}{dt^2}\sin\left(4t-25^\circ\right)$

ب ـ $y(t)=\cos 4t+\cos\left(4t+120^\circ\right)+\cos\left(4t+240^\circ\right)$

حل : الف ـ هر کدام از سینوسی ها را بصورت فازور نمایش دهنده سینوسی نمایش می دهیم. با این کار داریم

$$x(t)=\mathrm{Im}\left(2e^{j18}\cdot e^{j4t}\right)+\mathrm{Re}\left(-3e^{j45}\cdot e^{j4t}\right)+\mathrm{Im}\left(\frac{d^2}{dt^2}2e^{-j25}\cdot e^{j4t}\right)$$

$$=\mathrm{Re}\left(2e^{j18-j/2}\cdot e^{j4t}\right)+\left(-3e^{j45}\cdot e^{j4t}\right)+\mathrm{Re}\left(\left(j4\right)^2\cdot 2e^{-j25-j/2}\cdot e^{j4t}\right)$$

$$=\mathrm{Re}\left\{\left(2e^{-j/2}-3e^{j45}-8e^{-j/25}\right)e^{j4t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{3/99e^{j66/98}\cdot e^{j4t}\right\}=3/99\cos\left(4t+66/98\right)$$

$$y(t)=\mathrm{Re}\left(e^{j4t}\right)+\mathrm{Re}\left(e^{j120}\cdot e^{j4t}\right)+\mathrm{Re}\left(e^{j240}\cdot e^{j4t}\right)=\mathrm{Re}\left\{\left(1+e^{j120}+e^{j240}\right)e^{j4t}\right\}$$

$$=\mathrm{Re}\left\{\left(0\right)e^{j4t}\right\}=0$$

مسئله ۳

پاسخ خصوصی معادلات دیفرانسیل زیر را به روش فازوری بدست آورید.

الف ـ $\frac{d^2 i}{dt^2}+\frac{di}{dt}+16i=12\cos 2t$

ب ـ $\frac{d^3 x}{dt^3}+2\frac{d^2 x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+6x=2\sin t-2\cos\left(t-27^\circ\right)+2\sin\left(2t+36^\circ\right)$

حل : الف ـ فرض کنیم پاسخ خصوصی بصورت $i_p(t)=A_m\cos(2t+\theta)$ باشد ، با جایگذاری فازور نمایش دهنده سینوسی ها در معادله دیفرانسیل داریم(فازور سیگنال $i(t)$ را $\vec{A}$ در نظر می گیریم)

$$\frac{d}{dt}=j\omega \quad , \quad \frac{d^2}{dt^2}=(j\omega)^2 \quad , \quad \omega=2$$

$$(j2)^2A+(j2)A+16A=12e^{j0} \quad \rightarrow \quad (3+2j)A=12e^{j0}$$

$$\rightarrow A=\frac{12e^{j0}}{3+2j}=\frac{12e^{j0}}{2\sqrt{13}e^{j56}}=\left(\frac{12}{2\sqrt{13}}\right)e^{j0-j56}=2\sqrt{13}e^{-j56} \quad \rightarrow \quad i_p(t)=2\sqrt{13}\cos\left(2t-45^\circ\right)$$

ب ـ طرف دوم معادله شامل دو فرکانس زاویه ای ۱ ، ۲ $\omega=$ می باشد که برای هر کدام از آنها پاسخ خصوصی مجزا در نظر گرفته و با جایگذاری فازور نمایش دهنده سینوسی ها در دو معادله دیفرانسیل برای دو فرکانس زاویه ای فوق خواهیم داشت.

$$\omega=1 \quad \rightarrow \quad (j)^3A_1+2(j)^2A_1+jA_1+6A_1=2e^{-j27^\circ}-2e^{-j36^\circ}$$

$$(-j-2+j+6)A_1=2(\cos 90-j\sin 90)-2(\cos 27-j\sin 27)=-5/78-j3/09$$

$$2A_1=6/56e^{-j151/9} \quad \rightarrow \quad A_1=1/62e^{-j151/9} \quad \rightarrow \quad i_{p1}(t)=1/62\cos(t-151/9)$$

$$\omega=2 \quad \rightarrow \quad (j2)^3A_2+2(j2)^2A_2+(j2)A_2+6A_2=2e^{j36-j27} \quad \rightarrow \quad (-2-6j)A_2=2e^{-j27}$$

$$\rightarrow A_2=\frac{2e^{-j27}}{6/32e^{-j1/5}}=\left(\frac{2}{6/32}\right)\left(e^{-j27+j1/5}\right)=0/27e^{j25/7}$$

$$\rightarrow i_{p2}(t)=0/27\cos(2t+52/7)$$

و بنا بر قضیه جمع آثار پاسخ خصوصی معادله دیفرانسیل داده شده برابر خواهد شد با:

$$i_p(t)=i_{p1}(t)+i_{p2}(t)=1/62\cos(t-151/9)+0/27\cos(2t+52/7)$$

مسئله ۲

پاسخ خصوصی (حالت دایمی سینوسی) معادلات دیفرانسیل زیر را تعیین کنید.

الف ـ $\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\frac{di}{dt} + i = 5\sin\left(2t + 30^\circ\right)$

ب ـ $\frac{d^2 i}{dt^2} + 3\frac{di}{dt} + 2i = 2\cos\left(2t - 30^\circ\right) + 3\sin\left(2t + 45^\circ\right)$

پ ـ $\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\frac{di}{dt} + 2i = 2\cos t + 3\sin 2t$

حل : الف ـ با جایگذاری فازور نمایش دهنده سینوسی ها در معادله دیفرانسیل داریم

$$\omega = 2 \quad \rightarrow \quad (j2)^2 A + 2(j2)A + A = 5e^{j30-j90} \quad \rightarrow \quad (-3+4j)A = 5e^{-j60}$$

$$\rightarrow \quad A = \frac{5e^{-j60}}{-3+4j} = \frac{5e^{-j60}}{5e^{-j126/9}} = e^{-j53/1} \quad \rightarrow \quad i_p(t) = \cos\left(2t - 86/9\right)$$

ب ـ

$$\omega = 2 \quad \rightarrow \quad (j2)^2 A + 3(j2)A + 2A = 2e^{-j30} + 3e^{j45-j90} = 2e^{-j30} + 3e^{-j45}$$

$$\rightarrow \quad (-2+6j)A = 2\left(\cos 30 - j\sin 30\right) + 3\left(\cos 45 - j\sin 45\right) = 3/12 - j2/58$$

$$\rightarrow \quad A = \frac{3/12 - j2/58}{-2+6j} = \frac{4/7e^{-j60}}{6/32e^{j71/6}} = 0/74e^{-j131/6} \quad \rightarrow \quad i_p(t) = 0/74\cos\left(2t - 211/6\right)$$

پ ـ دو فرکانس زاویه ای متفاوت داریم که برای هرکدام از آنها جداگانه به محاسبه پاسخ خصوصی می پردازیم.

$$\omega = 1 \quad \rightarrow \quad (j)^2 A_1 + 2jA_1 + 2A_1 = 2 \quad \rightarrow \quad (1+2j)A_1 = 2$$

$$\rightarrow \quad A_1 = \frac{2}{1+2j} = \frac{2}{\sqrt{5}e^{j63/4}} = 0/89e^{-j63/4} \quad \rightarrow \quad i_{p1}(t) = 0/89\cos\left(t - 63/4\right)$$

$$\omega = 2 \quad \rightarrow \quad (2j)^2 A_2 + 2(j2)A_2 + 2A_2 = 3e^{-j90} \quad \rightarrow \quad (-2+4j)A_2 = 3e^{-j90}$$

$$\rightarrow \quad A_2 = \frac{3e^{-j90}}{-2+4j} = \frac{3e^{-j90}}{\sqrt{2}e^{j116/6}} = 0/67e^{-j206/6} \quad \rightarrow \quad i_{p2}(t) = 0/67\cos\left(2t - 103/3\right)$$

و در نهایت بنابر قضیه جمع آثار پاسخ خصوصی معادله دیفرانسیل بصورت زیر بدست خواهد آمد.

$$i_p(t) = i_{p1}(t) + i_{p2}(t) = 0/89\cos\left(t - 63/4\right) + 0/67\cos\left(2t - 103/3\right)$$

مسئله ۵

◀ $|\vec{V}_1| = 2|\vec{V}_2|$ و زاویه فاز $\vec{V}_g$ از زاویه فاز $\vec{V}_2$، 30° جلوتر است. $v_2(t)$ را در حالت دایمی بدست آورید. ($v_g(t) = 10\cos 3t$)

شکل مسئله ۵

حل : ازآنجا که حالت دایمی مورد نظربوده و ورودی سینوسی است، لذا می توان از روش فازوری استفاده کرد.

$$v_g(t) = 10\cos 3t \rightarrow V_g = 10 \rightarrow |V_g| = 10 \ , \ \angle V_g = 0$$

$$\angle V_g - \angle V_2 = 30 \rightarrow 0 - \angle V_2 = 30 \rightarrow \angle V_2 = -30^\circ$$

$$\text{برای مش ۱}\ KVL \rightarrow V_1 + V_2 = V_g \rightarrow 2|V_1|e^{j\theta_1} + |V_2|e^{-j30^\circ} = 10$$

$$\rightarrow 2|V_1|(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1) + |V_2|(\cos 30 - j\sin 30) = 10$$

$$\rightarrow |V_1|\left(2\cos\theta_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + j|V_1|\left(2\sin\theta_1 - \frac{1}{2}\right) = 10$$

$$\rightarrow |V_1|\left(2\sin\theta_1 - \frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow \sin\theta_1 = \frac{1}{2} \rightarrow \cos\theta_1 = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 0/87$$

$$|V_1|\left(2\cos\theta_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10 \rightarrow |V_1|\left(2(0/87) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10 \rightarrow |V_1| = 3/56$$

$$\rightarrow v_1(t) = 3/56(3t - 30^\circ)$$

مسئله ۶

◀ معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده $v(t)$ به $i_s(t)$ بصورت زیر است.

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 15\frac{dv}{dt} + 50v = \frac{d^2 i_s}{dt^2} + 7\frac{di_s}{dt}$$

الف ـ پاسخ ضربه را بدست آورید.

ب ـ امپدانس دو سر A و B در فرکانس ω چیست.

پ ـ برای $i_s(t) = 10\cos 5t$ یک پاسخ خصوصی بدست آورید.

شکل مسئله ۶

حل : الف ـ با جایگذاری $i_s(t)=\delta(t)$ داریم

$$\frac{d^2v}{dt^2}+15\frac{dv}{dt}+50v=\delta^{(1)}(t)+7\delta^{(1)}(t)$$

معادله مشخصه : $s^2+15s+50=0 \rightarrow s=-5,-10 \rightarrow v(t)=\left(K_1e^{-5t}+K_2e^{-10t}\right)u(t)+K_3\delta(t)$

با جایگذاری $v(t)$ در معادله دیفرانسیل داریم

$$K_3\delta^{(2)}(t)+\left(K_1+K_2+15K_3\right)\delta^{(1)}(t)+\left(10K_1+5K_2+50K_3\right)=\delta^{(1)}(t)+7\delta^{(1)}(t)$$

$$\begin{cases}K_3=1\\ K_1+K_2+15K_3=7\\ 10K_1+5K_2+50K_3=0\end{cases} \rightarrow K_1=-2\ ,\ K_2=-6\ ,\ K_3=1$$

$$\rightarrow h(t)=v(t)=\left(-2e^{-5t}-6e^{-10t}\right)u(t)+\delta(t)$$

ب ـ در فرکانس ω و در حالت دایمی سینوسی با استفاده از روش فازوری و با توجه به معادله دیفرانسیل داریم

$$(j\omega)^2V+15(j\omega)V+50V=(j\omega)^2I_s+7(j\omega)I_s$$

$$\rightarrow \left[\left(50-\omega^2\right)+j15\omega\right]V=\left(-\omega^2+j7\omega\right)I_s \rightarrow Z=\frac{V}{I_s}=\frac{-\omega^2+j7\omega}{\left(50-\omega^2\right)+j15\omega}$$

پ ـ از آنجا که ورودی سینوسی می باشد لذا می توان پاسخ خصوصی را برابر پاسخ حالت دایمی سینوسی در نظر گرفت که با توجه به امپدانس بدست آمده در قسمت قبل داریم

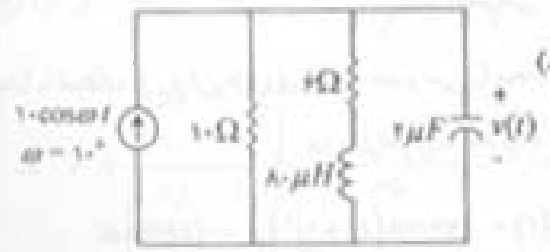
$$\omega=5 \rightarrow V(j5)=Z(j5)I_s(j5)=\left.\frac{-\omega^2+j7\omega}{\left(50-\omega^2\right)+j15\omega}\right|_{\omega=5}\times10=\frac{-25+j35}{25+j75}\times10$$

$$=\frac{43.01e^{j116.6}}{79.06e^{j71.6}}=5.44e^{j45.0}$$

$$\rightarrow v(t)=5.44\cos\left(5t+53.4^\circ\right)$$

مسئله ۷

$v(t)=?$ (مدار در حالت دایمی سینوسی است)



شکل مسئله ۷

حل : ابتدا با استفاده از روش گسترش کسرهای متوالی ادمیتانس دو سر منبع جریان را بدست می آوریم

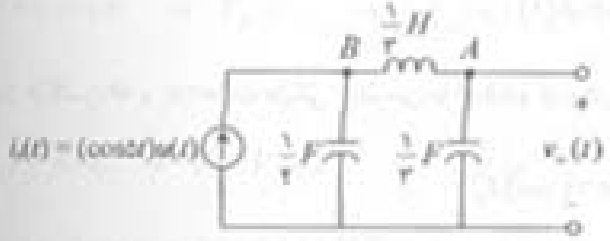
$$Y(j\omega) = G_1 + \frac{1}{R_2 + j\omega L} + j\omega C \ , \quad R_1 = 10\Omega \ , \quad R_2 = 6\Omega \ , \quad L = 8\mu H \ , \quad C = 2\mu F$$

$$Y = \frac{1}{10} + \frac{1}{6 + j80\times10^{-6}\times10^{5}} + j2\times10^{-6}\times10^{5} = 0.16 + j0.12$$

$$V = \frac{I_s}{Y} = \frac{10}{0.16 + j0.12} = \frac{10}{0.2\angle 36.9} = 50\angle -36.9 \quad \rightarrow \quad v(t) = 50\cos\left(10^5 t - 36.9^\circ\right)$$

مسئله ۸

- $v_o(t)$ را برای $t \geq 0$ حساب کنید. (شرایط اولیه صفر است).
- $v_o(t)$ در حالت دایمی چیست.



شکل مسئله ۵

حل : با توجه به شکل مسئله و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات انتگرال دیفرانسیل داریم.

$$\text{KCL برای گره (A)} \rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}D}(v_o - v_B) + \frac{1}{2}Dv_o = 0 \quad \rightarrow \quad v_B = \left(\frac{1}{4}D^2 + 1\right)v_o$$

$$\text{KCL برای گره (B)} \rightarrow -i_s + \frac{1}{2}D\left\{\left(\frac{1}{4}D^2 + 1\right)v_o\right\} + \frac{1}{\frac{1}{2}D}\left\{\left(\frac{1}{4}D^2 + 1\right)v_o - v_o\right\} = 0$$

$$\rightarrow \left(D^3 + 15D\right)v_o = 18i_s \quad \rightarrow \quad \frac{d^3 v_o}{dt^3} + 15\frac{dv_o}{dt} = 18\cos 5t$$

معادله مشخصه : $s^3 + 15s = 0 \quad \rightarrow \quad s = 0 \ , \ \pm j\sqrt{15}$

$$\rightarrow \ v_o(t) = \underbrace{K_1 + K_2\cos\sqrt{15}t + K_3\sin\sqrt{15}t}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{v_{op}\cos(5t + \theta)}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

ابتدا با استفاده از روش فازوری پاسخ خصوصی را محاسبه می کنیم

$$\omega = 5 \ \rightarrow \ (j5)^3 V_p + 15(j5)V_p = 18 \ \rightarrow \ (-125j + 75j)V_p = 18$$

$$\rightarrow V_p = \frac{18}{-50j} = 0.36j = 0.36\angle 90^\circ \quad \rightarrow \quad v_p(t) = 0.36\cos\left(5t + 90^\circ\right) = -0.36\sin 5t$$

شرایط اولیه برابر صفر بوده و همچنین در $t=0^+$ خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز است بنابراین داریم

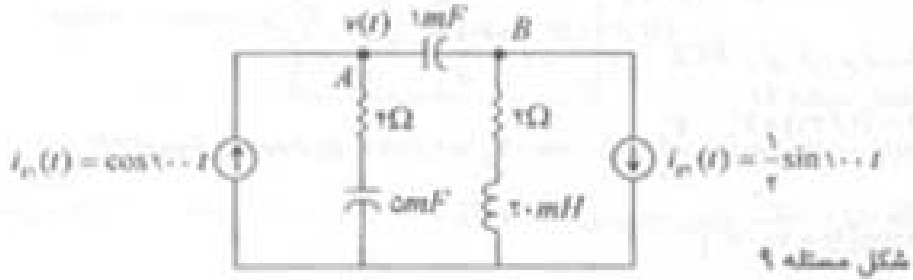
$$\begin{cases} v_o(0^+)=0 \rightarrow K_1+K_2=0 \\ \dfrac{dv_o(0^+)}{dt}=0 \rightarrow \sqrt{15}K_2-1/8=0 \\ \dfrac{d^2v_o(0^+)}{dt^2}=0 \rightarrow -15K_1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_1=0 \\ K_2=0 \\ K_3=0/24 \end{cases}$$

$$\rightarrow v_o(t)=0/24\sin\sqrt{15}t+0/24\sin 5t$$

مقدار $v_o(t)$ در حالت دایمی نیز بصورت فوق می باشد زیرا عامل میرا شونده ای برای $v_o(t)$ بدست نیامده است.

مسئله ۹

$v(t)=?$ (مقدار در حالت دایمی سینوسی است)



شکل مسئله ۹

حل : از آنجا که مدار در حالت دایمی سینوسی است و فرکانس زاویه ای هر دو ورودی $\omega=100$ می باشد لذا با استفاده از روش فازوری خواهیم داشت.

$$I_{s1}=1,\ I_{s2}=\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}=-\frac{j}{2}$$

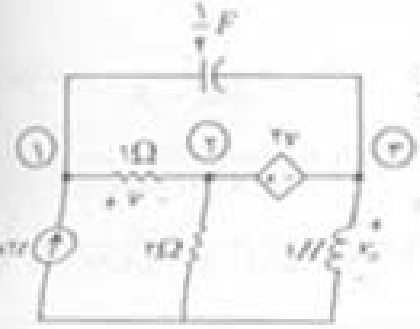
$$KCL \text{ برای گره } B \rightarrow -\frac{j}{2}+\frac{V_B}{2+j2}+\frac{V_B-V}{-10j} \rightarrow -jV+(1-j)V_B=5j$$

$$KCL \text{ برای گره } A \rightarrow -1+\frac{V}{2-2j}+\frac{V-V_B}{-10j}=0 \rightarrow (2+2j)V-jV_B=10$$

$$\rightarrow V=\frac{\begin{vmatrix} 5j & 1-j \\ 10 & -j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -j & 1-j \\ 2+2j & -j \end{vmatrix}}=\frac{-5+10j}{-5}=1-2j=\sqrt{5}e^{-j63/4^\circ} \rightarrow v(t)=\sqrt{5}\cos(100t-63/4^\circ)$$

مسئله ۱۰

v_o و امپدانس دیده شده توسط منبع جریان را بدست آورید.



شکل مسئله ۱۰

حل : فرض کنیم مدار در حالت دایمی سینوسی باشد. فرکانس زاویه ای ورودی $\omega = 2$ می باشد بنابراین با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری روش فازوری داریم.

$$i_s(t) = 5\cos 2t \rightarrow I_s = 5 \quad \text{و} \quad V_1 - V_2 = V \ , \ V_1 - V_3 = 2V \rightarrow V_2 - V_3 = 3V$$

$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow -5 + \frac{V}{1} + \frac{3V}{-j2} = 0 \rightarrow V = 1.54 - j2.31$$

$$\text{KCL برای گره مرکب شامل ۱ و ۲ و ۳} \rightarrow -5 + \frac{2V + V_o}{2} + \frac{V_o}{2j} = 0$$

$$\rightarrow -5 + \frac{2(1.54 - j2.31) + V_o}{2} + \frac{V_o}{2j} = 0 \rightarrow V_o = 1.15 + j5.77 = 5.88e^{j78.7}$$

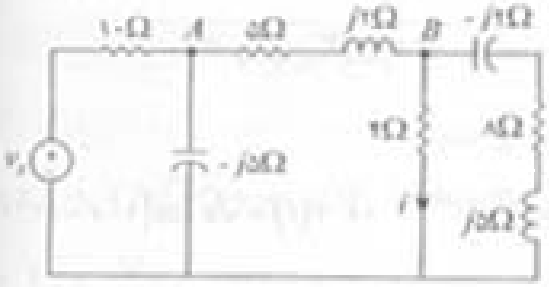
$$\rightarrow v_o(t) = 5.88\cos(2t + 78.7^\circ)$$

امپدانس دو سر منبع جریان $Z = \frac{V_1}{I_s}$ می باشد که آن را بصورت زیر بدست می آوریم.

$$V_1 = V_o + 2V = 5.77 - j1.15 \rightarrow Z = \frac{5.77 - j1.15}{5} = 1.15 - j0.22(\Omega)$$

مسئله ۱۱

فازور v_s را چنان تعیین کنید که فازور i بصورت $2e^{j45^\circ}$ باشد.



شکل مسئله ۱۱

حل: با توجه به شکل مدار می توان نوشت

$$I = 2e^{j45^\circ} = 2\left(\cos 45^\circ + j\sin 45^\circ\right) = 1.12 + j1.12 \rightarrow V_B = 2I = 2.28 + j2.28$$

$$\text{KCL برای گره } B \rightarrow \frac{2.28 + j2.28}{-j4 + 8 + j5} + 1.12 + j1.12 + \frac{2.28 + j2.28 - V_A}{5 + j2} = 0$$

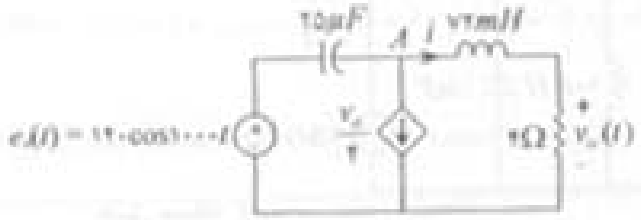
$$\rightarrow V_A = 20.08 + j28.8$$

$$\text{KCL برای گره } A \rightarrow \frac{20.08 + j28.8 - V_A}{10} + \frac{20.08 + j28.8}{-j5} + \frac{20.08 + j28.8 - 2.28 - j2.28}{5 + 2j} = 0$$

$$\rightarrow V_A = -3.52 + j15.18 = 16.08\angle 103.1^\circ$$

مسئله ۱۲

$v_o(t) = ?$



شکل مسئله ۱۲

حل: با فرض اینکه مدار در حالت دایمی سینوسی باشد و با توجه به شکل مسئله و اینکه $\omega = 1000$ می باشد داریم

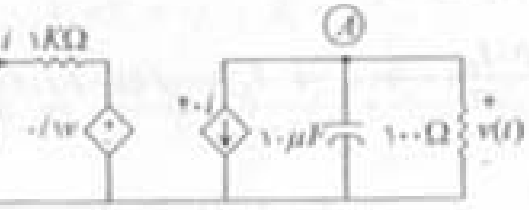
$$I = \frac{V_x}{2} \rightarrow V_A = I(j72 + 2) = (1 + j18)V_x \quad , \quad V_A = 120$$

$$\text{KCL برای گره } A \rightarrow \frac{V_x}{2} + \frac{V_x}{2} + \frac{(1 + j18)V_x - 120}{-j20} \rightarrow V_x = 28 + j56 = 62.61\angle 63.4^\circ$$

$$\rightarrow v_o(t) = 62.61\cos(1000t + 63.4^\circ)$$

مسئله ۱۳

$v(t) = ?$



شکل مسئله ۱۳

حل : بافرض اینکه مدار درحالت دایمی سینوسی است وبا توجه به شکل مسئله و اینکه $\omega = ۲۰۰$ می باشد لذا خواهیم داشت.

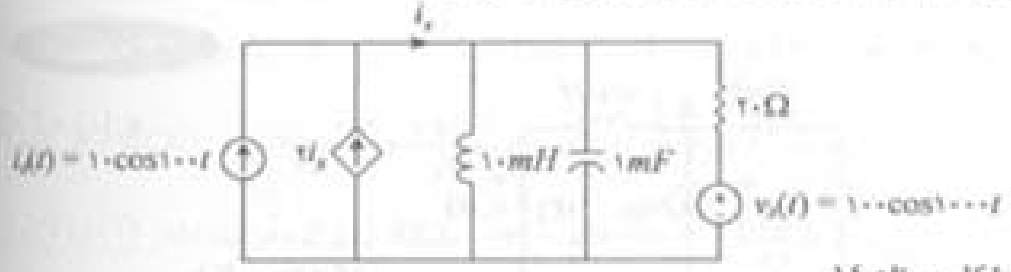
$$V_s = ۵ \ , \ I = \frac{V_s - ۰/۱V}{۱۰۰۰} = \frac{۵ - ۰/۱V}{۱۰۰۰}$$

$$KCL \text{ برای گره } ① \rightarrow ۲۰\frac{۵ - ۰/۱V}{۱۰۰۰} + \frac{V}{-j۵۰۰} + \frac{V}{۱۰۰} = ۰$$

$$\rightarrow V = -۳۰ + j۱۰ = ۳۱/۶۲e^{j۱۶۱/۵۷^\circ} \rightarrow v(t) = ۳۱/۶۲\cos\left(۲۰۰t + ۱۶۱/۵۷^\circ\right)$$

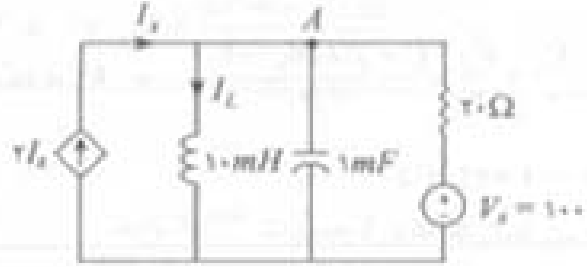
مسئله ۱۴

جریان گذرنده از سلف را در حالت دایمی بدست آورید.



شکل مسئله ۱۴

حل : ازآنجا که فرکانس زاویه ای دو منبع نابسته متفاوت است لذا بطورهمزمان هردورا نمی توان درروش فازوری برای حل مسئله بکار گرفت.بنابراین آنها رابصورت مجزادرنظر گرفته و I_L مربوطه رابدست می آوریم.لذا منبع ولتاژ را منظور می کنیم. در این حالت $\omega = ۱۰۰۰$ بوده و در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر می باشد.

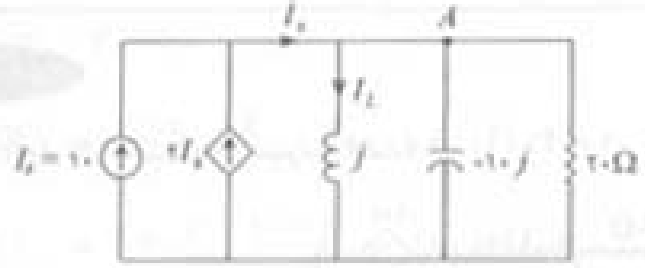


$$I_s = ۲I_s \rightarrow I_s = ۰ \ , \ V_A = (j۱۰)I_L = j۱۰I_L$$

$$KCL \text{ برای گره } ① \rightarrow I_L + \frac{j۱۰I_L}{-j} + \frac{j۱۰I_L - ۱۰۰}{۲۰} = ۰ \rightarrow I_L = -۰/۵۵ - j۰/۰۳ = ۰/۵۵e^{-j۱۷۶/۹}$$

$$\rightarrow i_L(t) = ۰/۵۵\cos\left(۱۰۰t - ۱۷۶/۹\right)$$

حال $V_x = 0$ در نظر گرفته و اثر منبع جریان را بررسی می کنیم. در این حالت $\omega = 100$ بوده و در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر می باشد.



$$I_x + 2I_x = I_s \rightarrow I_x = -I_s = -10 \quad , \quad V_A = jI_L$$

KCL برای گره (A) $\rightarrow 10 + I_L + \frac{jI_L}{-10j} + \frac{jI_L}{20} = 0 \rightarrow I_L = -11/08 + j0/61 = 11/09\angle 176/9^\circ$

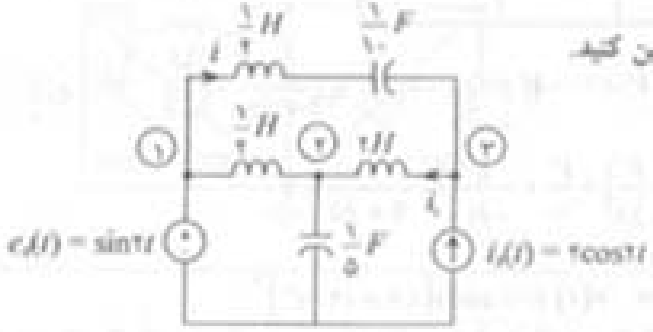
$$\rightarrow i_L(t) = 11/09\cos(100t + 176/9)$$

و در نهایت بنا بر قضیه جمع آثار جریان گذرنده از سلف در حالت دایمی سینوسی بصورت زیر خواهد شد که یک سینوسی نمی باشد.

$$i_L(t) = 0/55\cos(100t - 176/9^\circ) + 11/09\cos(100t + 176/9)$$

مسئله ۱۵

$i(t)$ را در حالت دایمی سینوسی تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۵

حل : از آنجا که فرکانسهای زاویه ای هر دو منبع یکسان است لذا برای هر مدار نمایش فازوری یکسان بوده و می توان هردو را با هم در نظر گرفت.

$$V_s = e^{j\pi/2} = -j \quad , \quad V_1 = V_s = -j \quad , \quad I_s = 2$$

KCL برای گره (2) $\rightarrow \frac{V_2 - (-j)}{j} + \frac{V_2}{-2/5j} + \frac{V_2 - V_3}{2j} = 0$

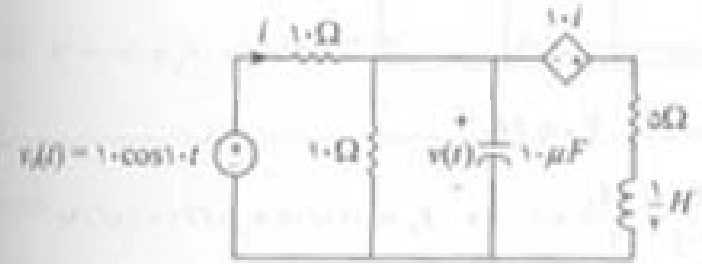
KCL برای گره (3) $\rightarrow \frac{V_3 - (-j)}{j - 5j} + \frac{V_3 - V_2}{2j} - 2 = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} V_2 = -j16/6 \\ V_3 = -j8 \end{cases}$$

$$I=\frac{V_1-V_2}{j-5j}=\frac{-j-(-j24/6)}{-4j}=-6/2 \quad \rightarrow \quad i(t)=-6/2\cos 2t$$

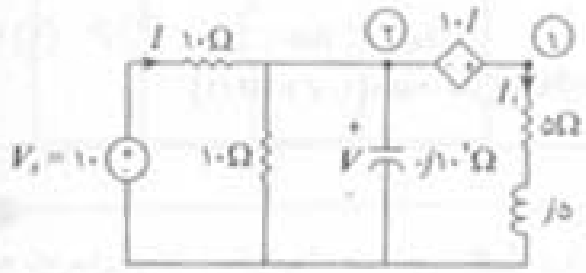
مسئله ۱۶

$v(t)=?$ (مدار در حالت دایمی سینوسی است)



شکل مسئله ۱۶

حل : مدار در حالت دایمی سینوسی بوده و $\omega=10$ می باشد بنابراین آن را می توان بصورت زیر رسم کرد.



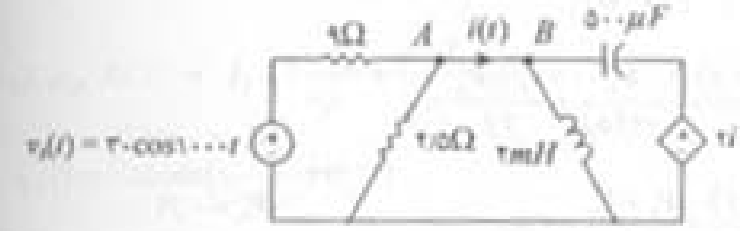
$$I=\frac{V_s-V}{10}=1-\frac{V}{10}\ ,\quad V_1=V+10I=V+10-V=10 \quad \rightarrow \quad I_1=\frac{10}{5+j5}$$

KCL برای گره مرکب ①و② $\rightarrow \quad -\left(1-\frac{V}{10}\right)+\frac{V}{10}+\frac{V}{-j10^2}+\frac{10}{5+j5}=0$

$$\rightarrow V=0/0025+j0/5=0/5e^{j89/7} \quad \rightarrow \quad v(t)=0/5\cos\left(10t+89/7^\circ\right)$$

مسئله ۱۷

$i(t)=?$ (مدار در حالت دایمی سینوسی است)



شکل مسئله ۱۷

حل : مدار در حالت دایمی سینوسی و $\omega = 1000$ می باشد بنابراین با استفاده از روش فازوری و با توجه به شکل مسئله داریم.

$$V_A = V_B = V \quad , \quad V_x = 30$$

KCL برای گره Ⓐ $\rightarrow \dfrac{V-30}{9} + \dfrac{V}{2/5} + I = 0 \rightarrow 9I + 2V = 30$

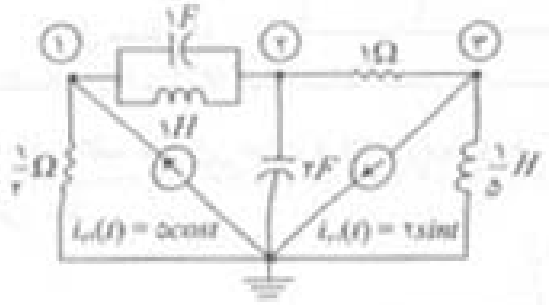
KCL برای گره Ⓑ $\rightarrow -I + \dfrac{V}{j2} + \dfrac{V-2I}{-j2} \rightarrow (2-j2)I - V = 0$

$$I = \frac{\begin{vmatrix} 30 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 2-2j & -1 \end{vmatrix}} = \frac{30}{7-2j} = 1/07 + j0/61 = 1/23\angle 29/29$$

$$\rightarrow i(t) = 1/23\cos\left(1000t + 29/69^\circ\right)$$

مسئله ۱۸

ولتاژ دو سر خازن $2F$ را حساب کنید. (مدار در حالت دایمی سینوسی است)



شکل مسئله ۱۸

حل : فرکانس زاویه ای هر دو منبع $\omega = 1$ می باشد بنابراین در روش تحلیل فازوری اثر هر دو منبع را به طور همزمان می توان در نظر گرفت.

$$I_{s1} = 2e^{j\pi/2} = j2 \quad , \quad I_{s2} = 5$$

KCL برای گره ② $\rightarrow \dfrac{V_2 - V_1}{-j} + \dfrac{V_2 - V_3}{j} + \dfrac{V_2}{-j0/5} + \dfrac{V_2 - V_4}{1} = 0 \rightarrow (2-j)V_2 + jV_4 = 0$

KCL برای گره ③ $\rightarrow \dfrac{V_3 - V_1}{1} + \dfrac{V_3}{j\frac{1}{5}} + 2j = 0 \rightarrow -jV_2 + (5+j)V_3 = 2$

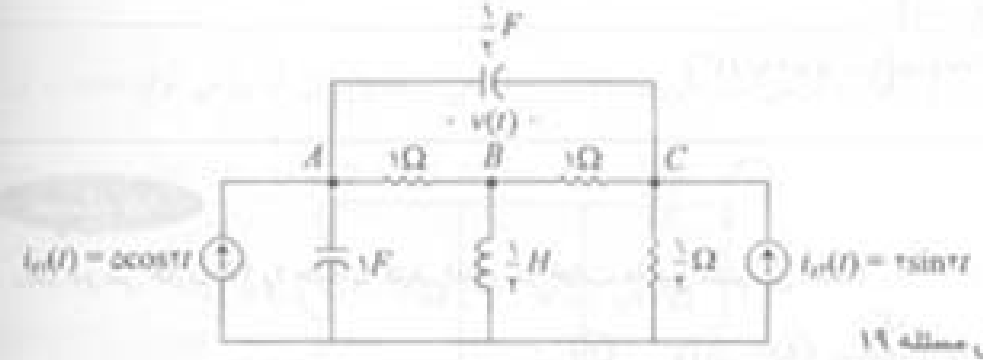
$$\rightarrow V_c = V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & j \\ 2 & 5+j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2-j & j \\ -j & 5+j \end{vmatrix}} = \frac{-2j}{10-3j} = \frac{2e^{-j90^\circ}}{10.44e^{-j16.7^\circ}} = 0.19e^{-j73.3^\circ}$$

$$\rightarrow v_c(t) = 0.19\cos(t - 73.3^\circ)$$

مسئله ۱۹

الف ـ $v(t) = ?$. (مدار در حالت دایمی سینوسی است)

ب ـ فرض کنید $i_{s1}(t) = 5\cos t$ شود، بار دیگر $v(t)$ را بدست آورید.



شکل مسئله ۱۹

حل : الف ـ در این حالت فرکانس زاویه ای هر دو منبع یکسان $\omega = 2$ بوده و می توان اثر هر دو را با هم منظور کرد.

$$I_{s1} = 5 \quad , \quad I_{s2} = 2e^{-j90^\circ} = -2j$$

KCL برای گره (A) $\rightarrow -5 + \frac{V_A}{\frac{1}{j2}} + \frac{V_A - V_B}{1} + \frac{V_A - V_C}{\frac{1}{j}} = 0 \rightarrow (1+3j)V_A - V_B - jV_C = 5$

KCL برای گره (B) $\rightarrow \frac{V_B - V_A}{1} + \frac{V_B}{j} + \frac{V_B - V_C}{1} = 0 \rightarrow -V_A + (2-j)V_B - V_C = 0$

KCL برای گره (C) $\rightarrow \frac{V_C}{\frac{1}{2}} + \frac{V_C - V_B}{1} + \frac{V_C - V_A}{\frac{1}{j}} - (-2j) = 0$

$$\rightarrow -jV_A - V_B + (3+j)V_C = -2j$$

$$V = V_A - V_C = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 & -j \\ 0 & 2-j & -1 \\ -2j & -1 & 3+j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+3j & -1 & -j \\ -1 & 2-j & -1 \\ -j & -1 & 3+j \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} 1+3j & -1 & 5 \\ -1 & 2-j & 0 \\ -j & -1 & -2j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+3j & -1 & -j \\ -1 & 2-j & -1 \\ -j & -1 & 3+j \end{vmatrix}} = \frac{34-j9}{8+j13} - \frac{20-2j}{8+j13}$$

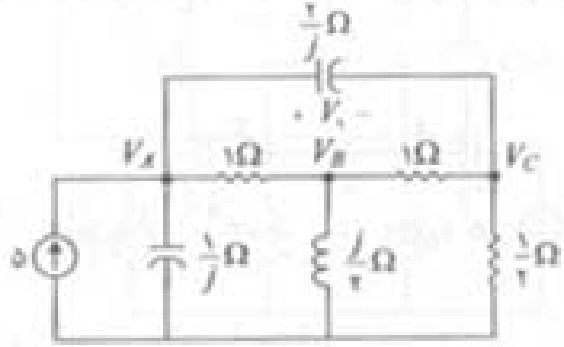
$$\rightarrow \quad V = \frac{14-j11}{8+j13} = 1/17e^{-j94/5} \quad \rightarrow \quad v(t) = 1/17\cos\left(7t - 94/5^\circ\right)$$

ب- در این حالت فرکانس زاویه ای منابع جریان متفاوت بوده و باید اثر آنها را جداگانه در نظر گرفت. ابتدا با فرض $I_{s1} = 0$ و $I_{s2} = -2j$ و با توجه به معادلات بدست آمده در حالت قبل داریم.

$$V_1 = V_A - V_C = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -j \\ 0 & 2-j & -1 \\ -2j & -1 & 3+j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+3j & -1 & -j \\ -1 & 2-j & -1 \\ -j & -1 & 3+j \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} 1+3j & -1 & 0 \\ -1 & 2-j & 0 \\ -j & -1 & -2j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+3j & -1 & -j \\ -1 & 2-j & -1 \\ -j & -1 & 3+j \end{vmatrix}} = \frac{-6+j2}{8+j13} = 0/27e^{j78/7}$$

$$\rightarrow \quad v_1(t) = 0/27\cos\left(7t - 78/7^\circ\right)$$

حال فرض می کنیم $I_{s2} = 0$ بوده و $I_{s1}(t) = 5\cos t$ و یا $\omega = 1$ و $I_{s1} = 5$ باشد. با اعمال مفروضات گفته شده مدار بصورت زیر خواهد شد.



KCL برای گره A $\rightarrow \quad -5 + \frac{V_A}{\frac{1}{j}} + \frac{V_A - V_B}{1} + \frac{V_A - V_C}{\frac{2}{j}} = 0 \quad \rightarrow \quad (2+2j)V_A - 2V_B - jV_C = 10$

KCL برای گره B $\rightarrow \quad \frac{V_B - V_A}{1} + \frac{V_B}{\frac{j}{2}} + \frac{V_B - V_C}{1} = 0 \quad \rightarrow \quad -V_A + (2-2j)V_B - V_C = 0$

KCL برای گره ⓒ $\rightarrow \dfrac{V_C}{\frac{1}{2}} + \dfrac{V_C - V_B}{1} + \dfrac{V_C - V_A}{\frac{2}{j}} = 0 \rightarrow -jV_A - 2V_B + (6+j)V_C = 0$

$$V_1 = V_A - V_C = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 & -j \\ 0 & 2-2j & -1 \\ 0 & -2 & 6+j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+3j & -2 & -j \\ -1 & 2-2j & -1 \\ -j & -2 & 6+j \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2+3j & -2 & 10 \\ -1 & 2-2j & 0 \\ -j & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+3j & -2 & -j \\ -1 & 2-2j & -1 \\ -j & -2 & 6+j \end{vmatrix}} = \frac{20-j30}{11+j2} = 3/22e^{-j66/6}$$

$$\rightarrow v_1(t) = 3/22\cos\left(t - 66/6^\circ\right)$$

و در نهایت بنا بر قاعده جمع آثار خواهیم داشت

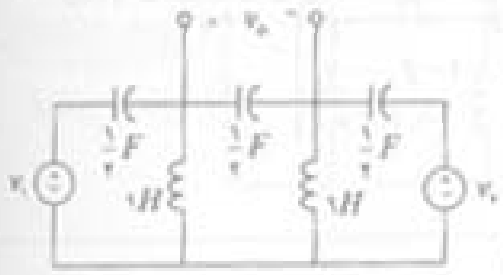
$$\rightarrow v(t) = v_1(t) + v_2(t) = 3/22\cos\left(t - 66/6^\circ\right) + 0/27\cos\left(2t - 78/8^\circ\right)$$

مسئله ۳۰

$v_o(t)$ را در حالت دایمی سینوسی تعیین کنید.

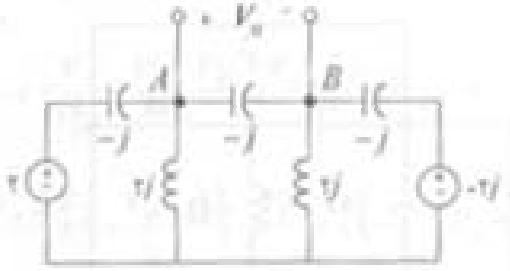
الف ـ $v_1 = 2\cos 2t$ و $v_2 = 2\sin 2t$

ب ـ $v_1 = 2\cos t$ و $v_2 = \sin 2t$



شکل مسئله ۳۰

حل: الف ـ از آنجا که فرکانس منابع یکسان است لذا می توان اثر هر دو را با هم در نظر گرفت.



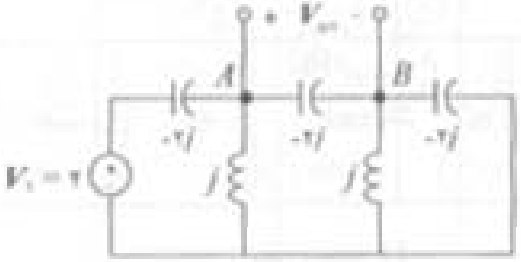
KCL برای گره Ⓐ $\rightarrow \dfrac{V_A - 2}{-j} + \dfrac{V_A}{2j} + \dfrac{V_A - V_B}{-j} = 0 \rightarrow 3V_A - 2V_B = 2$

KCL برای گره Ⓑ $\rightarrow \dfrac{V_B - V_A}{-j} + \dfrac{V_B}{2j} + \dfrac{V_B - (-2j)}{-j} = 0 \rightarrow 2V_A - 3V_B = j2$

$$\rightarrow 5V_A - 5V_B = 2 + j2 \rightarrow V_o = V_A - V_B = \frac{1}{5}(2 + j2) = \frac{2\sqrt{2}}{5}e^{j45^\circ}$$

$$\rightarrow \quad v_o(t) = \frac{2\sqrt{2}}{5}\cos\left(3t + 45^\circ\right)$$

ب ـ در این حالت منابع دارای فرکانسهای زاویه ای متفاوت اند بنابراین باید اثر هر کدام را جداگانه مورد بررسی قرار دهیم ابتدا بافرض $v_1(t) = 2\cos t$ و $v_2(t) = 0$ و $\omega = 1$ ، $V_1 = 2$ و $V_2 = 0$ شده و مدار بصورت زیر خواهد شد

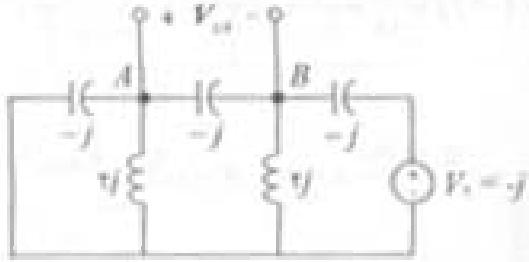


KCL برای گره (A) $\rightarrow \dfrac{V_A - 2}{-2j} + \dfrac{V_A}{j} + \dfrac{V_A - V_B}{-2j} = 0 \quad \rightarrow \quad V_B = -2$

KCL برای گره (B) $\rightarrow \dfrac{-2 - V_A}{-2j} + \dfrac{-2}{j} + \dfrac{-2}{-2j} = 0 \quad \rightarrow \quad V_A = 0$

$$\rightarrow \quad V_{ab} = V_A - V_B = 2 \quad \rightarrow \quad v_{ab}(t) = 2\cos(t)$$

در ادامه با فرض $v_1(t) = 0$ و $v_2(t) = \sin 3t$ و $\omega = 3$ ، $V_1 = 0$ و $V_2 = -j$ شده ومدار بصورت زیر خواهد شد



KCL برای گره (A) $\rightarrow \dfrac{V_A}{-j} + \dfrac{V_A}{2j} + \dfrac{V_A - V_B}{-j} = 0 \quad \rightarrow \quad 3V_A - 2V_B = 0$

KCL برای گره (B) $\rightarrow \dfrac{V_B - (-j)}{-j} + \dfrac{V_B}{2j} + \dfrac{V_B - V_A}{-j} = 0 \quad \rightarrow \quad 2V_A - 3V_B = 2j$

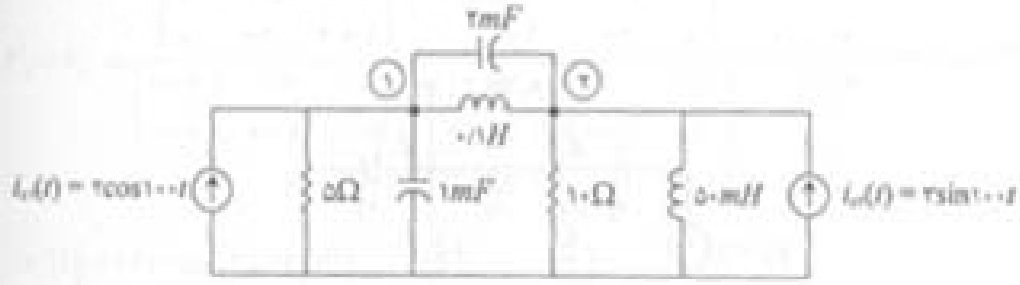
$$\rightarrow \quad 5V_A - 5V_B = 2j \quad \rightarrow \quad V_{ab} = V_A - V_B = \frac{2}{5}j = \frac{2}{5}e^{j90^\circ} \quad \rightarrow \quad v_{ab}(t) = \frac{2}{5}\cos\left(3t + 90^\circ\right)$$

و در نهایت بنابر قضیه جمع آثار خواهیم داشت.

$$v_o(t) = v_{ab}(t) + v_{ab}(t) = 2\cos t + \frac{2}{5}\cos\left(3t + 90^\circ\right) = 2\cos t - \frac{2}{5}\sin 3t$$

مسئله ۲۱

ولتاژهای گره های مدار را با استفاده از تحلیل گره در حالت دایمی سینوسی بدست آورید.



شکل مسئله ۲۱

حل : از آنجا که فرکانس زاویه ای هردو منبع ($\omega = 100$) برابر بوده لذا تر هر دورا می توان یکجا بررسی کرد. با توجه به شکل مسئله داریم

$$I_{s1} = 2 \ , \ I_{s2} = 3e^{-j\pi/2} = -3j$$

KCL برای گره ① $\rightarrow -2 + \frac{V_1}{5} + \frac{V_1}{-10j} + \frac{V_1 - V_2}{-5j} + \frac{V_1 - V_2}{10j} = 0 \rightarrow (-2 + j2)V_1 + V_2 = 20j$

KCL برای گره ② $\rightarrow -(-3j) + \frac{V_2}{j5} + \frac{V_2}{10} + \frac{V_2 - V_1}{j10} + \frac{V_2 - V_1}{-j5} = 0 \rightarrow V_1 + (1 + j)V_2 = 30$

$$\rightarrow V_1 = \frac{\begin{vmatrix} j20 & 1 \\ 30 & 1+j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2+2j & 1 \\ 1 & 1+j \end{vmatrix}} = \frac{-50 + j20}{5} = -10 + j4 = 10/77e^{-j21/8}$$

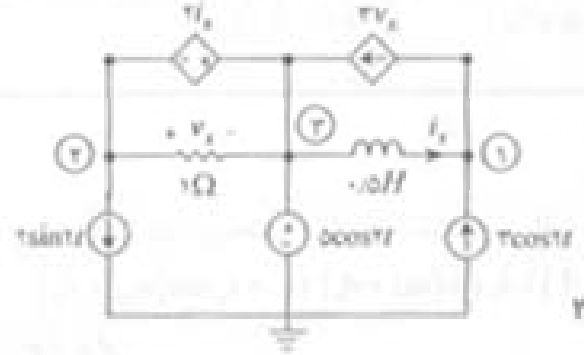
$$\rightarrow v_1(t) = 10/77\cos(100t - 21/8^\circ)$$

$$\rightarrow V_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2+2j & j20 \\ 1 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2+2j & 1 \\ 1 & 1+j \end{vmatrix}} = \frac{-40 + j20}{5} = -12 + j8 = 14/42e^{j137/2}$$

$$\rightarrow v_2(t) = 14/42\cos(100t + 137/2)$$

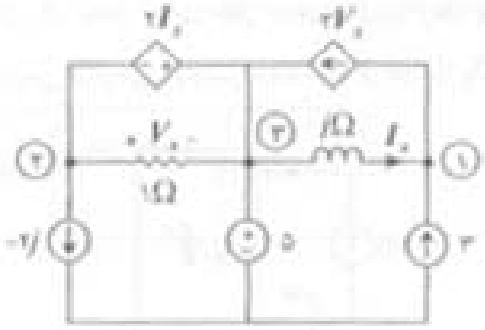
مسئله ۲۲

ولتاژ گره های مدار را با استفاده از تحلیل گره در حالت دایمی بدست آورید.



شکل مسئله ۲۲

حل : فرکانس هر سه منبع ۲ = ω بوده پس مدار را در حالت دایمی سینوسی می توان بصورت زیر در نظر گرفت.



$$V_2 = 5 \;\rightarrow\; I_x = \frac{5 - V_1}{j} \;,\; V_x = V_1 - 5$$

$$V_x = -2I_x \;\rightarrow\; V_1 - 5 = -2\frac{5 - V_1}{j} \;\rightarrow\; 2V_1 - jV_1 = 10 - j5$$

$$\text{KCL برای گره ۱} \;\rightarrow\; 2(V_1 - 5) + \frac{V_1 - 5}{j} - 3 = 0 \;\rightarrow\; V_1 + j2V_1 = 5 + j18$$

$$\rightarrow\; V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 - j5 & -j \\ 5 + j18 & j2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -j \\ 1 & j2 \end{vmatrix}} = \frac{j25 - 3}{2j} = 5 + j0/23 = 5/0.26^{\circ}$$

$$\rightarrow\; v_1(t) = 5/0.26\cos\left(2t + 2/9^{\circ}\right)$$

$$\rightarrow V_c = \frac{\begin{vmatrix} ۲ & ۱۰-j۵ \\ ۱ & ۵+j۱۸ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۲ & -j \\ ۱ & j۳ \end{vmatrix}} = \frac{j۴۱}{j۷} = ۵/۸۶ \quad \rightarrow \quad v_c(t) = ۵/۸۶\cos ۲t$$

$$V_c = ۵ \quad \rightarrow \quad v_c(t) = \cos ۲t$$

مسئله ۲۳

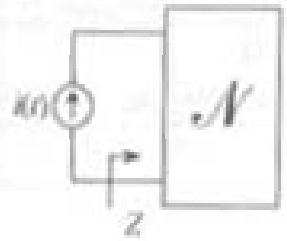
نشان دهید که اگر

$$i(t) = I_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) + I_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2) + \ldots + I_n \sin(\omega_n t + \theta_n)$$

در این صورت مقدار موثر برابر:

$$I_{rms} = \sqrt{I_{rms1}^2 + I_{rms2}^2 + \ldots + I_{rmsn}^2} = \sqrt{\frac{I_1^2 + I_2^2 + \ldots + I_n^2}{۲}}$$

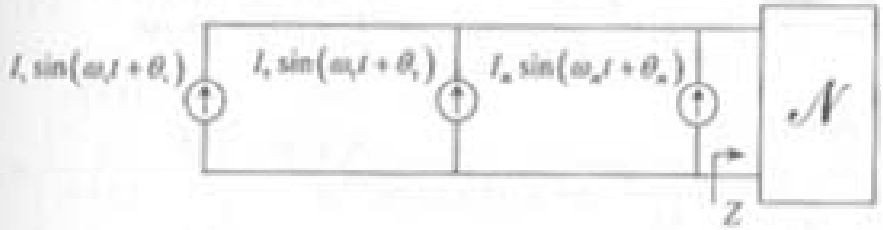
حل: فرض کنیم یک قطبی $\mathcal{N}$، شامل عناصر خطی و تغییرناپذیر با زمان بوده و $i(t)$ را به آن وصل کرده ایم همچنین فرض کنیم در حالت دایمی سینوسی امپدانس دیده شده از دو سر یک قطبی برابر Z باشد.



توان متوسط تحویل داده شده به یک قطبی $\mathcal{N}$، توسط منبع $i(t)$ برابر است با:

$$P_{av} = I_{rms}^2 \operatorname{Re}(Z)$$

همچنین با توجه به $i(t)$ داده شده شکل فوق را می توان بصورت زیر رسم کرد.



بنا بر قضیه جمع آثار می توان نوشت:

$$P_{av} = P_{av1} + P_{av2} + \ldots + P_{avn} = I_{rms1}^2 \operatorname{Re}(Z) + I_{rms2}^2 \operatorname{Re}(Z) + \ldots + I_{rmsn}^2 \operatorname{Re}(Z)$$

$$= \left(I_{rms1}^2 + I_{rms2}^2 + \ldots + I_{rmsn}^2\right) \operatorname{Re}(Z)$$

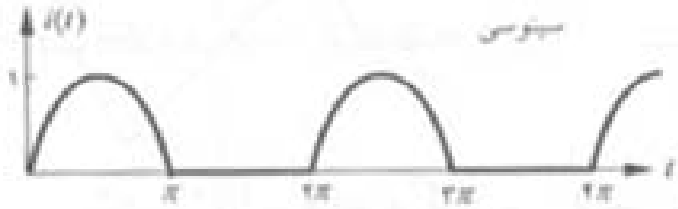
بنابراین داریم:

$$I^2_{rms} = I^2_{rms_1} + I^2_{rms_2} + \dots + I^2_{rms_n}$$

$$\rightarrow \quad I_{rms} = \sqrt{I^2_{rms_1} + I^2_{rms_2} + \dots + I^2_{rms_n}} = \sqrt{\left(\frac{I_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{I_n}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2}{2}}$$

مسئله ۲۴

مقدار موثر (RMS) شکل موج نشان داده شده را تعیین کنید.



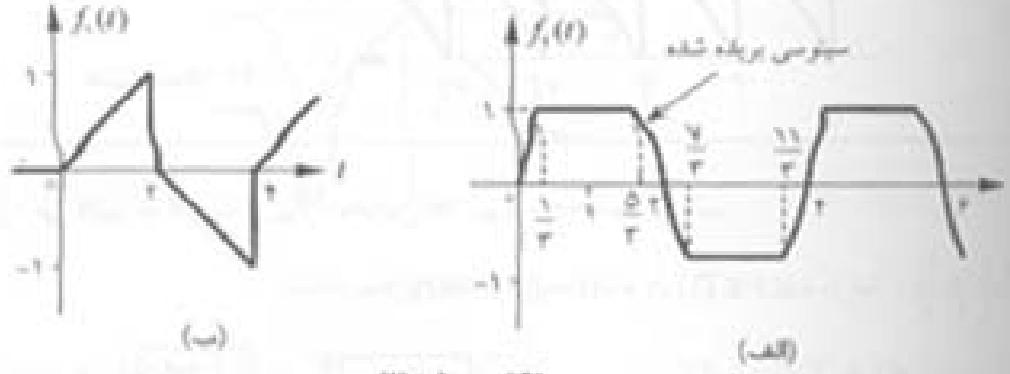
شکل مسئله ۲۴

حل: بنا بر تعریف مقدار موثر داریم:

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 t dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

مسئله ۲۵

مقدار موثر سیگنالهای متناوب شکل را تعیین کنید.



شکل مسئله ۲۵

حل: الف ـ با توجه به شکل (۲۵- الف) داریم:

$$f_1(t)=\begin{cases}2\sin\frac{\pi}{2}t\ , & 0<t<\frac{1}{2}\\ 1\ , & \frac{1}{2}<t<1\end{cases}$$

$$\int_0^1 f_1^2(t)dt=2\int_0^1 f_1^2(t)dt=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(2\sin\frac{\pi}{2}t\right)^2dt+2\int_{\frac{1}{2}}^1 dt=8\int_0^{\frac{1}{2}}(1-\cos\pi t)\,dt+2\int_{\frac{1}{2}}^1 dt$$

$$=4t-\frac{8\sin\pi t}{\pi}\Big|_0^{\frac{1}{2}}+2t\Big|_{\frac{1}{2}}^1=\frac{16}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$$

و در نهایت با برتعریف موثر خواهیم داشت.

$$F_{rms}=\sqrt{\frac{1}{2}\int_0^1 f_1^2(t)dt}=\sqrt{\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{\pi}}$$

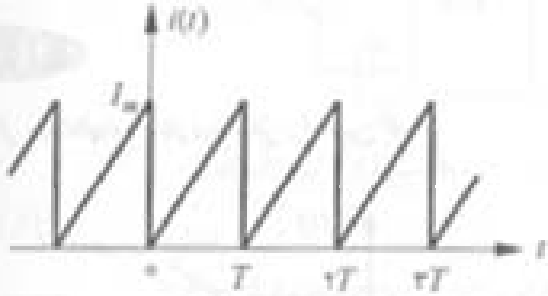
ب ـ به روش مشابه برای نمودار شکل (ب) داریم.

$$f_2(t)=\frac{t}{2}\ ,\quad 0<t<2$$

$$\int_0^2 f_2^2(t)dt=2\int_0^2\left(\frac{t}{2}\right)^2=\frac{t^3}{6}\Big|_0^2=\frac{2}{3}\quad\rightarrow\quad F_{rms}=\sqrt{\frac{1}{2}\int_0^2 f_2^2(t)dt}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

مسئله ۲۶

جریان گذرنده از مقاومت R بصورت زیر است. توان متوسط تحویل داده شده به آن را تعیین کنید.



شکل مسئله ۲۶

حل: می دانیم که $P_{av}=I_{rms}^2R$ ، بنابراین ابتدا I_{rms} را محاسبه می کنیم.

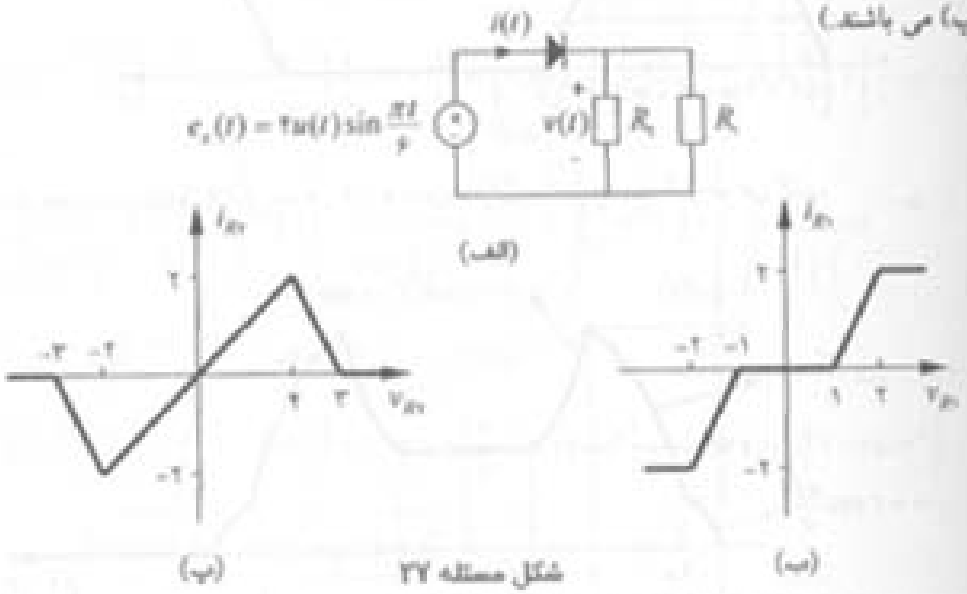
$$i(t)=\left(\frac{I_m}{T}\right)t\quad,\quad 0\le t\le T\quad,\quad i(t+KT)=i(t)$$

$$\int_0^T i^2(t)dt=\int_0^T\left(\frac{I_m}{T}\right)^2t^2dt=\frac{TI_m^2}{3}\quad\rightarrow\quad I_{rms}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}=\sqrt{\frac{1}{T}\left(\frac{TI_m^2}{3}\right)}=\frac{I_m}{\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow\quad P_{av}=I_{rms}^2R=\left(\frac{I_m}{\sqrt{3}}\right)^2R=\frac{1}{3}I_m^2R$$

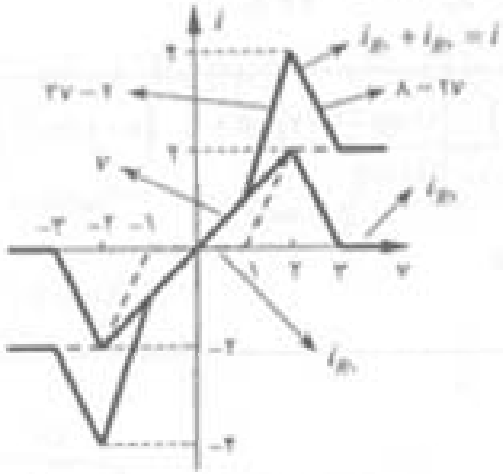
مسئله ۲۷

مقدار موثر $i(t)$ را تعیین کنید. (R_1 و R_2 دو مقاومت غیر خطی با مشخصه های شکلهای (ب) و (پ) می باشند.)



(پ) شکل مسئله ۲۷ (ب)

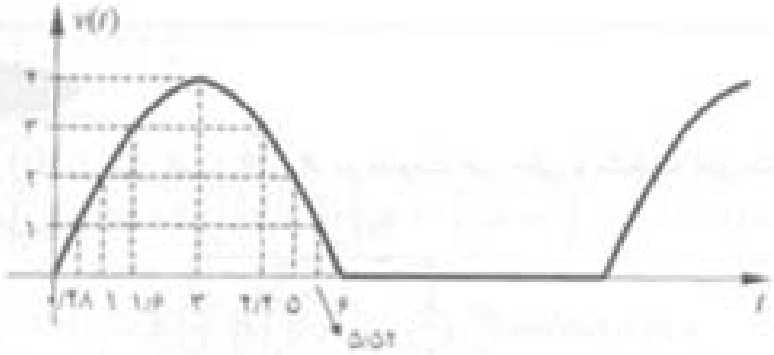
حل : ابتدا مشخصه معادل R_1 و R_2 را تعیین می کنیم. از آنجا که $v = v_{R_1} = v_{R_2}$ و $i = i_{R_1} + i_{R_2}$ لذا به ازای ولتاژهای متناظر جریان را با هم جمع می کنیم.



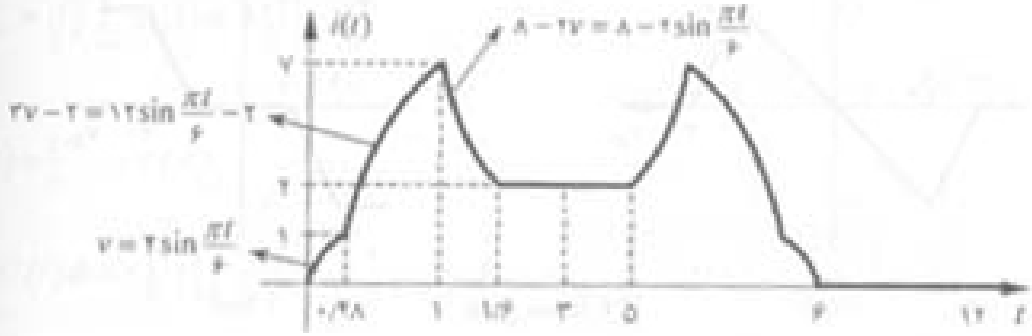
از آنجا که دیود فقط به ازای $e_s(t) > 0$ هدایت می کند لذا خواهیم داشت

$$v(t) = \begin{cases} e_s(t) & , e_s(t) > 0 \\ 0 & , e_s(t) < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2\sin\frac{\pi t}{6} & , 0 < t < 6 \\ 0 & , 6 < t < 12 \end{cases} \quad , \quad v(t+12) = v(t)$$

بنابراین نمودار $v(t)$ بصورت زیر خواهد بود.



در ادامه با توجه به نمودار $v(t)$ و نمودار ۱ - ۷ نمودار $i(t)$ را بر حسب t رسم می کنیم.



و در نهایت به محاسبه مقدار موثر $i(t)$ خواهیم پرداخت.

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{12}\int_0^{12} i^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{12}\int_0^{6} i^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{6}\int_0^{6} i^2(t)dt}$$

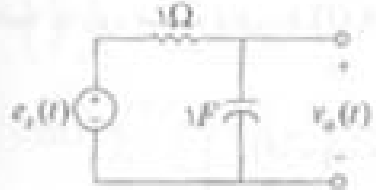
$$= \sqrt{\frac{1}{6}\left[\int_0^{0/48}\left(4\sin\frac{\pi t}{6}\right)^2 dt + \int_{0/48}^{1}\left(12\sin\frac{\pi t}{6}-2\right)^2 dt + \int_1^{1/6}\left(8-4\sin\frac{\pi t}{6}\right)^2 dt + \int_{1/6}^{6}(2)^2 dt\right]}$$

$$\rightarrow\ I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{6}(30)} = 1/58\ A$$

مسئله ۲۸

- حالت دایمی $v_o(t)$ و مقدار موثر آن را حساب کنید.
- توان متوسط تلف شده در مقاومت 1Ω چیست.

$$e_s(t) = 4\left(\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3t}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{5t}{2}\right)$$



شکل مسئله ۲۸

حل : با توجه به شکل مسئله و بنا بر قاعده تقسیم ولتاژ در حالت دایمی سینوسی داریم.

$$V_o = \frac{\frac{1}{j\omega}}{1+\frac{1}{j\omega}} V_s = \frac{1}{1+j\omega} V_s = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} e^{-j\tan^{-1}\omega} V_s$$

و در نهایت با استفاده از قضیه جمع آثار داریم.

$$V_o = \left\{2, \omega = \frac{1}{2}\right\} + \left\{-\frac{2}{3}, \omega = \frac{3}{2}\right\} + \left\{\frac{2}{5}, \omega = \frac{5}{2}\right\} = \left\{2, \omega = \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{2}{3}e^{j180}, \omega = \frac{3}{2}\right\} + \left\{\frac{2}{5}, \omega = \frac{5}{2}\right\}$$

$$V_o = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} e^{-j\tan^{-1}\frac{1}{2}}\right)(2) + \left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2}} e^{-j\tan^{-1}\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{2}{3}e^{j180}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{5}{2}\right)^2}} e^{-j\tan^{-1}\frac{5}{2}}\right)\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$\rightarrow \quad V_o = 2/58e^{-j26/6^\circ} + 0/79e^{j123/7^\circ} + 0/297e^{-j68/2^\circ}$$

$$\rightarrow \quad v_o(t) = 2/58\cos\left(\frac{t}{2} - 26/6^\circ\right) + 0/79\cos\left(\frac{3}{2}t - 123/7^\circ\right) + 0/297\cos\left(\frac{5}{2}t - 68/2^\circ\right)$$

$$\rightarrow \quad V_{rms} = \sqrt{\frac{(2/58)^2 + (0/79)^2 + (0/297)^2}{2}} = 2/59$$

می دانیم $P_{R,av} = I^2_{R,rms} \cdot R$ می باشد بنابراین ابتدا مقدار موثر $i_o(t)$ را محاسبه می کنیم.

$$I_o = \frac{V_o}{\frac{1}{j\omega}} = j\omega V_o = \omega V_o e^{j90}$$

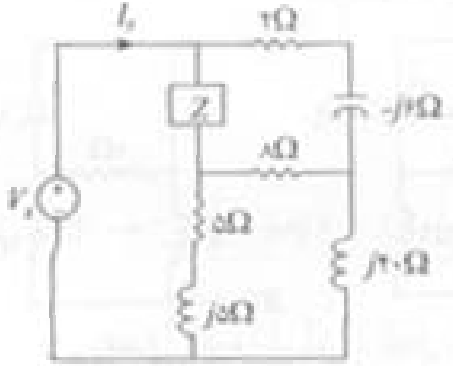
$$\rightarrow \quad I_o = \left(\frac{1}{2}\right)(2/58)e^{-j26/6}\cdot e^{j90} + \left(\frac{3}{2}\right)(0/79)e^{j123/7}\cdot e^{j90} + \left(\frac{5}{2}\right)(0/297)e^{-j68/2}\cdot e^{j90}$$

$$= 1/29e^{j63/4} + 1/18e^{j213/4} + 0/74e^{j21/8} \quad \rightarrow \quad I_{R,rms} = \sqrt{\frac{(1/29)^2 + (1/18)^2 + (0/74)^2}{2}} = 1/58$$

$$P_{R,av} = I^2_{R,rms} \cdot R = (1/58)^2(1) = 2/49\ W$$

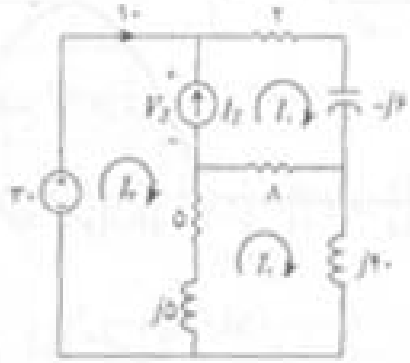
مسئله ۲۹

$(I = 10\angle 0^\circ, V_s = 20\angle 0^\circ)$ ، $Z = ?$



شکل مسئله ۲۹

حل : برای محاسبه Z ، منبع جریان آزمایشی I_2 را بجای امپدانس Z جایگزین کرده و مدار را بصورت زیر رسم می کنیم.



$$I_1 = ۱۰ \,,\; I_2 = I_1 - I_3 \;\rightarrow\; I_1 = I_2 + I_3 = I_2 + ۱۰$$

$$\begin{cases} KVL \text{ برای مش ۱} \;\rightarrow\; -V_2 + ۲(I_2 + ۱۰) - j۶(I_2 + ۱۰) + ۸(I_2 + ۱۰ - I_4) = ۰ \\ KVL \text{ برای مش ۲} \;\rightarrow\; (۵ + j۵)(I_4 - ۱۰) + ۸(I_4 - (I_2 + ۱۰)) + j۲۰ I_4 = ۰ \end{cases}$$

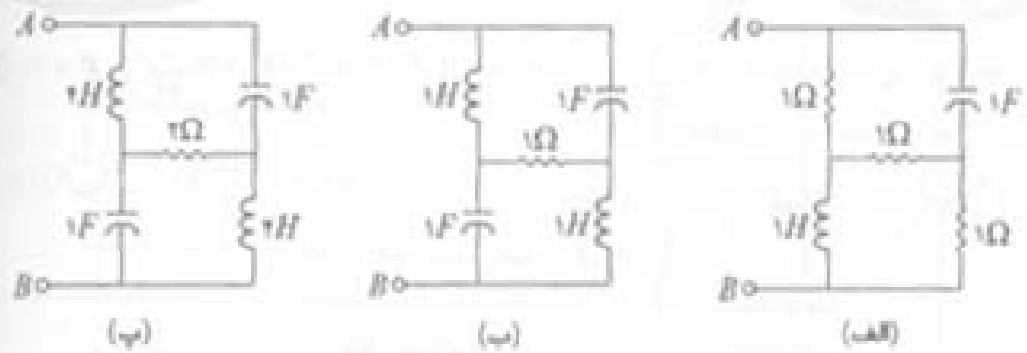
$$\rightarrow \begin{cases} (۱۰ - j۶) I_2 - ۸ I_4 = V_2 - ۱۰۰ + j۶۰ \\ -۸ I_2 + (۱۳ + j۲۵) I_4 = ۱۳۰ + j۵۰ \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} V_2 - ۱۰۰ + j۶۰ & -۸ \\ ۱۳۰ + j۵۰ & ۱۳ + j۲۵ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۱۰ - j۶ & -۸ \\ -۸ & ۱۳ + j۲۵ \end{vmatrix}} = \frac{۱۳ + j۲۵}{۳۳۶ + j۳۷۲} V_2 + K$$

$$\rightarrow \quad Z = \frac{۳۳۶ + j۳۷۲}{۱۳ + j۲۵} = ۹/۶ - j۲/۶۹$$

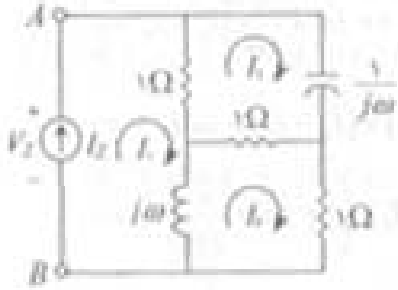
مسئله ۳۰

$Z_{AB} = ?$



شکل مسئله ۳۰

حل : الف ـ بدین منظور منبع آزمایشی I_Z را به دو سر A و B وصل می کنیم همچنین فرض می کنیم مدار در حالت دایمی سینوسی با فرکانس زاویه ای ω باشد.



$I_1 = I_Z$

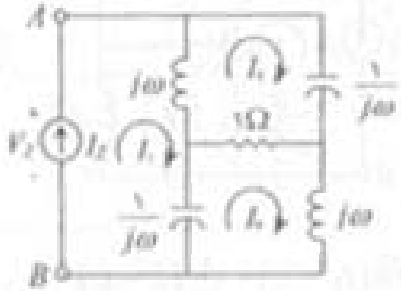
KVL برای مش ۱ $\rightarrow$ $-V_Z + (I_Z - I_2) + j\omega(I_Z - I_3) = 0 \rightarrow (1 + j\omega)I_Z - I_2 - j\omega I_3 = V_Z$

KVL برای مش ۲ $\rightarrow$ $(I_2 - I_Z) + \left(\frac{1}{j\omega}\right)I_2 + (I_2 - I_4) = 0 \rightarrow -I_Z + \left(2 + \frac{1}{j\omega}\right)I_2 - I_4 = 0$

KVL برای مش ۳ $\rightarrow$ $(j\omega)(I_3 - I_Z) + (I_3 - I_4) + I_3 = 0 \rightarrow -j\omega I_Z - I_4 + (2 + j\omega)I_3 = 0$

$$\rightarrow I_Z = \frac{\begin{vmatrix} V_Z & -1 & -j\omega \\ 0 & 2 + \frac{1}{j\omega} & -1 \\ 0 & -1 & 2 + j\omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 + j\omega & -1 & -j\omega \\ -1 & 2 + \frac{1}{j\omega} & -1 \\ -j\omega & -1 & 2 + j\omega \end{vmatrix}} = \frac{5 + 2j\omega + \frac{2}{j\omega}}{5 + 2j\omega + \frac{2}{j\omega}} V_Z = V_Z \rightarrow Z_{AB} = \frac{V_Z}{I_Z} = 1$$

ب ـ همانند قسمت (الف) عمل می کنیم.



$I_1 = I_Z$

KVL برای مش ۱ $\rightarrow$ $-V_Z + j\omega(I_Z - I_2) + \frac{1}{j\omega}(I_2 - I_4) = 0$

$$\rightarrow \left(j\omega + \frac{1}{j\omega}\right)I_Z - j\omega I_2 - \frac{1}{j\omega}I_4 = V_Z$$

KVL برای مش ۲ $\rightarrow \; j\omega(I_1 - I_2) + \frac{1}{j\omega} I_1 + (I_1 - I_3) = 0$

$$\rightarrow \; -j\omega I_2 + \left(1 + j\omega + \frac{1}{j\omega}\right) I_1 - I_3 = 0$$

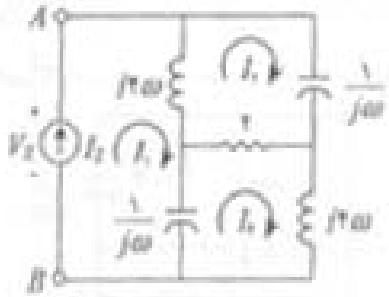
KVL برای مش ۳ $\rightarrow \; \frac{1}{j\omega}(I_3 - I_1) + (I_3 - I_2) + j\omega I_3 = 0$

$$\rightarrow \; -\frac{1}{j\omega} I_2 - I_1 + \left(1 + j\omega + \frac{1}{j\omega}\right) I_3 = 0$$

$$\rightarrow \; I_2 = \frac{\begin{vmatrix} V_2 & -j\omega & -\frac{1}{j\omega} \\ 0 & 1 + j\omega + \frac{1}{j\omega} & -1 \\ 0 & -1 & 1 + j\omega + \frac{1}{j\omega} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j\omega + \frac{1}{j\omega} & -j\omega & -\frac{1}{j\omega} \\ -j\omega & 1 + j\omega + \frac{1}{j\omega} & -1 \\ -\frac{1}{j\omega} & -1 & 1 + j\omega + \frac{1}{j\omega} \end{vmatrix}} = \frac{2 - \omega^2 - \frac{1}{\omega^2} + j2\omega + \frac{2}{j\omega}}{2 - \omega^2 - \frac{1}{\omega^2} + j2\omega + \frac{2}{j\omega}} V_2 = V_2$$

$$\rightarrow \; Z_{ab} = \frac{V_2}{I_2} = 1\Omega$$

ب ـ به همین ترتیب برای مدار (ب) خواهیم داشت.



$I_1 = I_2$

KVL برای مش ۱ $\rightarrow \; -V_2 + j2\omega(I_2 - I_3) + \frac{1}{j\omega}(I_1 - I_3) = 0$

$$\rightarrow \; \left(j2\omega + \frac{1}{j\omega}\right) I_2 - j2\omega I_3 - \frac{1}{j\omega} I_3 = V_2$$

KVL برای مش ۲ $\rightarrow \; j2\omega(I_3 - I_2) + \frac{1}{j\omega} I_3 + 2(I_3 - I_3) = 0$

$$\rightarrow \quad -j۴\omega I_Z + \left(۲ + j۴\omega + \frac{۱}{j\omega}\right) I_۲ - ۲I_۳ = ۰$$

KVL برای مش ۳ $\rightarrow \quad \frac{۱}{j\omega}(I_۳ - I_Z) + ۲(I_۳ - I_۲) + j۲\omega I_۳ = ۰$

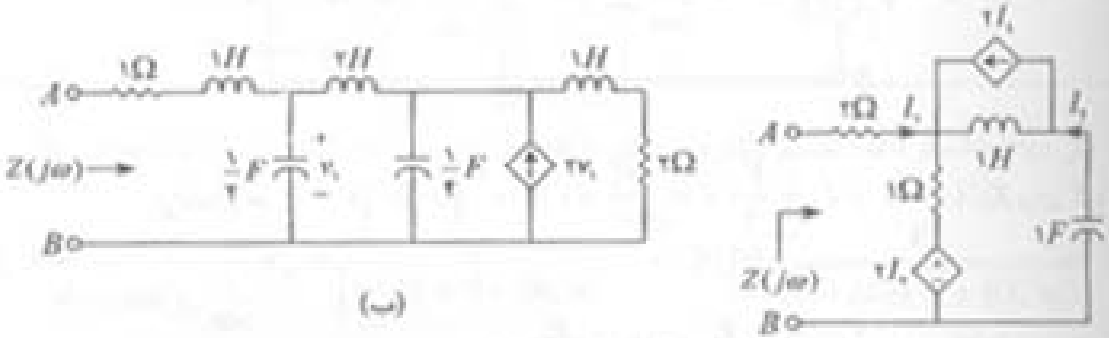
$$\rightarrow \quad -\frac{۱}{j\omega} I_Z - ۲I_۲ + \left(۲ + j۴\omega + \frac{۱}{j\omega}\right) I_۳ = ۰$$

$$I_Z = \frac{\begin{vmatrix} V_Z & -j۴\omega & -\frac{۱}{j\omega} \\ ۰ & ۲ + j۴\omega + \frac{۱}{j\omega} & -۲ \\ ۰ & -۲ & ۲ + j۴\omega + \frac{۱}{j\omega} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j۴\omega + \frac{۱}{j\omega} & -j۴\omega & -\frac{۱}{j\omega} \\ -j۴\omega & ۲ + j۴\omega + \frac{۱}{j\omega} & -۲ \\ -\frac{۱}{j\omega} & -۲ & ۲ + j۲\omega + \frac{۱}{j\omega} \end{vmatrix}} = \frac{۸ - ۱۶\omega^۲ - \frac{۱}{\omega^۲} + j۱۶\omega + \frac{۲}{j\omega}}{۱۶ - ۳۲\omega^۲ - \frac{۲}{\omega^۲} + j۳۲\omega + \frac{۸}{j\omega}} V_Z = \frac{V_Z}{۲}$$

$$\rightarrow \quad Z_{AB} = \frac{V_Z}{I_Z} = ۲\Omega$$

مسئله ۳۱

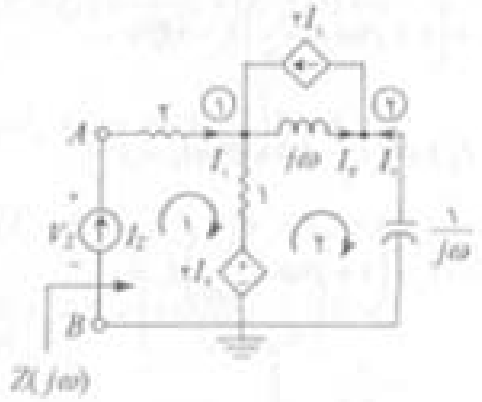
$Z_{AB} = ?$



(ب) (الف)

شکل مسئله ۳۱

حل: الف ـ در حالت دایمی سینوسی و به ازای فرکانس زاویه ای ω مدار به صورت زیر خواهد بود که منبع جریان آزمایش I_Z را به دو سر A و B وصل کرده ایم.



$I_1 = I_2 \quad , \quad V_1 = V_2 - 2I_1 = V_2 - 2I_2$

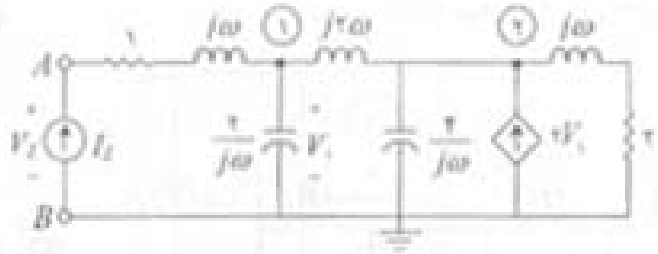
KCL برای گره مرکب شامل ① و ② $\rightarrow \quad -I_2 + \dfrac{V_2 - 2I_2 - (-2I_1)}{1} - I_1 = 0 \quad \rightarrow \quad I_1 = 2I_2 - V_2$

KCL برای گره ② $\rightarrow \quad -I_1 + 2I_2 - (2I_2 - V_2) = 0 \quad \rightarrow \quad I_1 = V_2 - I_2$

KVL برای حلقه شامل منبعهای ۱و۲ $\rightarrow \quad -V_2 + 2I_2 + j\omega(V_2 - I_2) - \dfrac{1}{j\omega}(2I_2 - V_2) = 0$

$$\rightarrow \quad (1 - \omega^2 - j\omega)V_2 = (3 - \omega^2 - 2j\omega)I_2 \quad \rightarrow \quad Z(j\omega) = \frac{V_2}{I_2} = \frac{3 - \omega^2 - 2j\omega}{1 - \omega^2 - j\omega}$$

ب ـ همانند قسمت (الف) عمل می کنیم



KCL برای گره ① $\rightarrow \quad -I_2 + \dfrac{V_1}{\frac{2}{j\omega}} + \dfrac{V_1 - V_2}{j2\omega} = 0 \quad \rightarrow \quad (1 - \omega^2)V_1 - V_2 = j2\omega I_2$

KCL برای گره ② $\rightarrow \quad \dfrac{V_2 - V_1}{j2\omega} + \dfrac{V_2}{\frac{2}{j\omega}} - 2V_1 + \dfrac{V_2}{2 + j\omega} = 0$

$$\rightarrow \quad \left(-2 - \frac{1}{j2\omega}\right)V_1 + \left(j\frac{\omega}{2} + \frac{1}{j2\omega} + \frac{1}{2 + j\omega}\right)V_2 = 0$$

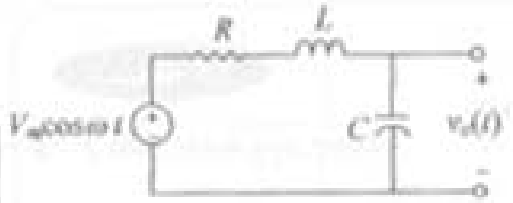
$$\rightarrow V_1 = \frac{\begin{vmatrix} j2\omega I_Z & -1 \\ 0 & j\frac{\omega}{2} + \frac{1}{j2\omega} + \frac{1}{2+j\omega} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-\omega^2 & -1 \\ -2-\frac{1}{j2\omega} & j\frac{\omega}{2} + \frac{1}{j2\omega} + \frac{1}{2+j\omega} \end{vmatrix}} = \frac{1-\frac{\omega^2}{2}+\frac{j2\omega}{2+j\omega}}{-2+j\frac{2\omega-\omega^3}{2}+\frac{1-\omega^2}{2+j\omega}} I_Z$$

$$= \frac{2-\omega^2+j\left(3\omega-\frac{\omega^3}{2}\right)}{-3-\frac{7\omega^2}{2}+\frac{\omega^4}{2}+j\left(-\frac{\omega}{2}-\frac{\omega^3}{2}\right)} I_Z$$

$$V_Z = 1+j\omega I_Z + V_1 = \left(1+j\omega+\frac{2-\omega^2+j\left(3\omega-\frac{\omega^3}{2}\right)}{-3-\frac{7\omega^2}{2}+\frac{\omega^4}{2}+j\left(-\frac{\omega}{2}-\frac{\omega^3}{2}\right)}\right) I_Z$$

$$\rightarrow Z_{AB} = \frac{V_Z}{I_Z} = 1+j\omega+\frac{2-\omega^2+j\left(3\omega-\frac{\omega^3}{2}\right)}{-3-\frac{7\omega^2}{2}+\frac{\omega^4}{2}+j\left(-\frac{\omega}{2}-\frac{\omega^3}{2}\right)}$$

مسئله ۳۲



شکل مسئله ۳۲

- به ازای چه فرکانسی دامنه ولتاژ $v_o(t)$ حداکثر می شود.
- اندازه دامنه حداکثر در این فرکانس چیست.
- دامنه و فرکانس حداکثر را برحسب Q مداریان کنید.

حل : با استفاده از قاعده تقسیم ولتاژ و با فرض اینکه مدار در حالت دایمی سینوسی باشد خواهیم داشت.

$$V_o = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}} V_m = \frac{V_m}{\left(1-LC\omega^2\right)+jRC\omega} \rightarrow |V_o| = \frac{V_m}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2+R^2C^2\omega^2}}$$

در ادامه با مشتق گیری از $|V_o|$ نسبت به ω و برابر صفر قرار دادن آن فرکانس مورد نظر را بدست می آوریم.

$$\frac{d|V_o|}{d\omega} = 0 \rightarrow \frac{V_m\left\{2(-2LC\omega)\left(1-LC\omega^2\right)+2R^2C^2\omega\right\}}{2\left((1-LC\omega^2)^2+R^2C^2\omega^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{2L^2}}$$

بنابراین دامنه حداکثر برابر خواهد شد با

$$|V_o|_{max} = |V_o|_{\omega^2=\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}} = \frac{V_m}{\sqrt{\left(1-LC\left(\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}\right)\right)^2 + R^2C^2\left(\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}\right)}}$$

با توجه به شکل مدار معادله دیفرانسیل خروجی بر حسب ورودی بصورت زیر است.

$$\frac{d^2v_o}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dv_o}{dt}+\frac{1}{LC}v_o = v_i \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{R}{2L} \quad , \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

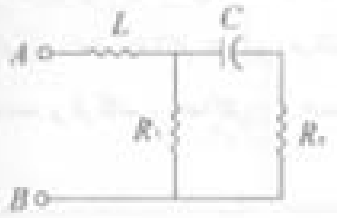
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2 - 4\left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2-2\alpha^2} = \omega_0\sqrt{1-\frac{2\alpha^2}{\omega_0^2}} = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$$

$$|V_o|_{max} = \frac{V_m}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{\omega_0^2}\left(\omega_0^2-2\alpha^2\right)\right)^2 + \left(\frac{2\alpha}{\omega_0^2}\right)^2\left(\omega_0^2-2\alpha^2\right)}}$$

$$= \frac{V_m}{\sqrt{\frac{2\alpha^2}{\omega_0^2}-\frac{2\alpha^2}{\omega_0^2}}} = \frac{V_m}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}-\frac{1}{2Q^2}}} = \frac{2Q^2}{\sqrt{2Q^2-1}}V_m$$

مسئله ۳۳

فرکانس تشدید مدار چیست؟



شکل مسئله ۳۳

حل : با توجه به شکل مسئله امپدانس دو سر A و B بصورت زیر بدست می آید.

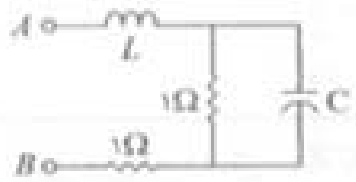
$$Z_{AB}(j\omega) = j\omega L + R_1 \,\mathrm{P}\left(R_2+\frac{1}{j\omega C}\right)$$

$$= \frac{R_1+R_1R_2(R_1+R_2)C^2\omega^2}{(R_1+R_2)^2C^2\omega^2+1} + j\omega\left(\frac{LC^2(R_1+R_2)^2\omega^2+L-CR_1^2}{(R_1+R_2)^2C^2\omega^2+1}\right)$$

می دانیم به ازای فرکانس تشدید، $I_m\left[Z_{AB}(j\omega_0)\right]=0$ می باشد بنابراین داریم.

$$I_m\{Z_{AB}(j\omega_0)\}=0 \rightarrow LC^2(R_1+R_2)^2\omega_0^2+L-CR_1^2=0 \rightarrow \omega_0=\frac{1}{C(R_1+R_2)}\sqrt{\frac{CR_1^2}{L}-1}$$

مسئله ۳۴



شکل مسئله ۳۴

- فرکانس تشدید ω_0 چیست.
- L و C را چنان تعیین کنید که $\omega_0=100$ باشد.

حل : برای محاسبه ω_0 همانند مسئله قبل عمل می کنیم.

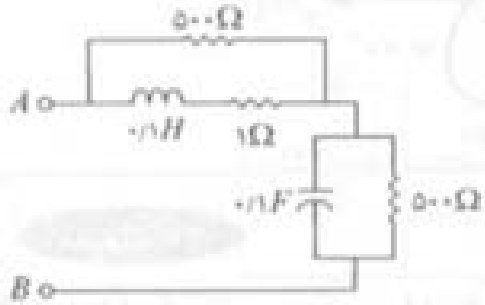
$$Z_{AB}(j\omega)=j\omega L+1\|\left(\frac{1}{j\omega C}\right)+1=\frac{2+C^2\omega^2}{1+C^2\omega^2}+j\omega\frac{L-C+C^2L\omega^2}{1+\omega^2C^2}$$

$$I_m\{Z_{AB}(j\omega_0)\}=0 \rightarrow L-C+C^2L\omega_0^2=0 \rightarrow \omega_0=\frac{1}{C}\sqrt{\frac{C}{L}-1}$$

برای داشتن $\omega_0=100$ با انتخاب $C=0/01F$ خواهیم داشت.

$$100=\frac{1}{0/01}\sqrt{\frac{0/01}{L}-1} \rightarrow L=0/005H$$

مسئله ۳۵



شکل مسئله ۳۵

- فرکانس تشدید ω_0 چیست.

حل : همانند مسئله قبل عمل می کنیم.

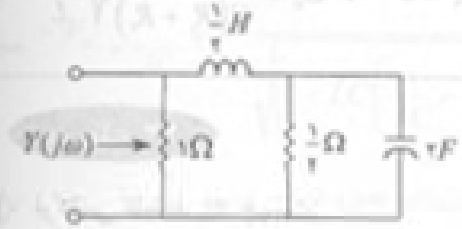
$$Z_{AB}(j\omega)=(1+j0/1\omega)\|500+500\|\frac{1}{j0/1\omega}=\frac{500+j50\omega}{501+j0/1\omega}+\frac{500}{1+j50\omega}$$

$$=\left\{\frac{(500)(501)+50\omega^2}{(501)^2+(0/1\omega)^2}+\frac{500}{1+(50\omega)^2}\right\}+j50\omega\left\{\frac{500}{(501)^2+(0/1\omega)^2}-\frac{500}{1+(50\omega)^2}\right\}$$

$$I_m\{Z_{AB}(j\omega_0)\}=0 \rightarrow \frac{500}{(501)^2+(0/1\omega_0)^2}-\frac{500}{1+(50\omega_0)^2}=0 \rightarrow \omega_0=10/02$$

مسئله ۳۶

مکان ادمیتانس ورودی $Y(j\omega)$ را تعیین کنید.



شکل مسئله ۳۶

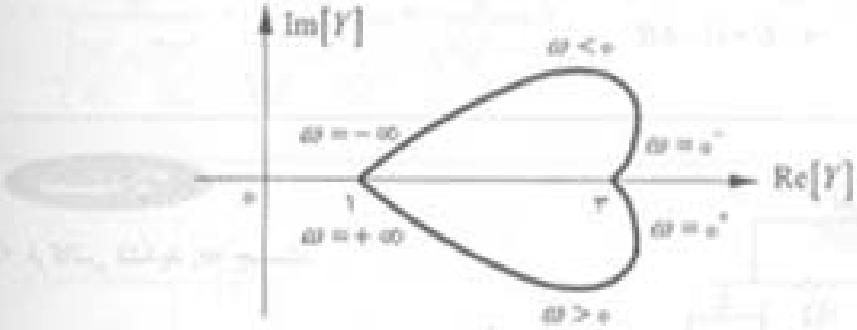
حل: با توجه به شکل مسئله داریم:

$$Y(j\omega)=1+\frac{1}{j\frac{\omega}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)\mathbb{P}\left(\frac{1}{j2\omega}\right)}=\left(1+\frac{2}{(1-\omega^2)^2+\omega^2}\right)+j\left(\frac{-2\omega^3}{(1-\omega^2)^2+\omega^2}\right)$$

$$\lim_{\omega\to 0^-}Y(j\omega)=3+j0^-=3\angle 0^- \quad ; \quad \lim_{\omega\to 0^+}Y(j\omega)=3+j0^+=3\angle 0^+$$

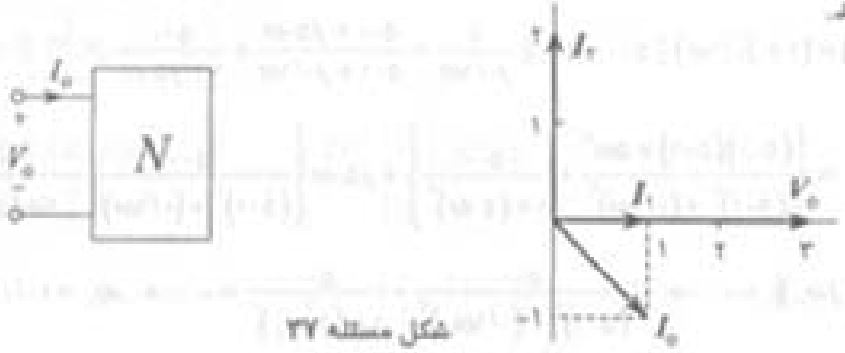
$$\lim_{\omega\to +\infty}Y(j\omega)=1+j0^-=1\angle 0^- \quad ; \quad \lim_{\omega\to -\infty}Y(j\omega)=1+j0^+=1\angle 0^+$$

بنابراین مکان ادمیتانس $Y(j\omega)$ در صفحه مختلط بصورت زیر خواهد بود.



مسئله ۳۷

در داخل یک قطبی، سه عنصر با امپدانسهای Z_1 و Z_2 و Z_3 و با فازور های جریان I_1 و I_2 و I_3 وجود دارند. شکل مدار داخل یک قطبی را رسم کنید. نوع و مقادیر هر عنصر را در فرکانس $\omega=2$ تعیین کنید.

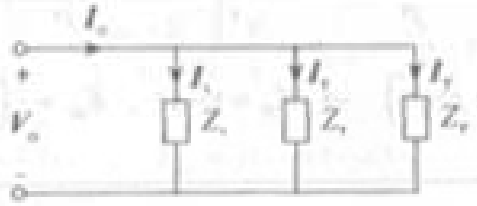


شکل مسئله ۳۷

حل: با توجه به فازورهای رسم شده داریم

$$V_o = 4\angle 0 \quad , \quad I_o = \sqrt{2}\angle -45^\circ \quad , \quad I_1 = 1\angle 0 \quad , \quad I_2 = 2\angle 90^\circ$$

با توجه به صورت مسئله، یک قطبی را می توان بصورت زیر در نظر گرفت.



بنابراین داریم

$$Z_1 = \frac{V_o}{I_o} = \frac{4e^{j0}}{2e^{j0}} = 2\Omega \quad \rightarrow \quad R = 2\Omega$$

$$Z_2 = \frac{V_o}{I_1} = \frac{4e^{j0}}{2e^{j0}} = \frac{4}{2}e^{-j0} = \frac{1}{j\frac{2}{4}} \quad \rightarrow \quad \omega C = \frac{2}{4} \quad , \quad \omega = 2 \quad \rightarrow \quad C = \frac{1}{4}F$$

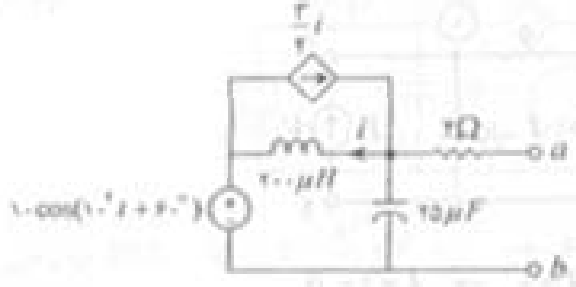
$$I_3 = I_o - (I_1 + I_2) = \sqrt{2}e^{-j45^\circ} - \left(1 + 2e^{-j90^\circ}\right) = -3j$$

$$Z_3 = \frac{V_o}{I_3} = \frac{4}{-3j} = j \quad \rightarrow \quad \omega L = 1 \quad , \quad \omega = 2 \quad \rightarrow \quad L = \frac{1}{2}H$$

بنابراین یک قطبی N یک مدار RLC موازی است که مقادیر آنها بصورت فوق می باشد.

مسئله ۳۸

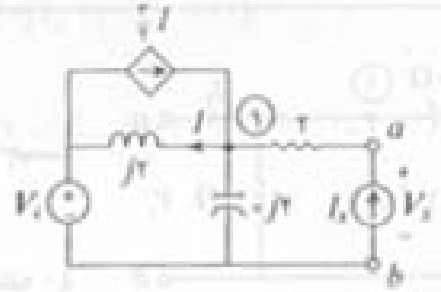
معادل تونن دو سر a و b را بدست آورید.



شکل مسئله ۳۸

حل: بدین منظور منبع جریان آزمایشی I_x را به دو سر a و b وصل کرده و ولتاژ دو سر آن را بدست می آوریم.

با توجه به شکل مسئله $\omega = 10^3$ بوده و مدار در حالت دایمی سینوسی بصورت زیر خواهد بود.



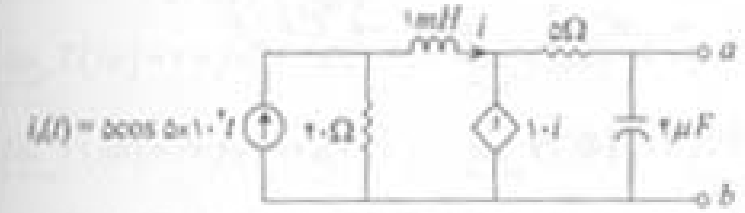
$$V_1 = V_x - 2I_x \quad , \quad V_1 = 10\angle 60^\circ = 5 + j5\sqrt{3} \quad , \quad I = \frac{V_1 - V_2}{j2} = \frac{V_x - 2I_x - (5 + j5\sqrt{3})}{j2}$$

$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow \frac{V_x - 2I_x - (5 + j5\sqrt{3})}{j2} - \frac{3}{2}\left(\frac{V_x - 2I_x - (5 + j5\sqrt{3})}{j2}\right) + \frac{V_x - 2I_x}{-j4} - I_x = 0$$

$$\rightarrow V_x = (2 - j2)I_x + \frac{1}{2}(5 + j5\sqrt{3}) \rightarrow Z_{th} = 2 - j2 \ , \ E_{oc} = \frac{1}{2}(5 + j5\sqrt{3}) = 5\angle 60^\circ$$

مسئله ۳۹

معادل تونن دو سر a و b را بدست آورید.



شکل مسئله ۳۹

حل: بدین منظور منبع جریان آزمایشی I_x را به دو سر a و b وصل کرده و ولتاژ دوسر آن را بدست می آوریم. درحالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود که در آن $\omega = 5 \times 10^3$ بوده و از تبدیل نرتن به تونن استفاده کرده ایم.

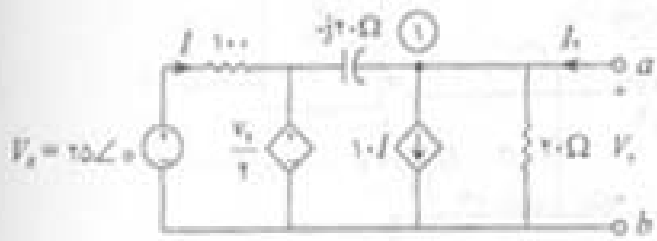
$$\text{KVL برای مش ۱} \rightarrow -200 + 20I + j50I + 10I = 0 \rightarrow I = 2 - j2$$

$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow \frac{V_x - 10(2 - j2)}{5} + \frac{V_x}{-j5} - I_x = 0 \rightarrow V_x = \left(\frac{5}{2} - j\frac{5}{2}\right)I_x - j20$$

$$\rightarrow Z_{th} = \frac{5}{2} - j\frac{5}{2} \ , \ E_{oc} = -j20 = 20\angle -90$$

مسئله ۴۰

معادل تونن دو سر a و b چیست.



شکل مسئله ۴۰

حل : با توجه به شکل مسئله داریم.

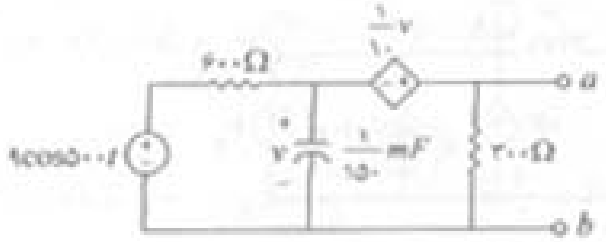
$$I = \frac{V_x - \frac{V_x}{2}}{100} = \frac{50 - V_x}{200}$$

KCL برای گره ① $\rightarrow \dfrac{V_x - \frac{V_x}{2}}{-j20} + 10\left(\dfrac{50 - V_x}{200}\right) + \dfrac{V_x}{20} - I_x = 0 \rightarrow V_x = -j80 I_x + j200$

$$\rightarrow Z_{th} = -j80 \quad , \quad E_{oc} = j200 = 200\angle 90^\circ$$

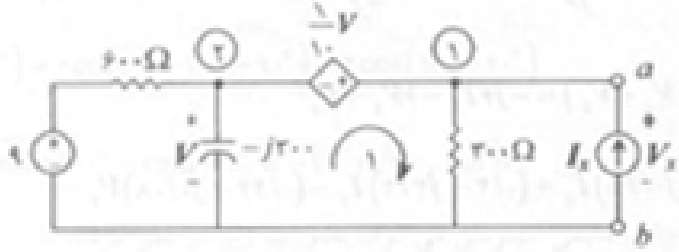
مسئله ۴۱

معادل تونن دو سر a و b چیست.



شکل مسئله ۴۱

حل : در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود که در آن منبع جریان آزمایشی I_x را به دو سر a و b وصل کرده ایم.



KVL برای مش ۱ $\rightarrow -V - \dfrac{V}{10} + V_x = 0 \rightarrow V = \dfrac{10}{11} V_x$

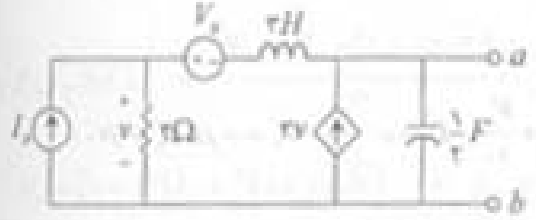
KCL برای گره مرکب شامل ① و ② $\rightarrow \dfrac{\frac{10}{11}V_x - 9}{600} + \dfrac{\frac{10}{11}V_x}{-j200} + \dfrac{V_x}{200} - I_x = 0$

$$\rightarrow V_x = (128/3 - j92/7) I_x + (2/2 - j1/4)$$

$$\rightarrow Z_{th} = 128/3 - j92/7 \quad , \quad E_{oc} = 2/2 - j1/4 = 2/6\angle -33^\circ$$

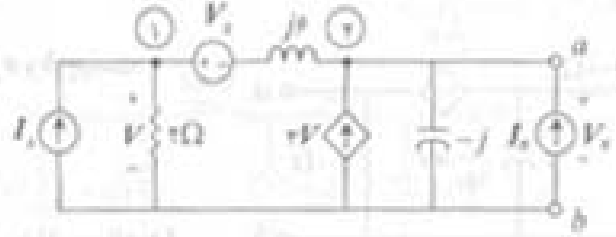
مسئله ۴۲

معادل تونن دو سر a و b چیست. (ω = ۲)



شکل مسئله ۴۲

حل : بدین منظور منبع جریان آزمایشی I_s را به دو سر a و b وصل کرده و از روش فازوری استفاده میکنیم



$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow -I_s + \frac{(V-V_s)-V_s}{j6} + \frac{V}{4} = 0 \rightarrow V = \frac{1}{1+3j}\left(j6I_s + V_s + V_s\right)$$

$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \frac{V_s-(V-V_s)}{j6} - 2V + \frac{V_s}{-j} - I_s = 0 \rightarrow (1+18j)V = -j6I_s - 6V_s + V_s$$

$$\rightarrow \frac{1+18j}{1+3j}\left(j6I_s + V_s + V_s\right) = -j6I_s - 6V_s + V_s$$

$$\rightarrow V_s = -(0.08 + j0.65)I_s + (0.4 - j3.4)I_s - (0.44 + j0.08)V_s$$

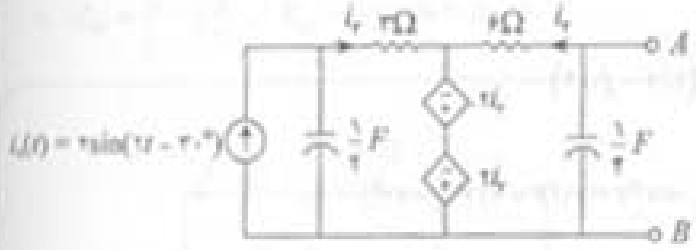
$$\rightarrow Z_{th} = -0.08 - j0.65 \quad , \quad E_{oc} = (0.4 - j3.4)I_s - (0.44 + j0.08)V_s$$

مسئله ۴۳

الف ـ $Z_{AB}(j\omega) = ?$

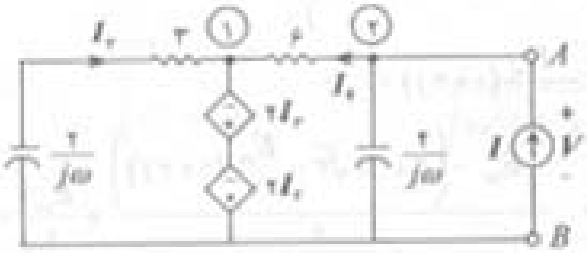
ب ـ معادل تونن دو سر A و B چیست.

پ ـ اگر نقاط A و B اتصال کوتاه شود، چه جریانی از شاخه AB می گذرد.



شکل مسئله ۴۳

حل : الف ـ بدین منظور منبع جریان آزمایشی I را به دو سر A و B وصل کرده و تمامی منابع ثابت را برابر صفر قرار می دهیم.



$$I_1 = \frac{V_1}{3+\frac{2}{j\omega}} = \frac{j\omega}{2+j3\omega}V_1 \quad , \quad I_2 = \frac{V-V_1}{6}$$

$$\rightarrow \; V_1 = -2I_1 - 2I_2 = \frac{-j2\omega}{2+j3\omega}V_1 + \frac{1}{3}V_1 - \frac{1}{3}V \;\rightarrow\; V_1 = \frac{2+j3\omega}{4+j12\omega}V$$

$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \frac{V-\left(-\frac{2+j3\omega}{4+j12\omega}\right)V}{6} + \frac{V}{\frac{2}{j\omega}} - I = 0$$

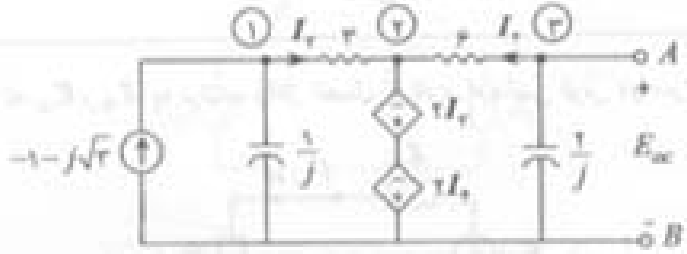
$$(2+j3\omega)V = 8I \;\rightarrow\; Z(j\omega) = \frac{V}{I} = \frac{8}{2+j3\omega}$$

ب ـ ابتدا فازور منبع جریان ورودی را بدست می آوریم.

$$i_s(t) = 2\sin(2t-30^\circ) = 2\cos(2t-30^\circ-90^\circ) = 2\cos(2t-120^\circ)$$

$$\rightarrow \; I_s = 2\angle 120^\circ = 2\cos 120^\circ - 2\sin 120^\circ = -1-j\sqrt{3} \quad , \quad \omega = 2$$

بنابراین شکل مدار را در حالت دایمی سینوسی می توان بصورت زیر در نظر گرفت.



$$\begin{cases} I_2 = \dfrac{V_1-V_2}{3} \\ I_1 = \dfrac{V_2-V_3}{6} \end{cases} \rightarrow \; V_1 = -2I_1 - 2I_2 = V_3 - \frac{V_2}{3} - 2\frac{V_3}{3} \;\rightarrow\; V_1 = -\frac{V_2}{3} = -\frac{E_{oc}}{3}$$

$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow -\left(-1-j\sqrt{3}\right)+\frac{-\frac{E_{oc}}{2}}{\frac{1}{j}}+\frac{-\frac{E_{oc}}{2}-V_c}{3}=0$$

$$\rightarrow V_c=3+j3\sqrt{3}-\frac{E_{oc}}{2}(1+3j)$$

$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow -\frac{E_{oc}-\left(3+j3\sqrt{3}-\frac{E_{oc}}{2}(1+3j)\right)}{6}+\frac{E_{oc}}{\frac{2}{j}}=0$$

$$\rightarrow E_{oc}=\frac{1+j\sqrt{3}}{1+j3}=\frac{2\angle 60^\circ}{\sqrt{10}\angle 71.6^\circ}=1.26\angle -11.6^\circ$$

و با استفاده از $Z_{AB}(j\omega)$ بدست آمده در قسمت (الف) امپدانس تونن را بدست خواهیم آورد.

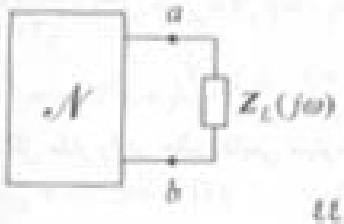
$$Z_{th}=Z_{AB}(j2)=\frac{8}{2+j6}=0.2-j0.6$$

پ ـ با استفاده از نمودار معادل تونن بدست آمده در قسمت (ب) خواهیم داشت:

$$I_w=\frac{E_{oc}}{Z_{th}}=\frac{1.2\angle -11.6^\circ}{0.2-j0.6}=\frac{1.26\angle -131.6^\circ}{1.26\angle -71.6^\circ}=1\angle 60^\circ \rightarrow i_w(t)=\cos\left(2t+60^\circ\right)$$

مسئله ۴۴

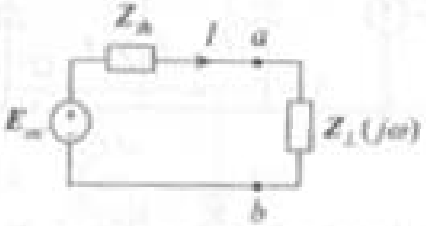
معادل تونن دو سر a و b چیست. (یک قطبی N، خطی و تغییر ناپذیر با زمان و با منابع ثابت هم فرکانس بوده و در حالت دایمی سینوسی است.)



$Z_L(j\omega)$	∞	$-j8$	$-j2$
$\lvert V_{ab}\rvert$	100	160	$\frac{200}{3}$

شکل مسئله ۴۴

حل: فرض کنید که E_{oc} و Z_{th} به ترتیب ولتاژ اتصال کوتاه و امپدانس تونن دو سر a و b باشند.



$$V_{ab}=\frac{Z_L}{Z_{th}+Z_L}E_{oc}=\frac{\mathrm{Re}(Z_L)+j\,\mathrm{Im}(Z_L)}{\mathrm{Re}(Z_{th})+\mathrm{Re}(Z_L)+j\left[\mathrm{Im}(Z_{th})+\mathrm{Im}(Z_L)\right]}E_{oc}$$

$$\rightarrow \quad |V_{ab}| = \sqrt{\frac{Re^2(Z_L) + Im^2(Z_L)}{\left[Re(Z_{th}) + Re(Z_L)\right]^2 + \left[Im(Z_{th}) + Im(Z_L)\right]^2}}\,|E_{oc}|$$

$$\begin{cases} |V_{ab}| = ۱۰۰ \\ Z_L = \infty \end{cases} \rightarrow \quad ۱۰۰ = |E_{oc}| \quad , \quad \begin{cases} |V_{ab}| = ۱۶۰ \\ Z_L = -j۸ \end{cases} \rightarrow \quad ۱۶۰ = \frac{۸}{\sqrt{Re^2(Z_L) + \left(Im(Z_L) - ۸\right)^2}}\,۱۰۰$$

$$\begin{cases} |V_{ab}| = \frac{۴۰۰}{۳} \\ Z_L = -j۴ \end{cases} \rightarrow \quad \frac{۴۰۰}{۳} = \frac{۸}{\sqrt{Re^2(Z_L) + \left(Im(Z_L) - ۴\right)^2}}\,۱۰۰$$

$$\begin{cases} Re^2(Z_L) + \left(Im(Z_L) - ۸\right)^2 = ۲۵ \\ Re^2(Z_L) + \left(Im(Z_L) - ۴\right)^2 = ۹ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Re(Z_L) = ۳ \\ Im(Z_L) = ۴ \end{cases} \rightarrow \quad Z_L = ۳ + j۴$$

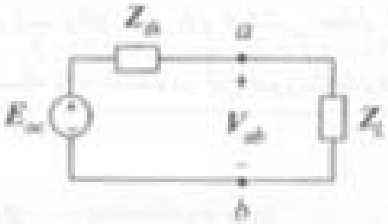
مسئله ۴۵

۱) امپدانس دو سر a و b چیست.

Z_L	∞	۳	۱۲
$V_{ab(rms)}$	۱۳	۳	۹/۱

شکل مسئله ۴۵

حل: فرض کنید که E_{oc} و Z_{th} به ترتیب ولتاژ مدار باز و امپدانس معادل تونن مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان باشند. امپدانس دیده شده از دوسر a و b برابر امپدانس معادل تونن Z_{th} می باشد که در ادامه آن را محاسبه خواهیم کرد.



با استفاده از عبارت بدست آمده برای $|V_{ab}|$ در مسئله قبل داریم.

$$V_{ab(rms)} = \frac{|V_{ab}|}{\sqrt{۲}} = \sqrt{\frac{Re^2(Z_L) + Im^2(Z_L)}{\left[Re(Z_{th}) + Re(Z_L)\right]^2 + \left[Im(Z_{th}) + Im(Z_L)\right]^2}}\,\frac{|E_{oc}|}{\sqrt{۲}}$$

$$\begin{cases} V_{ab(rms)} = ۱۳ \\ Z_L = \infty \end{cases} \rightarrow \quad ۱۳ = \frac{|E_{oc}|}{\sqrt{۲}}$$

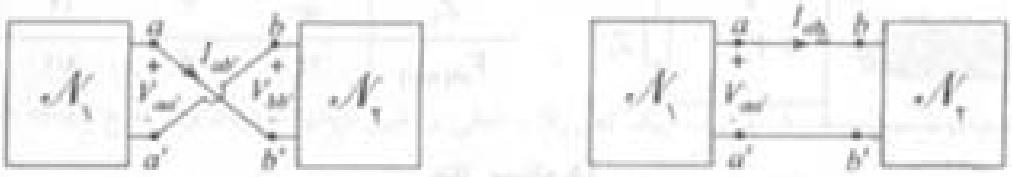
$$\begin{cases} V_{ab(rms)} = ۳ \\ Z_L = ۲ \end{cases} \rightarrow \quad ۳ = \frac{۲}{\sqrt{\left(\mathrm{Re}(Z_{th})+۲\right)^۲ + \mathrm{Im}^۲(Z_{th})}}\,۱۳$$

$$\begin{cases} V_{ab(rms)} = ۹/۱ \\ Z_L = ۱۲ \end{cases} \rightarrow \quad ۹/۱ = \frac{۱۲}{\sqrt{\left(\mathrm{Re}(Z_{th})+۲\right)^۲ + \mathrm{Im}^۲(Z_{th})}}\,۱۳$$

$$\begin{cases} \left(\mathrm{Re}(Z_{th})+۲\right)^۲ + \mathrm{Im}^۲(Z_{th}) = ۱۶۹ \\ \left(\mathrm{Re}(Z_{th})+۱۲\right)^۲ + \mathrm{Im}^۲(Z_{th}) = ۲۰۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(Z_{th}) = ۲ \\ \mathrm{Im}(Z_{th}) = ۱۲ \end{cases} \rightarrow \quad Z_{th} = ۲ + j۱۲$$

مسئله ۴۶

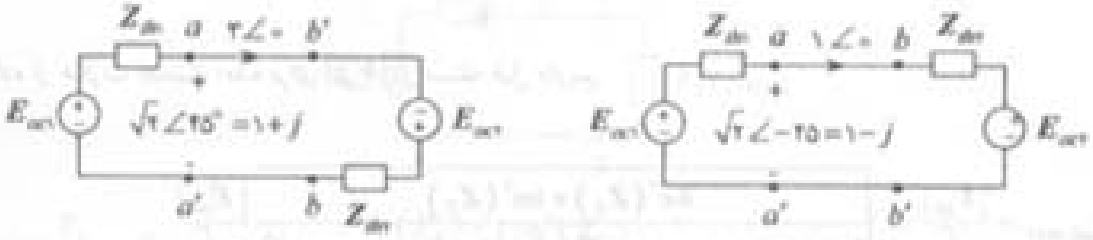
مدارهای معادل تونن شبکه های $N_۱$ و $N_۲$ را بدست آورید.



(الف) $I_{ab} = ۱\angle ۰$ ، $V_{oc} = \sqrt{۲}\angle -۴۵^\circ$ (ب) $I_{ab} = ۳\angle ۰$ ، $V_{oc} = \sqrt{۲}\angle -۴۵^\circ$

شکل مسئله ۴۶

حل : فرض کنیم که $E_{oc۱}$ و $Z_{th۱}$ به ترتیب ولتاژ مدار باز و امپدانس معادل تونن شبکه $N_۱$ و $E_{oc۲}$ و $Z_{th۲}$ به ترتیب ولتاژ مدار باز و امپدانس معادل تونن شبکه $N_۲$ باشند. در این صورت مدارهای (الف) و(ب) را می توان بصورت زیر رسم کرد.



(الف) (ب)

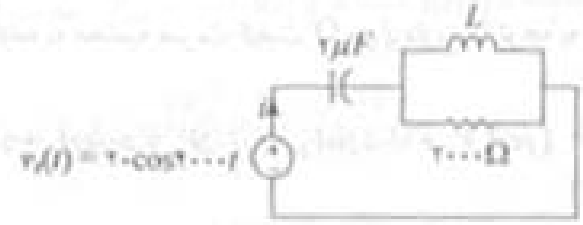
با توجه به شکلهای (الف) و (ب) داریم

$$\begin{cases} \text{شکل الف} \rightarrow & -E_{oc1}+Z_{th}+1-j=0 \\ \text{شکل ب} \rightarrow & -E_{oc1}+2Z_{th}+1+j=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E_{oc1}=1-j2=\sqrt{5}\angle -63.4^\circ \\ Z_{th}=-j \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{شکل الف} \rightarrow & -(1-j)+Z_{th2}+E_{oc2}=0 \\ \text{شکل ب} \rightarrow & -(1+j)-E_{oc2}+2Z_{th2}=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E_{oc2}=0.5-j=0.112\angle -63.4^\circ \\ Z_{th2}=0.5 \end{cases}$$

مسئله ۴۷

L را چنان تعیین کنید که v_s و i هم فاز باشند.



شکل مسئله ۴۷

حل: با توجه به شکل مسئله و در حالت دایمی سینوسی و با توجه به اینکه $\omega=2000$ می باشد داریم

$$Z_{eq}=\left[\frac{1}{j0.1\times 10^{-3}}+\left(j2000L \parallel 2000\right)\right]V_s=\frac{8000L}{1+2L}+j\left(\frac{-500L^2+2000L-125}{1+2L}\right)$$

$$I=\frac{V_s}{Z_{eq}}=\frac{|V_s|}{|Z_{eq}|}\angle\left(\angle V_s-\angle Z_{eq}\right)$$

شرط اینکه I همفاز V_s باشد این است که $\angle Z_{eq}=0$ باشد و این یعنی اینکه Z_{eq} اهمی خالص باشد و یا اینکه قسمت موهومی آن برابر صفر شود.

$$\operatorname{Im}(Z_{eq})=0 \rightarrow -500L^2+2000L-125=0 \rightarrow L=7.97H \;,\; 31.37(mH)$$

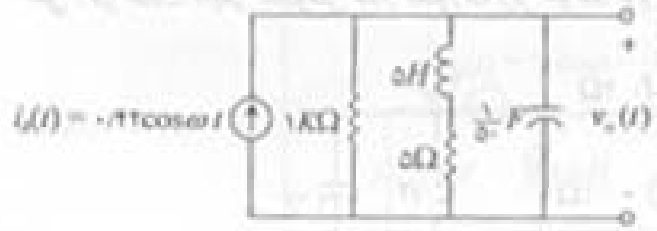
مسئله ۴۸

فرکانس تشدید ω_0 مدار چیست.

دامنه ولتاژ $v_o(t)$ در این فرکانس چقدر است.

$Q=?$

پهنای باند مدار را تعیین کنید.



شکل مسئله ۴۸

حل : ابتدا ادمیتانس دیده شده از دو سرچشمه جریان را محاسبه می کنیم.

$$Y(j\omega)=\frac{1}{1000}+\frac{1}{5+j5\omega}+\frac{j\omega}{50}=\frac{201+\omega^2}{1000\left(1+\omega^2\right)}+j\frac{\omega\left(2\omega^2-180\right)}{1000\left(1+\omega^2\right)}$$

$$\operatorname{Im}\{Y(j\omega_0)\}=0 \quad\rightarrow\quad 2\omega_0^2-180=0 \quad\rightarrow\quad \omega_0=3\left(\frac{rad}{sec}\right)$$

دامنه ولتاژ خروجی به ازای $\omega_0=3$ بصورت زیر بدست می آید.

$$V_o(j3)=\frac{I(j3)}{Y(j3)}=\frac{0/22}{\left[\frac{201+3^2}{1000\left(1+3^2\right)}+j0\right]}=40 \quad\rightarrow\quad \left|V_o(j3)\right|=20\,V$$

در ادامه به محاسبه ضریب کیفیت Q می پردازیم. با توجه به شکل مسئله داریم.

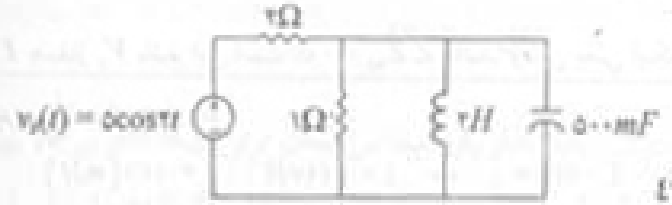
$$KCL \quad\rightarrow\quad \frac{V_o}{\frac{50}{j\omega}}+\frac{V_o}{5+j5\omega}+\frac{V_o}{1000}=I_s \quad\rightarrow\quad (j\omega)^2V_o+10/05j\omega V_o+101/05V_o=50j\omega I_s+50I_s$$

$$2\alpha=10/05 \quad\rightarrow\quad Q=\frac{\omega_0}{2\alpha}=\frac{3}{10/05}=2/86 \quad , \quad \Delta\omega=\frac{\omega_0}{Q}=\frac{3}{2/86}=1/05$$

مسئله ۴۹

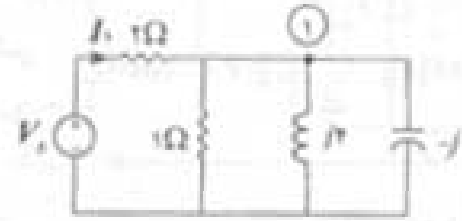
توان متوسط تحویل داده شده به هر عنصر را تعیین کنید.

نشان دهید که توان متوسط تحویل داده شده توسط منبع برابرمجموع توانهای متوسط در یافت شده توسط عناصر دیگر می باشد.



شکل مسئله ۴۹

حل : در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود.



KCL برای گره ① $\rightarrow \frac{V_1-5}{2}+\frac{V_1}{1}+\frac{V_1}{j2}+\frac{V_1}{-j}=0 \rightarrow V_1=\frac{2}{3}-j\frac{2}{3} \rightarrow |V_1|=\frac{20}{9}$

$$I_1=\frac{5-\left(\frac{2}{3}-j\frac{2}{3}\right)}{2}=\frac{11}{6}+j\frac{2}{6} \rightarrow |I_1|=\frac{125}{36}$$

بنابراین توانهای متوسط تحویل داده شده به عناصر بصورت زیر بدست خواهند آمد.

مقاومت 2Ω : $P_{av1}=\frac{|I_1|}{2}\mathrm{Re}\{2\}=\frac{|I_1|}{2}\mathrm{Re}(2)=|I_1|=\frac{125}{36}\ W$

مقاومت 1Ω : $P_{av2}=\frac{|V_1|}{2}\mathrm{Re}\{1\}=\frac{|V_1|}{2}\mathrm{Re}(1)=\frac{|V_1|}{2}=\frac{20}{18}\ W$

خازن $2H$: $P_{av3}=\frac{|V_1|}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{j2}\right\}=\frac{|V_1|}{2}(0)=0$

خازن $500mF$: $P_{av4}=\frac{|V_1|}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{-j}\right\}=\frac{|V_1|}{2}(0)=0$

توان ظاهری تحویل داده شده توسط منبع V_s برابر است با:

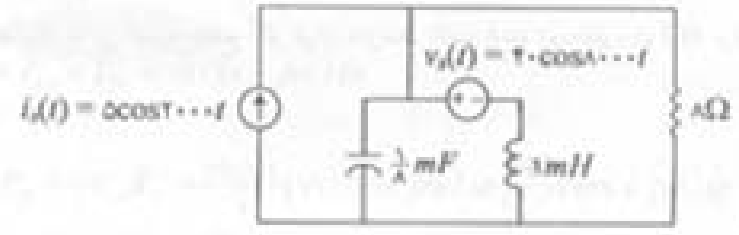
$$S=\frac{1}{2}V_s(I_1)=\frac{5}{2}\left(\frac{11}{6}-j\frac{2}{6}\right)=\frac{55}{12}-j\frac{5}{6} \rightarrow P_{av}=\frac{55}{12}\ W$$

واضح است که توان متوسط تحویل داده شده توسط منبع برابر مجموع توان های متوسط دریافت شده توسط عناصر دیگر می باشد، زیرا

$$P_{av1}+P_{av2}+P_{av3}+P_{av4}=\frac{125}{36}+\frac{20}{18}+0+0=\frac{55}{12}=P_{av}$$

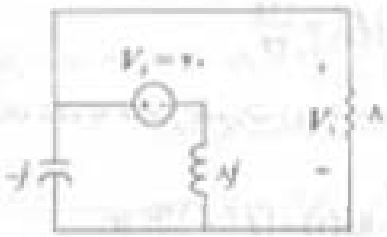
مسئله ۵۰

توان متوسط تلف شده توسط مقاومت 8Ω را تعیین کنید.



شکل مسئله ۵۰

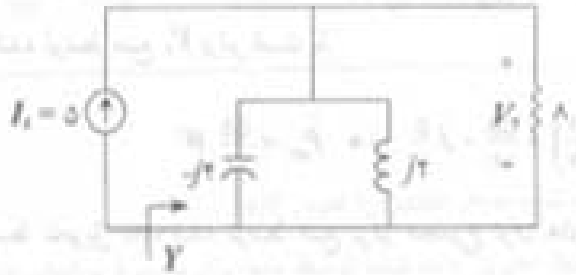
حل : از آنجا که فرکانس زاویه ای منابع متفاوت است لذا اثر هر یک را به تنهایی بررسی خواهیم کرد. با فرض $V_s = ۲۰$، $\omega = ۸۰۰۰$ و $I_s = ۰$ مدار بصورت زیر خواهد شد.



$$V_1 = \frac{-j۲۸}{-j۲۸ + ۸j}۲۰ = \frac{-j۲۲۰}{۸ + ۲۲j} \rightarrow |V_1| = \frac{۲۲۰}{\sqrt{۸^۲ + ۲۲^۲}} = ۵/۶۶ \quad , \quad Y = \frac{۱}{۸}$$

$$\rightarrow P_{av_1} = \frac{|V_1|^۲}{۲}\mathrm{Re}\{Y\} = \frac{(۵/۶۶)^۲}{۲}\left(\frac{۱}{۸}\right) = ۲\ W$$

حال فرض می کنیم $I_s = ۵$، $\omega = ۲۰۰۰$ و $V_s = ۰$ باشند، که در این صورت مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$Y = \frac{۱}{-j۲} + \frac{۱}{j۲} + \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۸} - j\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۸}(۱ - j۲)$$

$$\rightarrow V_2 = \frac{I_s}{Y} = \frac{۵}{۱ - j۲} = \frac{۲۰}{۱ - j۲} \rightarrow |V_2| = \frac{۲۰}{\sqrt{۵}} = ۱۷/۸۹$$

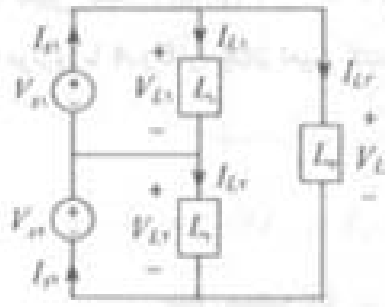
$$\rightarrow P_{av_2} = \frac{|V_2|^۲}{۲}\mathrm{Re}\{Y\} = \frac{(۱۷/۸۹)^۲}{۲}\left(\frac{۱}{۸}\right) = ۲۰\ W$$

در نهایت بنا بر قضیه جمع آثار توان متوسط تلف شده در مقاومت ۸Ω برابر خواهد شد با:

$$P_{av} = P_{av_1} + P_{av_2} = ۲ + ۲۰ = ۲۲\ W$$

مسئله ۵۱

$P_{L_1} = ۷/۵ + j۲/۵KVA$ و $\cos\phi_{L_1} = ۰/۲۸$ ، $|P_{L_2}| = ۱۰\ KVA$ و L_w یک مقاومت ۱۲/۵Ω موازی با راکتانس ۵۰Ω می باشد. توان مختلطی که هر منبع تحویل می دهد چیست. V_{s1} و V_{s2} هر یک دارای فازور $۲۵۰\angle ۰$ موثر می باشند.



شکل مسئله ۵۱

حل : با توجه به شکل مسئله داریم

$$V_{L_1} = V_{s1} = ۲۵۰(rms) = ۲۵۰\sqrt{۲} \quad , \quad P_{L_1} = \frac{۱}{۲}V_{L_1}\bar{I}_{L_1}$$

$$\rightarrow \bar{I}_{L_1} = ۲\frac{P_{L_1}}{V_{L_1}} = \frac{۲(۷/۵ + j۲/۵)\times ۱۰^۳}{۲۵۰\sqrt{۲}} = ۴۲/۴۴ + j۱۴/۱۴$$

$$\cos\phi_{L_2} = ۰/۲۸\ (\text{پسفاز}) \rightarrow P_{L_2} = ۱۰\angle\cos^{-1}۰/۲۸ = ۱۰\angle ۷۳/۷^\circ = ۲/۸ + j۹/۶\ KVA$$

$$V_{L_2} = V_{s1} = ۲۵۰(rms) = ۲۵۰\sqrt{۲} \rightarrow I_{L_2} = ۲\frac{P_{L_2}}{V_{L_2}} = \frac{۲(۲/۸ + j۹/۶)\times ۱۰}{۲۵۰\sqrt{۲}} = ۱۵/۸۸ + j۵۴/۴۴$$

$$V_{L_3} = V_{s1} + V_{s2} = ۵۰۰\sqrt{۲} \rightarrow I_{L_3} = V_{L_3}Y_{L_3} = ۵۰۰\sqrt{۲}\left(\frac{۱}{۱۲/۵} + \frac{۱}{j۵۰}\right) = ۵۶/۴ - j۱۴/۱$$

$$\bar{I}_{s1} = \bar{I}_{L_1} + \bar{I}_{L_3} = ۹۸/۸۴ + j۲۸/۲۲$$

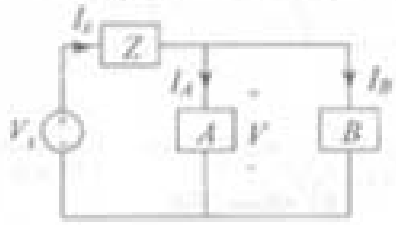
$$\rightarrow P_{s1} = \frac{۱}{۲}V_{s1}\bar{I}_{s1} = \frac{۲۵۰\sqrt{۲}}{۲}(۹۸/۸۴ + j۲۸/۲۲) = ۱۷۴۲۰ + j۲۹۷۳$$

$$\bar{I}_{s2} = \bar{I}_{L_2} + \bar{I}_{L_3} = ۷۲/۲۸ + j۶۸/۵۶$$

$$\rightarrow P_{s2} = \frac{۱}{۲}V_{s2}\bar{I}_{s2} = \frac{۲۵۰\sqrt{۲}}{۲}(۷۲/۲۸ + j۶۸/۵۶) = ۱۲۷۳۹ + j۱۲۰۸۳$$

مسئله ۵۲

- بار A القایی و توان $10KVA$ با ضریب توان ۰/۶ مصرف می کند.
- بار B خازنی و توان $5KVA$ با ضریب توان ۰/۸ مصرف می کند.
- V_s را تعیین کنید. $V = 100\ V(RMS)$ و $Z = 0.1 + j0.1$
- بار C موازی با A و B را چنان تعیین کنید که ضریب توان کل را برابر واحد کند.



شکل مسئله ۵۲

حل : با توجه به شکل و داده های مسئله داریم

$$\cos\varphi_A = 0.6(\text{پسفاز}) \rightarrow P_A = 10\angle\cos^{-1}0.6 = 10\angle 53.1^\circ = 6 + j8\ KVA$$

$$\cos\varphi_B = 0.8(\text{پیشفاز}) \rightarrow P_B = 10\angle\cos^{-1}0.8 = 10\angle -36.9^\circ = 4 - j3\ KVA$$

می دانیم که $P = \frac{1}{2}VI$ بنابراین $I = \frac{2P}{V}$ بوده و خواهیم داشت

$$I_s = I_A + I_B = \frac{2P_A}{V} + \frac{2P_B}{V} = \frac{2(P_A + P_B)}{V} = \frac{2(10 + j5)\times 10^3}{100\sqrt{2}} = 121.8 + j70.9\ A$$

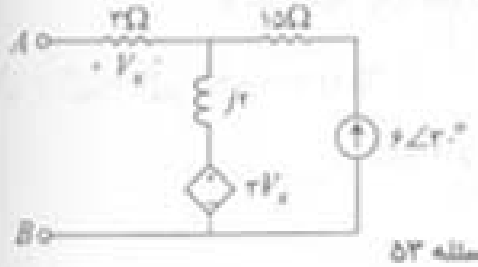
$$V_s = ZI_s + V = (0.1 + j0.1)(121.8 - j70.9) + 100\sqrt{2} = 162.67 + j7.09$$

توان کل دریافتی بارها و یا توان تحویلی منبع ولتاژ برابر است با :

$$P_s = \frac{1}{2}V_sI_s = \frac{1}{2}(162.67 + j7.09)(121.8 + j70.9) = 11508 + j1079$$

برای اینکه ضرایب توان برابر یک شود باید با یک خازنی با توان راکتیو منفی برابر $-1079\ VAR$ موازی کنیم تا قسمت موهومی P_s برابر صفر شده و ضریب توان کل برابر واحد گردد.

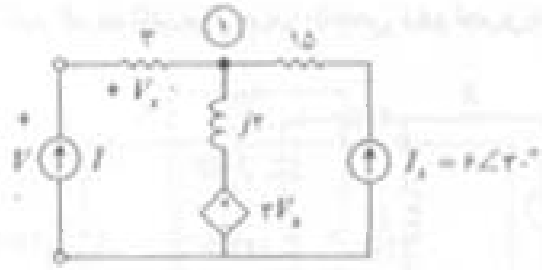
مسئله ۵۳



شکل مسئله ۵۳

- چه امپدانسی باید در سرهای A و B قرار داد تا بیشترین توان متوسط به آن منتقل گردد.
- حداکثر توان دریافتی این امپدانس چقدر است.

حل : ابتدا معادل تونن دو سر A و B را بدست می آوریم. بدین منظور منبع جریان آزمایشی I را به دو سر A و B وصل کرده و ولتاژ دو سر آن را محاسبه می کنیم.

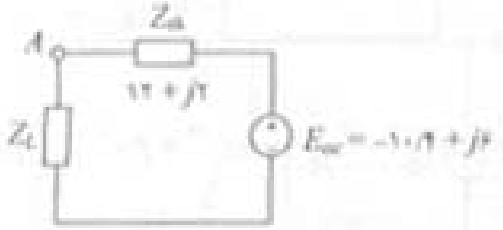


$$V_x = ۳I \quad , \quad V_1 = V - V_x = V - ۳I \quad , \quad I_s = ۶\angle ۳۰^\circ = ۳ + j۵/۲$$

$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow \quad -I + \frac{(V - ۳I) - ۳(۳I)}{j۲} - (۳ + j۵/۲) = ۰$$

$$\rightarrow \quad V = (۱۲ + j۲)I - ۱۰/۲ + j۶$$

با در نظر گرفتن مدار معادل تونن و امپدانس بار Z_L برای دو سر A و B مدار بصورت زیر خواهد شد.



شرط انتقال توان ماکزیمم به Z_L عبارتست از:

$$Z_L = \bar{Z}_{th} \quad \rightarrow \quad Z_L = ۱۲ - j۲$$

و مقدار توان متوسط ماکزیمم برابر خواهد شد با:

$$\max P_{av} = \frac{۱}{۲}|I_L|^۲ \operatorname{Re}\{Z_L\} = \frac{۱}{۲}\left|\frac{E_{oc}}{Z_L + Z_{th}}\right|^۲ \operatorname{Re}\{Z_L\} = \frac{۱}{۲}\left|\frac{-۱۰/۲ + j۶}{(۱۲ - j۲) + (۱۲ + j۲)}\right|^۲ \operatorname{Re}\{۱۲ - j۲\}$$

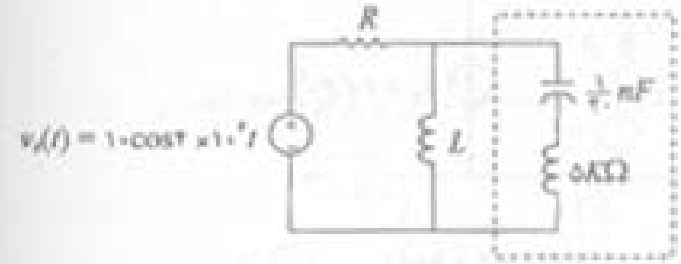
$$= ۱/۵\ W$$

روش ساده تر این است که از رابطه زیر استفاده کنیم.

$$\max P_{av} = \frac{|E_{oc}|^۲}{۸R_L} = \frac{|۱۲|^۲}{۸(۱۲)} = ۱/۵\ W$$

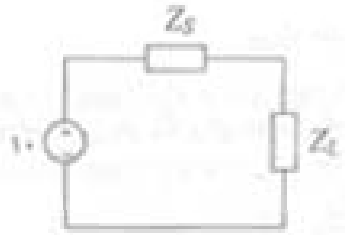
مسئله ۵۳

R و L را چنان تعیین کنید که حداکثر توان به بار مشخص شده تحویل داده شود.



شکل مسئله ۵۴

حل : در حالت دایمی سینوسی و با در نظر گرفتن $\omega = 2\times10^3$ مدار را می توان بصورت زیر در نظر گرفت.



که در آن

$$Y_L = \frac{1}{5\times10^3 + \frac{1}{j2\times10^3\times\frac{1}{4}\times10^{-3}}} = \frac{1}{5000 - j5000} = 10^{-4} + j10^{-4}$$

$$Y_S = \frac{1}{R} + \frac{1}{j2\times10^3 L} = \frac{1}{R} - \frac{j}{2\times10^3 L}$$

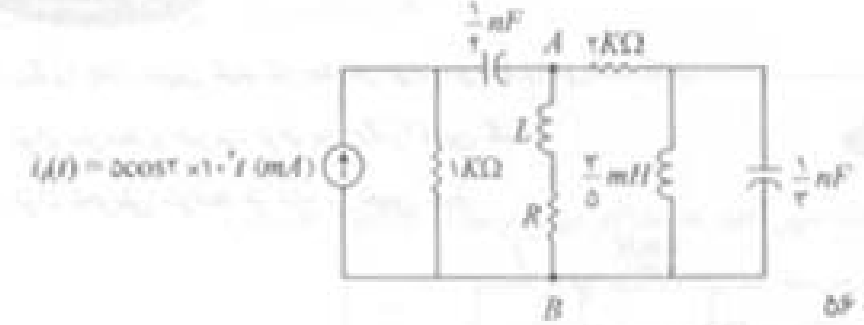
شرط انتقال توان ماکزیمم به بار Z_L عبارتست از:

$$Z_L = \bar{Z}_S \rightarrow Y_L = \bar{Y}_S \rightarrow \frac{1}{R} - j\frac{1}{2\times10^3 L} = 10^{-4} - j10^{-4}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{1}{R} = 10^{-4} & \rightarrow R = 10\,K\Omega \\ \frac{1}{2\times10^3 L} = 10^{-4} & \rightarrow L = 2/5\,mH \end{cases}$$

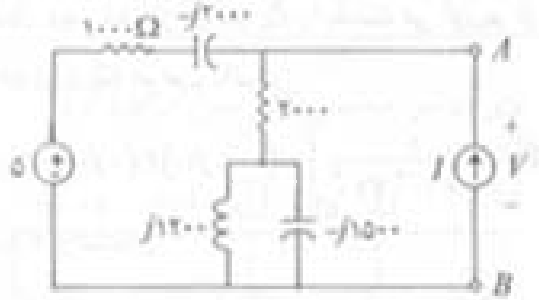
مسئله ۵۶

R و L را چنان تعیین کنید که بیشترین توان توسط R جذب شود.



شکل مسئله ۵۶

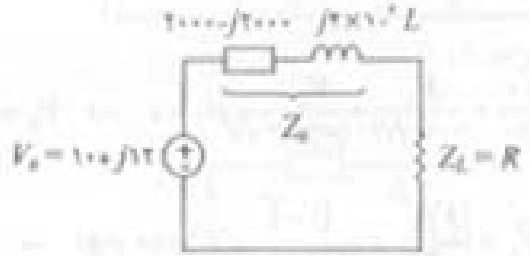
حل: ابتدا معادل تونن دو سر A و B را بدست می آوریم. بدین منظور منبع جریان I را به دو سر A و B وصل کرده و ولتاژ دو سر آن را تعیین می کنیم. با فرض اینکه مدار در حالت دایمی سینوسی است و اینکه $\omega = 2\times10^{3}$ و با استفاده از تبدیل تونن- نرتن مدار را می توان بصورت زیر رسم کرد.



KVL برای گره A $\rightarrow$ $\dfrac{V-5}{1000-j2000} + \dfrac{V}{2000+(j1200)\|(-j1500)} - I = 0$

$$\rightarrow V = (2000 - j2000)I + 10 + j12$$

بنابراین مدار داده شده را می توان بصورت زیر رسم کرد.

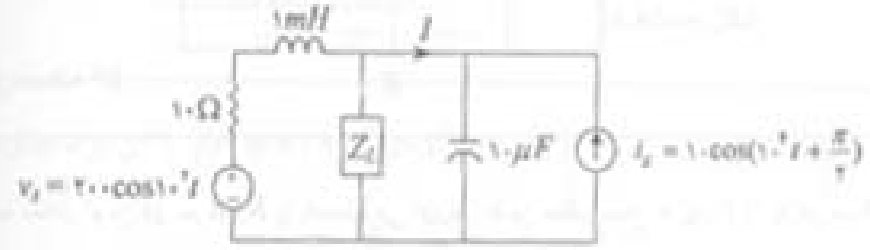


شرط اینکه بیشترین توان توسط مقاومت R جذب شود عبارتست از :

$$Z_L = Z_s \rightarrow R = 2000 + j\left(2000 - 2\times10^{3} L\right) \rightarrow \begin{cases} R = 2000 = 2K\Omega \\ 2000 - 2\times10^{3} L = 0 \rightarrow L = 1\,mH \end{cases}$$

مسئله ۵۷

- Z_L را چنان تعیین کنید که حداکثر توان متوسط را دریافت کند.
- توان متوسط و ضریب توان بار Z_L را تعیین کنید.
- توان تحویلی متوسط هر منبع را تعیین کنید.



شکل مسئله ۵۷

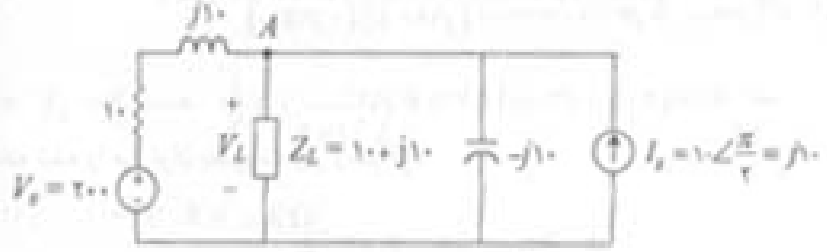
حل : ابتدا امپدانس معادل دیده شده از دو سر Z_L را بدست می آوریم. از آنجا که فرکانس زاویه ای هر دو منبع یکسان و برابر $\omega = 10^{3}$ است لذا خواهیم داشت:

$$Z_s = \left(10 + j1\times10^{-3}\times10^{3}\right) \mathrm{P} \left(\frac{1}{j10\times10^{-6}\times10^{3}}\right) = (10 + j10)\mathrm{P}(-j10) = 10 - j10$$

شرط انتقال توان ماکزیمم به Z_L عبارتست از:

$$Z_L = Z_s = 10 + j10$$

با انتصاب Z_L بدست آمده مدار بصورت زیر خواهد شد.



$$KCL \text{ برای گره } A \rightarrow \frac{V_L - 200}{10 + j10} + \frac{V_L}{10 + j10} + \frac{V_L}{-j10} - j10 = 0 \rightarrow V_L = 100$$

$$\rightarrow P_L = \frac{1}{2} I_L \bar{V}_L = \frac{1}{2}\frac{V_L}{Z_L}\bar{V}_L = \frac{|V_L|^2}{2Z_L} = \frac{(100)^2}{2(10 + j10)} = 2500 - j2500 \rightarrow \max P_{Load} = 2500\,W$$

و ضریب توان بار Z_L عبارتست از:

$$\cos\varphi_L = \cos\left(\tan^{-1}\frac{۲۵۰}{۲۵۰}\right) = \cos ۴۵^\circ = ۰/۷۰۵$$

در ادامه به محاسبه توان تحویلی متوسط منابع می پردازیم.

$$P_{I(av)} = \frac{۱}{۲}V_L I_L = \frac{۱}{۲}(۱۰۰)(-j۱۰) = -۵۰۰j \quad \rightarrow \quad P_{I(av)} = ۰$$

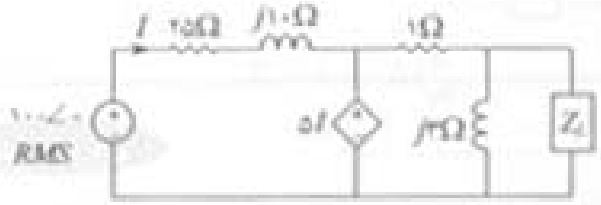
$$P_{V(av)} = P_{I(av)} - P_{I(av)} = ۲۵۰ - ۰ = ۲۵۰\ W$$

مسئله ۵۸

الف ـ Z_L را چنان تعیین کنید که حداکثر توان متوسط به آن انتقال داده شود.

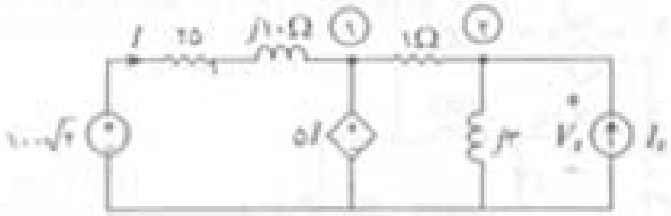
ب ـ مقدار توان متوسط انتقال داده شده چقدر است.

پ ـ چند درصد از توان تولید شده به Z_L انتقال داده می شود.



شکل مسئله ۵۸

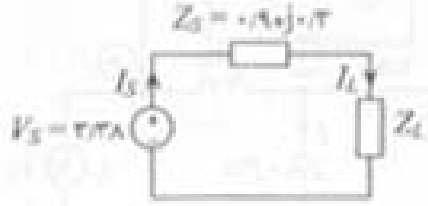
حل : الف ـ ابتدا معادل تونن دو سر امپدانس Z_L را تعیین خواهیم کرد.



$$I = \frac{۱۰۰\sqrt{۲} - V_x}{۲۵ + j۱۰} \quad \rightarrow \quad I = \frac{۱۰۰\sqrt{۲} - ۵I}{۲۵ + j۱۰} \quad \rightarrow \quad I = ۲/۲۳ - j۱/۲۱$$

KCL برای گره ۲ $\rightarrow$ $\dfrac{V_x - (۲/۲۳ - j۱/۲۱)}{۱} + \dfrac{V_x}{j۳} - I_x = ۰ \quad \rightarrow \quad V_x = (۰/۹ + j۰/۳)I_x + ۲/۲۸$

بنابراین مدار بصورت زیر ساده خواهد شد.



شرط انتقال توان ماکزیمم عبارتست از :

$$Z_L = \bar{Z}_s \quad \rightarrow \quad Z_L = ۰/۹ - j۰/۳\ \Omega$$

ب ـ توان انتقالی ماکزیمم را بصورت زیر بدست می آوریم. توجه کنید که مقادیر بصورت موثر داده شده اند لذا در محاسبه توان متوسط ضریب $\frac{1}{2}$ را منظور نخواهیم کرد.

$$I_s = I_L = \frac{V_s}{Z_s + Z_L} = \frac{۳/۲۸}{۱/۸} = ۱/۸۸\ A$$

$$\rightarrow \max P_{L(av)} = |I_L|^2 \operatorname{Re}\{Z_L\} = (۱/۸۸)^2 (۰/۹) = ۳/۱۸\ W$$

پ ـ توان تولید شده برابر است با:

$$P_s = V_s I_s = (۳/۲۸)(۱/۸۸) = ۶/۲۶\ W$$

بنابراین درصد توان انتقالی برابر خواهد شد با:

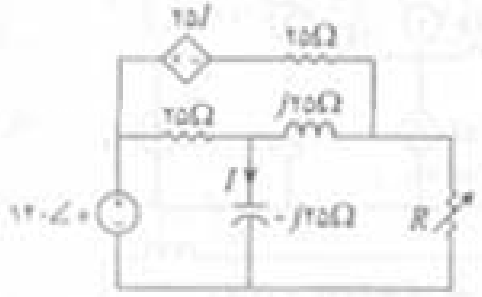
$$\frac{\max P_{L(av)}}{P_s} \times ۱۰۰ = \frac{۳/۱۸}{۶/۲۶} \times ۱۰۰ = ۵۰\%$$

مسئله ۵۹

الف ـ مقدار R را برای انتقال حداکثر توان متوسط به آن تعیین کنید.

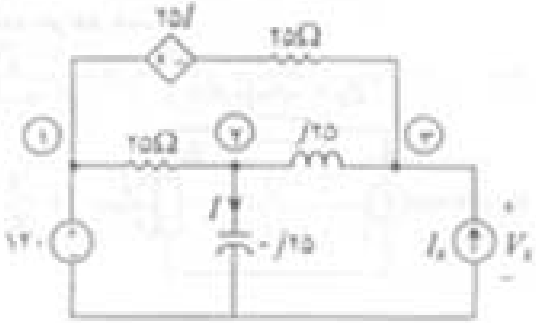
ب ـ توان متوسط تحویل داده شده به R را تعیین کنید.

پ ـ اگر R با یک امپدانس متغیر جایگزین شود حداکثر توان تحویل داده شده به آن چقدر



شکل مسئله ۵۹

حل : الف ـ ابتدا معادل تونن دیده شده از دو سر R را تعیین می کنیم.



$$V_1 = 120 \;,\; V_2 = V_x \;,\; I = \frac{V_1}{-j25} = \frac{jV_1}{25}$$

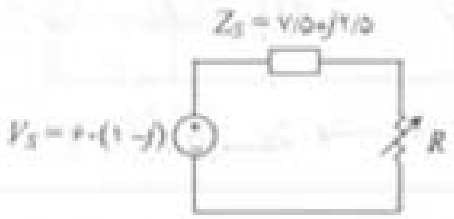
KCL برای گره ② $\rightarrow \dfrac{V_1 - 120}{25} + \dfrac{V_1}{-j25} + \dfrac{V_1 - V_x}{j25} = 0 \;\rightarrow\; V_1 = 120 - jV_x$

KCL برای گره ③ $\rightarrow \dfrac{V_2 - V_x}{j25} + \dfrac{V_2 - (120 - 25I)}{25} - I_x = 0$

$$\rightarrow \frac{V_x - (120 - jV_x)}{j25} + \frac{V_x - \left(120 - 25\left(\frac{j}{25}(120 - jV_x)\right)\right)}{25} - I_x = 0$$

$$\rightarrow V_x = (7/5 + j2/5)I_x + 60(1 - j)$$

بنابراین مدار بصورت زیر خواهد بود.



توان متوسط انتقالی به مقاومت R برابر است با:

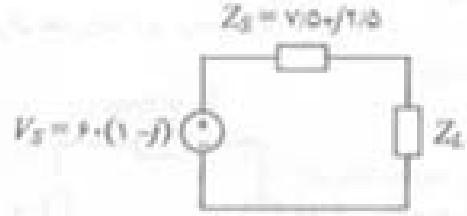
$$P_{av} = \frac{1}{2}|I_R|^2 \cdot R = \frac{1}{2}\left|\frac{60(1-j)}{(7/5 + R) + j2/5}\right|^2 \cdot R = \frac{3600R}{R^2 + 15R + 62/5}$$

$$\frac{dP_{av}}{dR} = 0 \;\rightarrow\; \frac{3600\left(R^2 + 15R + 62/5\right) - 3600R(2R + 15)}{\left(R^2 + 15R + 62/5\right)^2} = 0 \;\rightarrow\; R = 7/9\,\Omega$$

به ازا جایگذاری R بدست آمده در P_{av} داریم.

$$\max P_{av} = \frac{3600(7/9)}{(7/9)^2 + 15(7/9) + 62/5} = 116/82\ W$$

به ازا جایگزینی امپدانس Z_L بجای R مدار بصورت زیر تغییر خواهد کرد.



شرط انتقال توان متوسط ماکزیمم عبارتست از:

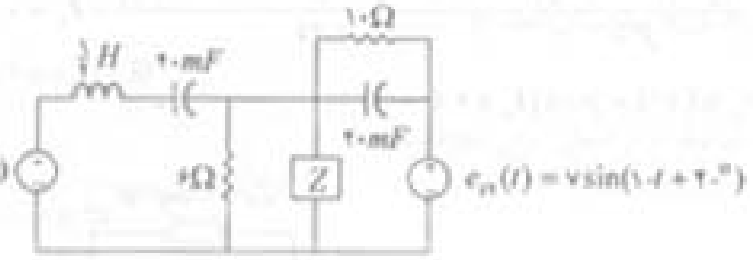
$$Z_L = \bar{Z}_S \;\rightarrow\; Z_L = 7/5 - j2/5$$

و توان متوسط ماکزیمم برابر خواهد شد با:

$$\max P_{L(av)} = \frac{|V_S|^2}{8R_L} = \frac{|60\sqrt{2}|^2}{8(7/5)} = 120\ W$$

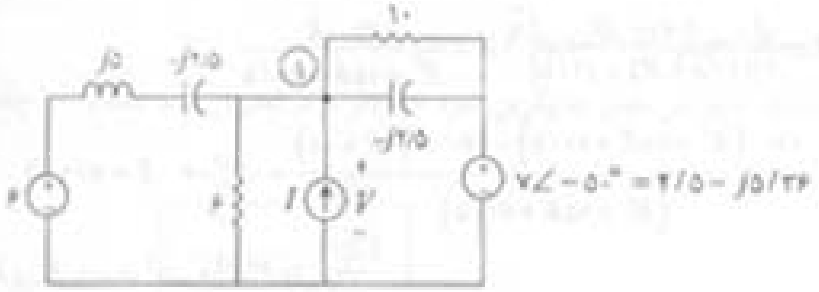
مسئله ۶۰

Z را چنان تعیین کنید که حداکثر توان متوسط به آن انتقال داده شود. مقدار این توان چیست.



شکل مسئله ۶۰

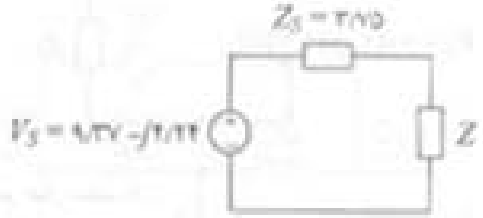
حل: ابتدا معادل تونن دو سر امپدانس Z را محاسبه می کنیم.



$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow \frac{V-6}{j5-j2.5} + \frac{V}{6} + \frac{V-(4.5-j5.36)}{10} + \frac{V-(4.5-j5.36)}{-j2.5} - I = 0$$

$$\rightarrow V = 2.75I + 9.73 - j2.22$$

بنابراین مدار شکل مسئله را می توان بصورت زیر رسم کرد.



شرط انتقال توان ماکزیمم عبارتست از:

$$Z = \bar{Z}_S \rightarrow Z = ۳/۷۵$$

بنابراین حداکثر توان متوسط انتقالی بصورت زیر بدست خواهد آمد.

$$\max P_{L(av)} = \frac{|V_S|^2}{8R_L} = \frac{۶/۳۷^2 + ۲/۲۲^2}{8(۳/۷۵)} = ۷/۰۶\ W$$

مسئله ۶۱

وقتی باری به a و b وصل نشود، (موثر) $V_{ab} = ۲۲۰\angle ۰$ و وقتی بار $۸۰ - j۶۰$ به a و b وصل شود، (موثر) $V'_{ab} = ۱۱۵/۲۰ + j۳۳/۶$ است.امپدانسی را پیدا کنید که وقتی به a و b وصل شود حداکثر توان متوسط به آن انتقال یابد.مقدار حداکثر توان متوسط انتقال یافته به این امپدانس را تعیین کنید.

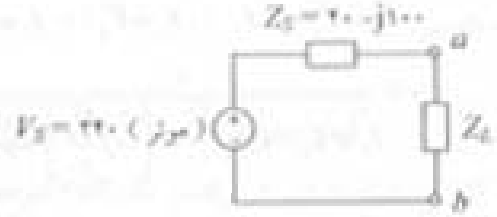
شکل مسئله ۶۱

حل : فرض کنیم که مدار داخل بلوک دارای ولتاژ مدار باز V_S و امپدانس معادل Z_S باشد. با توجه به داده های مسئله داریم.

$$V_S = ۲۲۰\angle ۰\ (\text{موثر})$$

$$V_{ab} = \frac{Z_L}{Z_L + Z_S} V_S \rightarrow ۱۱۵/۲۰ + j۳۳/۶ = \frac{۸۰ - j۶۰}{۸۰ - j۶۰ + Z_S} ۲۲۰ \rightarrow Z_S = ۲۰ - j۱۰۰$$

بنابراین مدار بصورت زیر خواهد بود.



شرط انتقال توان ماکزیمم عبارتست از:

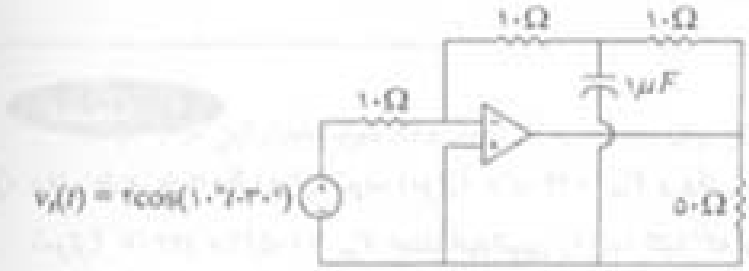
$$Z_L = \bar{Z}_S \rightarrow Z_L = ۲۰ + j۱۰۰$$

و حداکثر توان متوسط انتقالی برابر خواهد شد با :

$$\max P_{L(av)} = I_{rms}^2 \operatorname{Re}(Z_L) = \left| \frac{V_{rms}}{Z_L + Z_S} \right|^2 R_L = \left| \frac{V_{rms}}{۲R_L} \right|^2 R_L = \frac{V_{rms}^2}{۴R_L} = \frac{(۲۲۰)^2}{۴(۲۰)} = ۶۰۵\ W$$

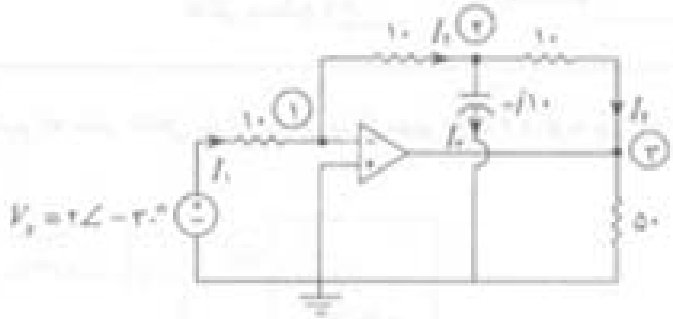
مسئله ۶۲

توان متوسط تحویل داده شده به مقاومت ۵۰Ω چیست.



شکل مسئله ۶۲

حل : با فرض اینکه مدار در حالت دایمی سینوسی است و با توجه به اینکه $\omega = 10^6$ مدار را می توان بصورت زیر رسم کرد.



با فرض ایده آل بودن آپ امپ $V_1 = 0$ و $I_1 = I_2$ بوده و خواهیم داشت.

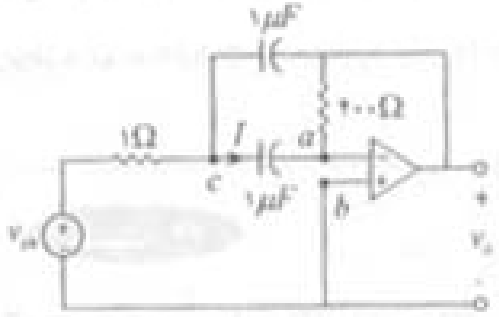
$$\rightarrow\ I_1 = I_2 = \frac{\bar{V}_2 - 0}{10} = \frac{\bar{V}_2}{10} \quad , \quad \bar{V}_3 = \bar{V}_2 - 10 I_1 - 10 I_2 = \bar{V}_2 - 20 I_1 = \bar{V}_2 - 20\left(\frac{\bar{V}_2}{10}\right) = -\bar{V}_2$$

$$I_3 = \frac{\bar{V}_1}{-j10} = \frac{-\bar{V}_2}{-j10} = -j\frac{\bar{V}_2}{10} \quad , \quad I_4 = I_3 - I_2 = \frac{\bar{V}_2}{10} - \left(-j\frac{\bar{V}_2}{10}\right) = \frac{1+j}{10}\bar{V}_2$$

$$\bar{V}_4 = \bar{V}_3 - 10 I_4 = -\bar{V}_2 - 10\left(\frac{1+j}{10}\right)\bar{V}_2 = (-2-j)\bar{V}_2 = \left(\sqrt{5}\angle -26\right)\left(2\angle -30\right) = 2\sqrt{5}\ \angle -56$$

$$\rightarrow\ P_{50} = \frac{|V_4|^2}{2}\,\mathrm{Re}\{Y\} = \frac{\left(2\sqrt{5}\right)^2}{2}\left(\frac{1}{50}\right) = 0/2\ W$$

مسئله ۶۳



شکل مسئله ۶۳

۱) $H(j\omega)=\frac{V_o}{V_{in}}$ را بدست آورید. Q مدار چیست.

۲) رفتار فیلتری مدار و فرکانس قطع آن را تعیین کنید.

حل: با فرض ایده آل بودن آپ امپ، $V_a=V_b=0$ بوده و خواهیم داشت.

$$V_o=-200I \quad , \quad I=\frac{V_c-0}{\frac{1}{10^{-6}\omega}} \rightarrow I=j10^{-6}\omega V_c \rightarrow V_o=(-200)(j10^{-6}\omega V_c)$$

$$\rightarrow V_c=-\frac{2500}{j\omega}V_o$$

$$KCL \text{ برای گره } c \rightarrow \frac{-\frac{2500}{j\omega}V_o-V_{in}}{1}+\frac{-\frac{2500}{j\omega}V_o-0}{\frac{1}{j10^{-6}\omega}}+\frac{-\frac{2500}{j\omega}V_o-V_o}{\frac{1}{j10^{-6}\omega}}=0$$

$$(j\omega)^2V_o+5000j\omega V_o+2500\times10^6V_o=j\omega V_{in}$$

$$\rightarrow H(j\omega)=\frac{V_o}{V_{in}}=\frac{j\omega}{(j\omega)^2+5000j\omega+2500\times10^6}=\frac{j\omega}{(2500\times10^6-\omega^2)+j5000\omega}$$

$$\omega_0^2=2500\times10^6 \rightarrow \omega_0=50\times10^3 \quad , \quad 2\alpha=5000 \rightarrow Q=\frac{\omega_0}{2\alpha}=\frac{50\times10^3}{5000}=10$$

با توجه به $H(j\omega)$ بدست آمده داریم.

$$\lim_{\omega\to+\infty}|H(j\omega)|=\lim_{\omega\to+\infty}\frac{\omega}{\sqrt{(2500\times10^6-\omega^2)+(5000\omega)^2}}=0$$

بنابراین مدار فوق یک فیلتر میان گذر است که دارای دو فرکانس قطع $3dB$ خواهد بود. در ادامه به محاسبه فرکانسهای قطع و پهنای باند $|H(j\omega)|$ خواهیم پرداخت.

$$|H(j\omega)|=\frac{|H(j\omega)|_{max}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{\omega}{\sqrt{(2500\times10^6-\omega^2)^2+(5000\omega)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

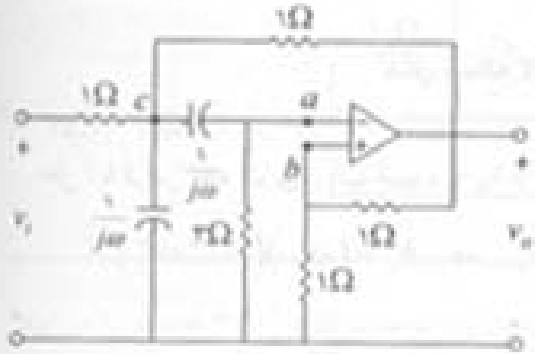
$$\rightarrow \omega_1=47564/5 \ , \ \omega_2=52564/5$$

$$\rightarrow \Delta\omega=\omega_2-\omega_1=52564/5-47564/5=5000$$

روش دوم: پهنای باند را می توان با استفاده از رابطه $\Delta\omega = \frac{Q}{\omega_0} = 2\alpha$ که برای مدارهای درجه دوم و توابع شبکه مربوط به آنها صادق است بدست آورد.

$\Delta\omega = 2\alpha = 5000$

مسئله ۶۴



شکل مسئله ۶۴

- تابع شبکه $H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i}$ را تعیین کنید.
- پاسخ فرکانسی (منحنی های اندازه و فاز) را رسم کنید.
- نوع فیلتری و پهنای باند ۳dB را مشخص کنید.

حل: با فرض ایده آل بودن آپ امپ و با توجه به شکل مسئله $V_a = V_b = \frac{1}{1+1}V_o = \frac{V_o}{2}$ بوده و خواهیم داشت.

$$KCL \text{ برای گره } a \rightarrow \frac{\frac{V_o}{2} - V_c}{\frac{1}{j\omega}} + \frac{\frac{V_o}{2}}{2} = 0 \rightarrow V_c = \left(\frac{1+j2\omega}{j4\omega}\right)V_o$$

$$KCL \text{ برای گره } c \rightarrow \frac{\left(\frac{1+j2\omega}{j4\omega}\right)V_o - V_i}{1} + \frac{\left(\frac{1+j2\omega}{j4\omega}\right)V_o}{\frac{1}{j\omega}} + \frac{\left(\frac{1+j2\omega}{j4\omega}\right)V_o - \frac{V_o}{2}}{\frac{1}{j\omega}} + \frac{\left(\frac{1+j2\omega}{j4\omega}\right)V_o - V_o}{1} = 0$$

$$\rightarrow (j\omega)^2 V_o + 2j\omega V_o + 2V_o = 2j\omega V_i \rightarrow H(j\omega) = \frac{2j\omega}{(j\omega)^2 + 2j\omega + 2} = \frac{2\omega}{2\omega + j(\omega^2 - 2)}$$

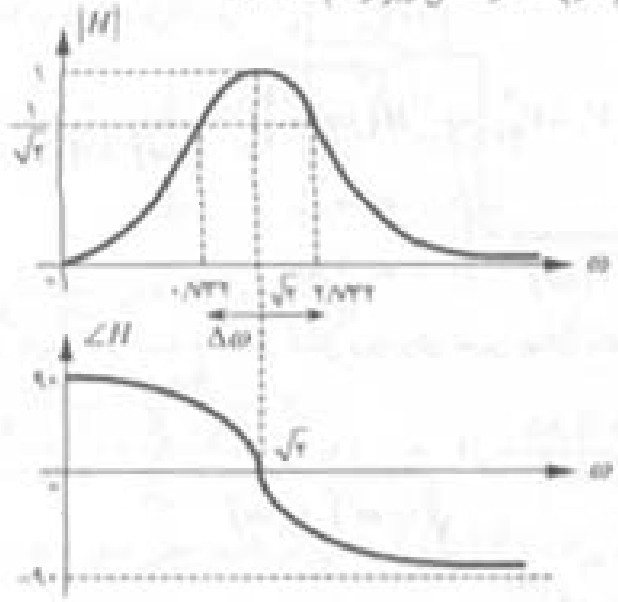
در ادامه به رسم پاسخ فرکانسی خواهیم پرداخت.

$$|H(j\omega)| = \frac{2\omega}{\sqrt{(2\omega)^2 + (\omega^2 - 2)^2}} = \begin{cases} 0 , & \omega \rightarrow 0 \\ 0 , & \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\frac{d|H(j\omega)|}{d\omega} = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{2} \rightarrow Max|H(j\omega)| = 1$$

$$\angle H(j\omega) = \angle(2\omega) - \angle 2\omega + j(\omega^2 - 2) = 0 - \tan^{-1}\frac{\omega^2 - 2}{2\omega} = \begin{cases} 90 & , \ \omega \to 0 \\ 0 & , \ \omega = \sqrt{2} \\ -90 & , \ \omega \to \infty \end{cases}$$

نمودار های اندازه و زاویه $H(j\omega)$ در شکل زیر رسم شده اند.



با توجه به نمودار $|H|$ ملاحظه می شود که مدار همانند یک فیلتر میان گذر عمل می کند. در ادامه به محاسبه پهنای باند ۳dB خواهیم پرداخت. بدین منظور ابتدا فرکانسهای قطع ۳dB را بدست می آوریم.

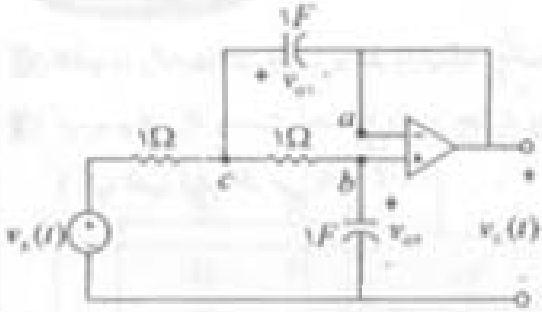
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\max|H(j\omega)| \ \to \ \frac{2\omega}{\sqrt{(2\omega)^2 + (\omega^2 - 2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \to \ \omega = 2.732 \ , \ 0.732$$

$$\to \ \Delta\omega = 2.732 - 0.732 = 2$$

مسئله ۶۵

الف ـ معادله دیفرانسیلی بر حسب v_o بنویسید.

ب ـ تابع شبکه $H(j\omega) = \frac{V_o}{V_s}$ را تعیین و نوع رفتار فیلتری این مدار و پهنای باند ۳dB آن را مشخص کنید.



شکل مسئله ۶۵

حل: الف ـ با فرض ایده آل بودن آپ امپ $v_a = v_b = v_o$ بوده و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$\text{KCL برای گره } b \ \to \ Dv_o + \frac{v_o - v_C}{1} = 0 \ \to \ v_C = (D+1)v_o$$

$$\text{KCL برای گره ⓒ} \rightarrow \frac{(D+1)v_o - v_s}{1} + \frac{(D+1)v_o - v_o}{1} + D\left[(D+1)v_o - v_o\right] = 0$$

$$\rightarrow \left(D^2 + 2D + 1\right)v_o = v_s \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 v_o}{dt^2} + 2\frac{dv_o}{dt} + v_o = v_s$$

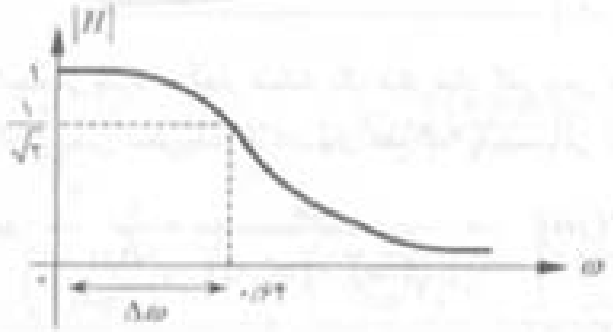
ب ـ با نمایش فازوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$(j\omega)^2 V_o + 2(j\omega)V_o + V_o = V_s \quad \rightarrow \quad H(j\omega) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{1}{(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 1} = \frac{1}{1 - \omega^2 + j2\omega}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + (2\omega)^2}} = \begin{cases} 1 & , \ \omega \to 0 \\ 0 & , \ \omega \to \infty \end{cases}$$

بنابراین مدار فوق یک فیلتر پایین گذر است و مطابق شکل زیر برای تعیین پهنای باند ۳dB کافیست فرکانس قطع ۳dB را تعیین کنید.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\max|H(j\omega)| \rightarrow \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + (2\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \omega = 0/62 \rightarrow \Delta\omega = 0/62$$

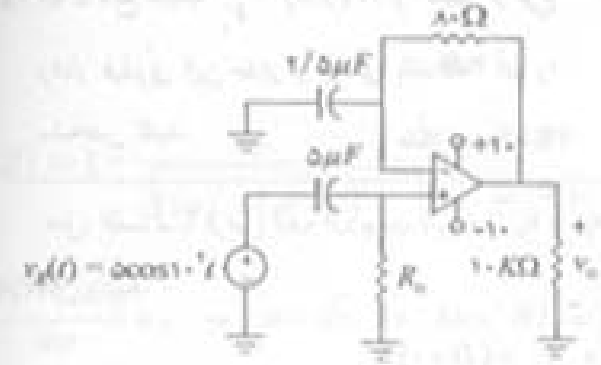


مسئله ۶۶

الف ـ R_o حداکثر چقدر باشد تا اینکه حالت دایمی v_o یک سینوسی کامل باشد.

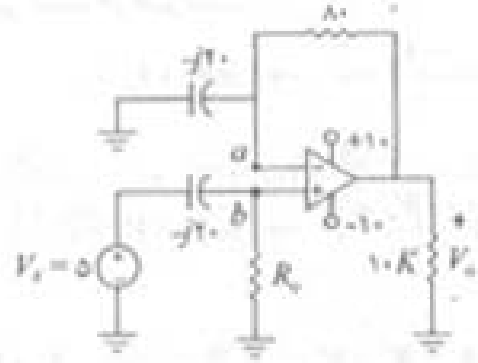
ب ـ برای R_o بدست آمده v_o را در حالت دایمی تعیین کنید.

(آپ امپ ایده آل می باشد)



شکل مسئله ۶۶

حل : الف ـ با فرض ایده آل بودن آپ امپ $v_a = v_b$ شده و با فرض اینکه مقدار در حالت دایمی سینوسی باشد خواهیم داشت.



$$V_b = \frac{R_o}{R_o + (-j20)}5 = \frac{5R_o}{R_o - j20} \rightarrow V_a = \frac{5R_o}{R_o - j20}$$

$$KCL \text{ برای گره } a \rightarrow \frac{\frac{5R_o}{R_o - j20}}{-j20} + \frac{\frac{5R_o}{R_o - j20} - V_o}{80} = 0 \rightarrow V_o = \frac{5R_o(1+2j)}{R_o - j20}$$

واضح است که تا وقتی که $|V_o| < V_{sat}$ باشد آپ امپ در ناحیه خطی عمل کرده و V_o تابع خطی از V_s بوده و با اینکه V_o سینوسی کامل است.

$$|V_o| < V_{sat} \rightarrow \frac{5\sqrt{5}R_o}{\sqrt{R^2 + 20^2}} < 10 \rightarrow R_o < 20 \rightarrow Max R_o = 20\Omega$$

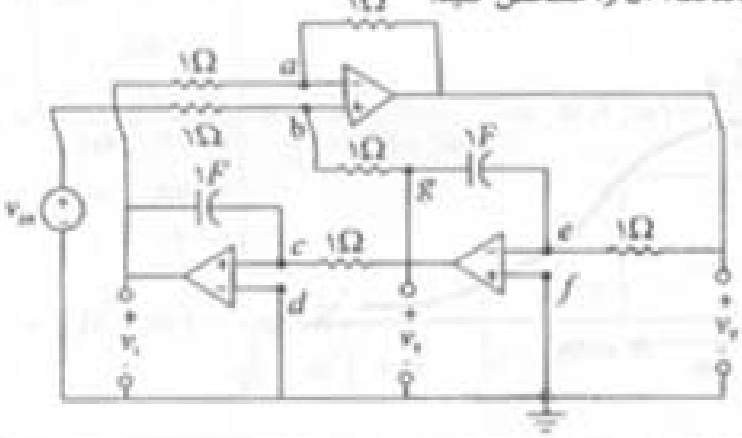
ب ـ به ازای $R_o = 20\Omega$ خواهیم داشت.

$$V_o = \frac{200(1+2j)}{20(2-j)} = j10 = 10\angle 90 \rightarrow v_o(t) = 10\cos(10^3 t + 90) = -10\sin 10^3 t$$

مسئله ۶۷

توابع شبکه $H_1(j\omega) = \frac{V_1'}{V_{in}}$ و $H_2(j\omega) = \frac{V_2}{V_{in}}$ و $H_3(j\omega) = \frac{V_3}{V_{in}}$ را بدست آورید. رفتار فیلتری هر کدام از توابع شبکه و پهنای باند ۳db آن را مشخص کنید.

(آپ امپ ایده آل می باشد)



شکل مسئله ۶۷

حل : با فرض ایده آل بودن آپ امپ ها، $V_a = V_b$ و $V_c = V_d = 0$ و $V_e = V_f$ بوده و با توجه به اینکه مدار در حالت دایمی سینوسی است خواهیم داشت.

$$KCL \text{ برای گره } ⓒ \rightarrow \frac{0 - V_c}{\frac{1}{j\omega}} + \frac{0 - V_e}{1} = 0 \rightarrow j\omega V_c + V_e = 0$$

$$KCL \text{ برای گره } ⓓ \rightarrow \frac{0 - V_b}{\frac{1}{j\omega}} + \frac{0 - V_e}{1} = 0 \rightarrow j\omega V_b + V_e = 0$$

$$\begin{cases} KCL \text{ برای گره } ⓐ \rightarrow \dfrac{V_a - V_c}{1} + \dfrac{V_a - V_e}{1} = 0 \rightarrow V_a = V_b = \dfrac{V_c + V_e}{2} \\ KCL \text{ برای گره } ⓑ \rightarrow \dfrac{V_b - V_{in}}{1} + \dfrac{V_b - V_c}{1} = 0 \end{cases} \rightarrow V_c - V_c + V_e = V_{in}$$

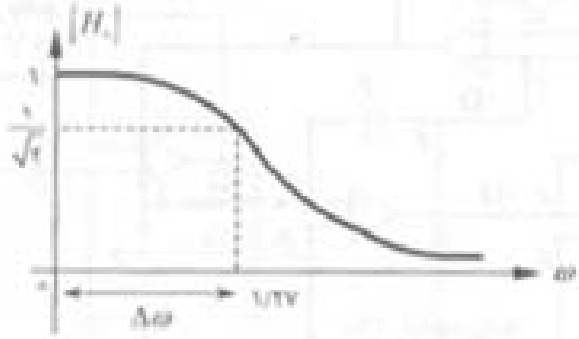
با توجه به سه معادله سه مجهولی فوق داریم

$$V_c = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & j\omega & 1 \\ V_{in} & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j\omega & 1 & 0 \\ 0 & j\omega & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{V_{in}}{(1-\omega^2) + j\omega} \rightarrow H_1(j\omega) = \frac{V_c}{V_{in}} = \frac{1}{(1-\omega^2) + j\omega}$$

$$\rightarrow |H_1(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2}} = \begin{cases} 1 & , \ \omega = 0 \\ 0 & , \ \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$|H_1(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \max|H_1(j\omega)| \rightarrow \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \omega = 1/27$$

نمودار $|H_1(j\omega)|$ درشکل زیررسم شده است که یک فیلتر پایین گذر با فرکانس قطع ۳db ، برابر ۱/۲۷ را نشان میدهد.



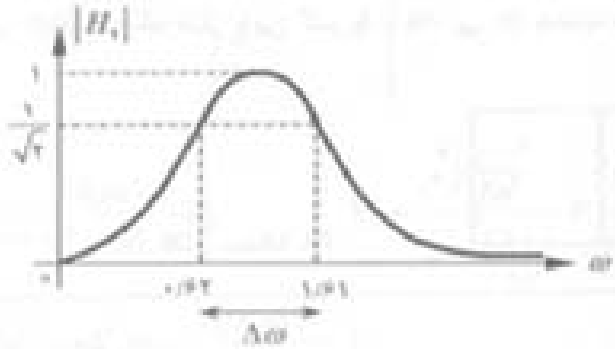
بنابراین پهنای باند آن $\Delta\omega = ۱/۲۷$ می باشد.در ادامه به بررسی $H_v(j\omega)$ خواهیم پرداخت با استفاده از دستگاه بدست آمده داریم.

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} j\omega & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & V_{in} & ۱ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j\omega & ۱ & ۰ \\ ۰ & j\omega & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{vmatrix}} = \frac{-j\omega V_{in}}{(۱-\omega^۲)+j\omega} \rightarrow H_v(j\omega) = \frac{V_2}{V_{in}} = \frac{-j\omega}{(۱-\omega^۲)+j\omega}$$

$$\rightarrow |H_v(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{(۱-\omega^۲)^۲+\omega^۲}} = \begin{cases} ۰ \ , & \omega \rightarrow ۰ \\ ۰ \ , & \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$|H_v(j\omega)| = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\max|H_v(j\omega)| \rightarrow \frac{\omega}{\sqrt{(۱-\omega^۲)^۲+\omega^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \rightarrow \omega_۱ = ۰/۶۲ \ , \ \omega_۲ = ۱/۶۱$$

نمودار $|H_v(j\omega)|$ در شکل زیر رسم شده است که یک فیلتر میان گذر با فرکانسهای قطع ۰/۶۲ و ۱/۶۱ می باشد.



با توجه به نمودار فوق پهنای باند $۳db$ بصورت زیر بدست می آید.

$$\Delta\omega = \omega_۲ - \omega_۱ = ۱/۶۱ - ۰/۶۲ = ۰/۹۹$$

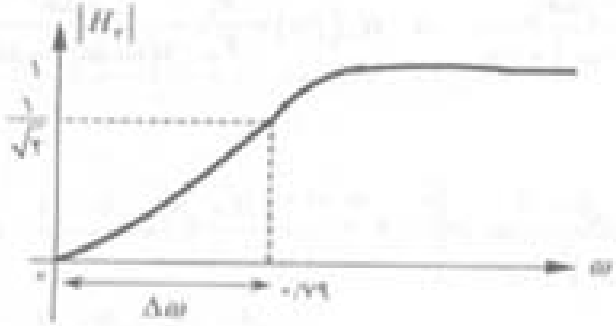
و در نهایت $H_v(j\omega)$ با استفاده از دستگاه بدست آمده بصورت زیر محاسبه می شود.

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} j\omega & ۱ & ۰ \\ ۰ & j\omega & ۰ \\ ۱ & -۱ & V_{in} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j\omega & ۱ & ۰ \\ ۰ & j\omega & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{vmatrix}} = \frac{-\omega^۲ V_{in}}{(۱-\omega^۲)+j\omega} \rightarrow H_v(j\omega) = \frac{V_2}{V_{in}} = \frac{-\omega^۲}{(۱-\omega^۲)+j\omega}$$

$$\rightarrow |H_v(j\omega)| = \frac{\omega^۲}{\sqrt{(۱-\omega^۲)^۲+\omega^۲}} = \begin{cases} ۰ \ , & \omega = ۰ \\ ۱ \ , & \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$|H_v(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\max|H_v(j\omega)| \rightarrow \frac{\omega^2}{\sqrt{(1-\omega^2)+\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \omega = 0/79$$

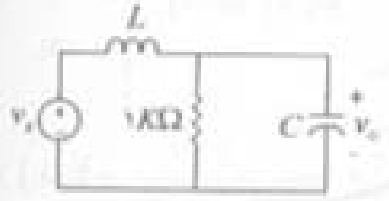
نمودار $|H_v(j\omega)|$ درشکل زیر رسم شده است که یک فیلتر بالا گذر با فرکانس وصل $3dB$، برابر ۰/۷۹ را نشان می دهد.



بنابراین پهنای باند قطع $3dB$ برابر $\Delta\omega = 0/79$ می باشد.

مسئله ۶۸

L و C را چنان تعیین کنید که یک فیلتر پایین گذر با $\omega_{c,dB} = 100$ بدست دهد.



شکل مسئله ۶۸

حل : با توجه به شکل مسئله داریم

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{1000 \parallel \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + 1000 \parallel \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1000}{1000 - 100LC\omega^2 + j\omega L}$$

$$|H(j\omega_{c,dB})| = \frac{1}{\sqrt{2}}\max|H(j\omega)| \rightarrow |H(j100)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow \frac{1000}{\sqrt{\left[1000 - 100LC(100)^2\right]^2 + (100L)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \left[1000 - 10^4 LC\right]^2 + 10^4 L^2 = 2$$

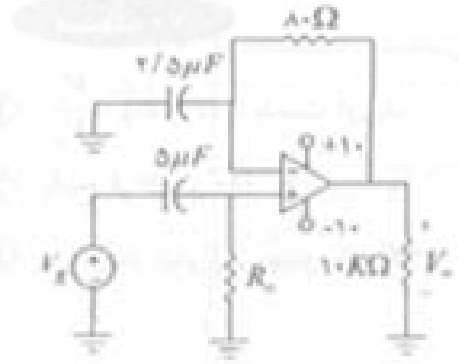
با انتخاب $L = 1mH$ داریم

$$(1000 - 100C)^2 + 10^{-4} = 2 \rightarrow C = 1/0015\,F$$

مسئله ۶۹

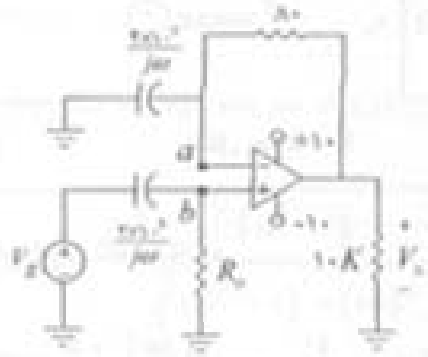
۱) $H(j\omega)=\frac{V_o}{V_g}$ را بدست آورید.

۲) پاسخ فرکانس $H(j\omega)$ را رسم و نوع فیلتری آن را تعیین کنید.



شکل مسئله ۶۹

حل: با فرض اینکه مدار در حالت دایمی سینوسی باشد داریم



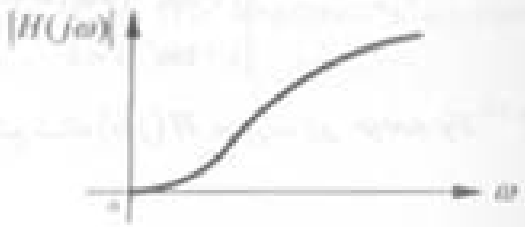
$$V_b=\frac{R_o}{R_o+\frac{۲\times۱۰^{-۶}}{j\omega}}V_g=\frac{jR_o\omega}{۲\times۱۰^{-۶}+jR_o\omega}V_g \quad , \quad V_a=\frac{\frac{۲\times۱۰^{-۶}}{j\omega}}{۸۰+\frac{۲\times۱۰^{-۶}}{j\omega}}V_o=\frac{۲\times۱۰^{-۶}}{۲\times۱۰^{-۶}+j۸۰\omega}V_o$$

$$V_a=V_b \rightarrow \frac{۲\times۱۰^{-۶}}{۲\times۱۰^{-۶}+j۸۰\omega}V_o=\frac{jR_o\omega}{۲\times۱۰^{-۶}+jR_o\omega}V_g$$

$$\rightarrow H(j\omega)=\frac{V_o}{V_g}=\frac{jR_o\omega\left(۲\times۱۰^{-۶}+j۸۰\omega\right)}{۲\times۱۰^{-۶}\left(۲\times۱۰^{-۶}+jR_o\omega\right)}$$

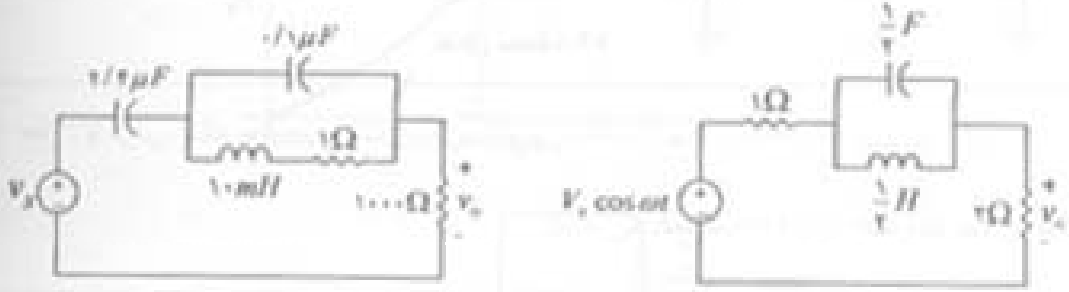
$$|H(j\omega)|=\frac{R_o\omega\sqrt{\left(۲\times۱۰^{-۶}\right)^۲+\left(۸۰\omega\right)^۲}}{۲\times۱۰^{-۶}\sqrt{\left(۲\times۱۰^{-۶}\right)^۲+\left(R_o\omega\right)^۲}}=\begin{cases}۰ & , \ \omega=۰\\ \infty & , \ \omega\to\infty\end{cases}$$

بنابراین مدار فوق یک فیلتر بالاگذر است.



مسئله ۷۰

- $H(j\omega)=\frac{V_o}{V_s}$ را بدست آورید.
- پاسخ فرکانسی مدار را رسم کنید.
- نوع رفتار فیلتری و پهنای باند $3db$ را مشخص کنید.



(الف) شکل مسئله ۷۰ (ب)

حل : الف ـ با توجه به شکل (الف) داریم.

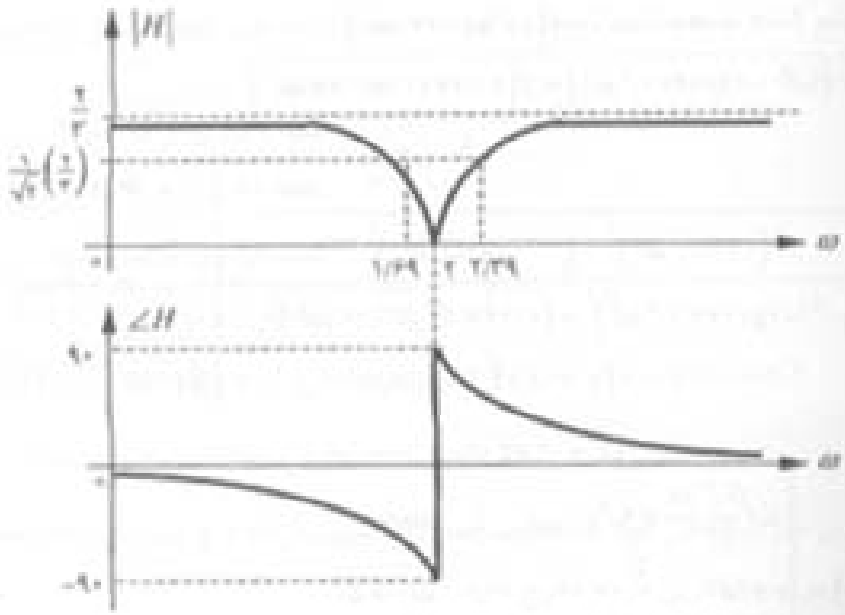
$$V_o=\frac{2}{\frac{j\frac{1}{2}\omega\times\frac{1}{j2\omega}}{2+\frac{j\frac{1}{2}\omega}{j2\omega}}+1}V_s \rightarrow H(j\omega)=\frac{V_o}{V_s}=\frac{2(j\omega)^2+8}{3(j\omega)^2+2j\omega+12}=\frac{8-2\omega^2}{12-3\omega^2+j2\omega}$$

$$|H(j\omega)|=\frac{|8-2\omega^2|}{\sqrt{(12-3\omega^2)^2+(2\omega)^2}}=\frac{|8-2\omega^2|}{\sqrt{9\omega^4-68\omega^2+144}}=\begin{cases}\frac{8}{12}=\frac{2}{3} & , \omega=0\\ \frac{2}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3} & , \omega\to\infty\\ 0 & , \omega=2\end{cases}$$

$$\angle H(j\omega)=\angle(8-2\omega^2)-\angle(12-\omega^2+j2\omega)=0-\tan^{-1}\frac{2\omega}{12-\omega^2}$$

$$=\begin{cases}0-0=0 & , \omega=0\\ 0-\tan^{-1}(+\infty)=-90 & , \omega=2^-\\ 0-\tan^{-1}(+\infty)=90 & , \omega=2^+\\ 0-\tan^{-1}0=0 & , \omega=\infty\end{cases}$$

بنابراین نمودارهای اندازه و فاز تابع شبکه $H(j\omega)$ بصورت زیر خواهند بود.



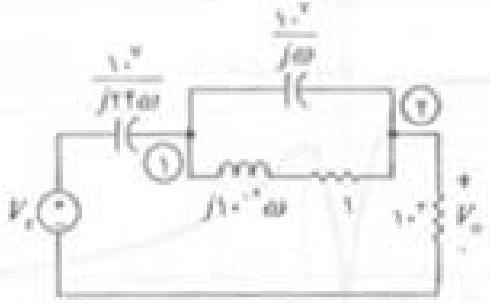
با توجه به نمودار پاسخ فرکانسی ملاحظه می شود که مدارداده شده یک فیلتر میان گذراست. در ادامه به محاسبه پهنای باند(3dB) خواهیم پرداخت.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\max|H(j\omega)| \rightarrow \frac{|2(\omega^2-2)|}{\sqrt{9(\omega^2-2)^2+(2\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\rightarrow \omega_1 = 1/69, \omega_2 = 2/39$$

$$\rightarrow \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2/39 - 1/69 = 0/67$$

به شکل (ب) را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



با فرض اینکه $s = j\omega$ باشد خواهیم داشت.

$$V_o = \frac{10^2}{10^2 + \frac{10^2}{24s} + \left(\frac{10^2}{s}\right)\|\left(10^{-2}s+1\right)} V_s = \frac{240s^2 + 24\times10^2 s^2 + 10^{11}s}{240s^2 + 25/24\times10^2 s^2 + 1025\times10^2 s + 10^{12}} V_s$$

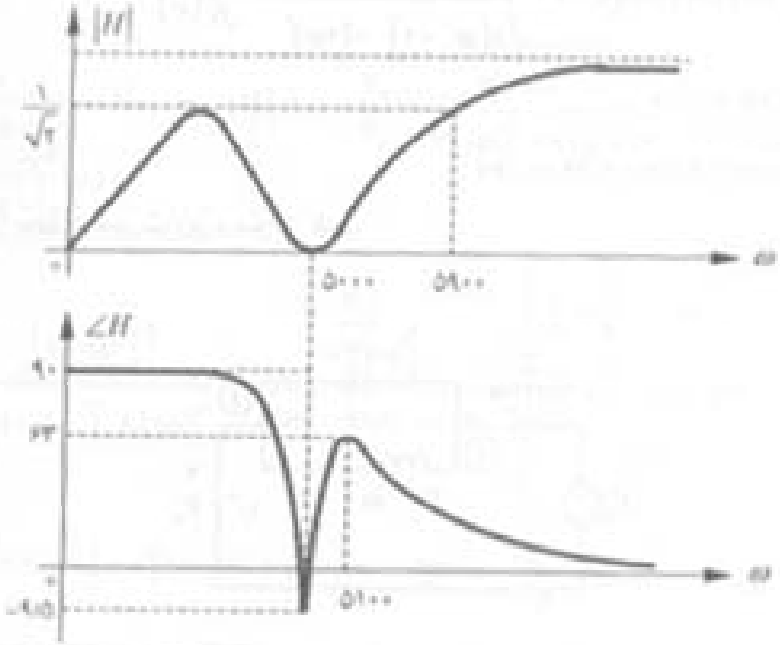
با جایگزینی $s = j\omega$ خواهیم داشت.

$$H(j\omega)=\frac{V_o}{V_s}=\frac{-۲۴\times۱۰^{۳}\omega^{۲}+j\left(۱۰^{۱۰}\omega-۲۴\omega^{۳}\right)}{\left(۱۰^{۱۰}-۲۵/۲۴\times۱۰^{۵}\omega^{۲}\right)+j\left(۱۰\cdot۲۴\times۱۰^{۳}\omega-۲۴\omega^{۳}\right)}$$

$$|H(j\omega)|=\sqrt{\frac{\left(۲۴\times۱۰^{۳}\omega^{۲}\right)^{۲}+\left(۱۰^{۱۰}\omega-۲۴\omega^{۳}\right)^{۲}}{\left(۱۰^{۱۰}-۲۵/۲۴\times۱۰^{۵}\omega^{۲}\right)^{۲}+\left(۱۰\cdot۲۴\times۱۰^{۳}\omega-۲۴\omega^{۳}\right)^{۲}}}=\begin{cases}۰ \quad , \quad \omega=۰\\ ۰ \quad , \quad \omega=۵۰۰۰\\ \sqrt{\frac{(۱۰\cdot۲۴)^{۲}}{(۱\cdot۲۴)^{۲}}}=۱ \quad , \quad \omega\to\infty\end{cases}$$

$$\to \angle H(j\omega)=\begin{cases}\angle\frac{j۱۰^{۱۰}\omega}{۱۰^{۱۰}}=۹۰^{\circ} & , \quad \omega\to ۰\\ -۹/۵^{\circ} & , \quad \omega\to ۵۰۰۰\\ \angle\frac{۲۴\cdot(j\omega)^{۳}}{۲۴\cdot(j\omega)^{۳}}=\angle ۱=۰ & , \quad \omega\to\infty\end{cases}$$

نمودارهای اندازه و زاویه $H(j\omega)$ پاسخ فرکانسی در شکل زیر رسم شده اند.



با توجه به پاسخ فرکانسی ملاحظه می شود که مدارداده شده یک فیلتر بالا گذراست.در ادامه به محاسبه پهنای باند 3dB خواهیم پرداخت.

$$|H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{2}}\max|H(j\omega)| \to |H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{2}} \to \omega=۵۹۰۰ \to \Delta\omega=۵۹۰۰$$

نکته: با توجه به تابع شبکه بدست آمده بر حسب $s = j\omega$ بعضی از مقادیر کلیدی پاسخ فرکانسی را می توان بصورت زیر بدست آورد.

$$|H(j0)| = \lim_{s\to 0} \frac{\text{جمله با کمترین درجه صورت}}{\text{جمله با کمترین درجه مخرج}} = \lim_{s\to 0} \frac{10^{10}s}{10^{10}} = 0$$

$$|H(j\infty)| = \lim_{s\to \infty} \frac{\text{جمله با بیشترین درجه صورت}}{\text{جمله با بیشترین درجه مخرج}} = \lim_{s\to \infty} \frac{240s^2}{240s^2} = 1$$

$$\angle H(j0) = \pm(\text{کمترین درجه مخرج} - \text{کمترین درجه صورت}) \times 90 = +(1-0)\times 90 = 90^\circ$$

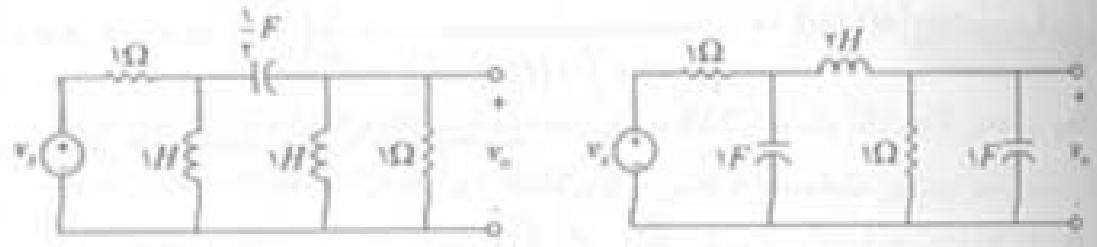
$$\angle H(j\infty) = \pm(\text{بیشترین درجه مخرج} - \text{بیشترین درجه صورت}) \times 90 = +(0-0)\times 90 = 0$$

علامت منفی وقتی در نظر گرفته می شود که علامت جمله با کمترین درجه و یا بیشترین درجه صورت مخالف علامت جمله با کمترین و یا بیشترین درجه مخرج باشد.

مسئله ۷۱

۱) پاسخ فرکانسی هر کدام از مدارهای زیر را تعیین کنید.

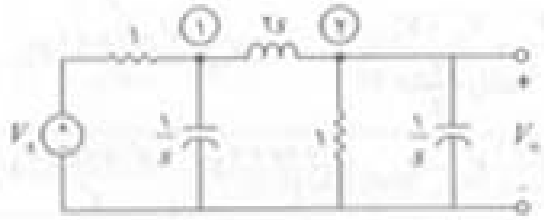
۲) رفتار فیلتری و پهنای باند ۳db- هر کدام را بدست آورید.



(الف) (ب)

شکل مسئله ۷۱

حل: الف ـ با فرض $s = j\omega$ مدار بصورت زیر خواهد شد.

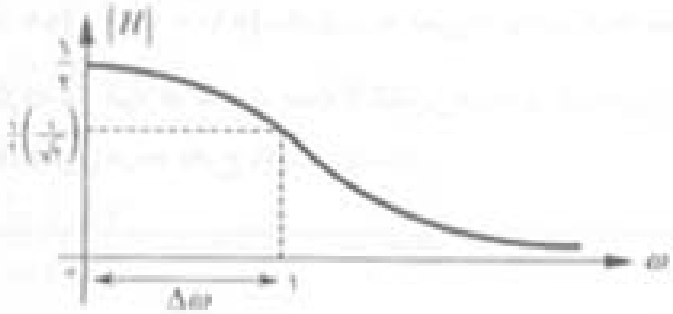


$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \frac{V_o}{\frac{1}{s}} + \frac{V_o}{1} + \frac{V_o - V_1}{2s} = 0 \rightarrow V_1 = (2s^2 + 2s + 1)V_o$$

KCL برای گره ① $\rightarrow \dfrac{(2s^2+2s+1)V_o - V_s}{1} + \dfrac{(2s^2+2s+1)V_o}{\frac{1}{s}} + \dfrac{(2s^2+2s+1)V_o - V_o}{2s} = 0$

$$\rightarrow \frac{V_o}{V_s} = \frac{1}{2s^3+2s^2+2s+2} \rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{2(j\omega)^3+2(j\omega)^2+2(j\omega)+2}$$

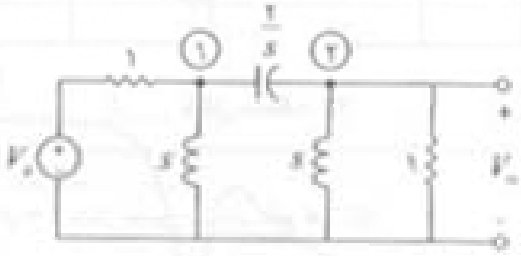
$$\rightarrow |H(j\omega)| = \left|\frac{1}{2(j\omega)^3+2(j\omega)^2+2(j\omega)+2}\right| = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \ \omega \rightarrow 0 \\ 0 & , \ \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$



با توجه به نمودار $|H|$ واضح است که مدار فوق یک فیلتر پایین گذر است. در ادامه به محاسبه فرکانس قطع و پهنای باند $3db$ خواهیم پرداخت.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\max|H(j\omega)| \rightarrow \frac{1}{\sqrt{(2-2\omega^2)^2+(2\omega-2\omega^3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \omega = 1 \rightarrow \Delta\omega = 1$$

ب ـ با فرض $S = j\omega$ مدار بصورت زیر خواهد شد.

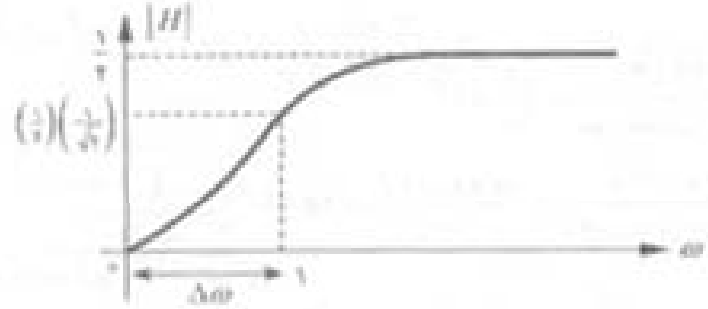


KCL برای گره ② $\rightarrow \dfrac{V_o}{1} + \dfrac{V_o}{s} + \dfrac{V_o - V_1}{\frac{2}{s}} = 0 \rightarrow V_1 = \dfrac{s^2+2s+2}{s^2}V_o$

KCL برای گره ① $\rightarrow \dfrac{\frac{s^2+2s+2}{s^2}V_o - V_s}{1} + \dfrac{\frac{s^2+2s+2}{s^2}V_o}{s} + \dfrac{\frac{s^2+2s+2}{s^2}V_o - V_o}{\frac{2}{s}} = 0$

$$\rightarrow \frac{V_o}{V_s} = \frac{s^2}{2s^3+2s^2+2s+2} \rightarrow H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2}{2(j\omega)^3+2(j\omega)^2+2(j\omega)+2}$$

$$\rightarrow \quad |H(j\omega)| = \left|\frac{(j\omega)^3}{2(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 2}\right| = \begin{cases} \left|\dfrac{(j\omega)^3}{2}\right|_{\omega\to 0} = 0 \quad , \quad \omega \to 0 \\ \left|\dfrac{(j\omega)^3}{2(j\omega)^3}\right|_{\omega\to\infty} = 1 \quad , \quad \omega \to \infty \end{cases}$$



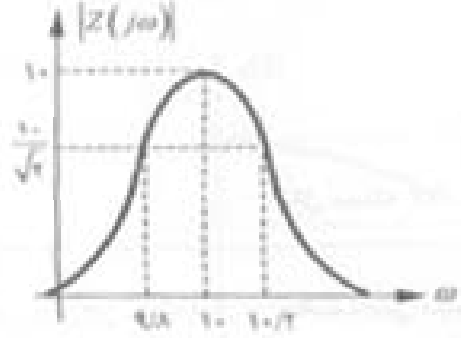
با توجه به نمودار $|H|$ واضح است که مقدار فوق یک فیلتر بالا گذر است. در ادامه به محاسبه فرکانس قطع $3dB$ و پهنای باند $3dB$ خواهیم پرداخت.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\max|H(j\omega)| \rightarrow \frac{\omega^3}{\sqrt{(2-2\omega^2)^2 + (2\omega - 2\omega^3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \omega = 1 \rightarrow \Delta\omega = 1$$

مسئله ۷۲

الف ـ منحنی $|Z(j\omega)|$ یک مدار RLC موازی داده شده است مقادیر R و L و C را بدست آورید.

ب ـ می خواهیم این مشخصه با فرکانس مرکزی $20KHZ$ و حداکثر 10^5 اهم باشد. مقادیر جدید R و L و C را بدست آورید.



شکل مسئله ۷۲

حل : الف ـ با توجه به پاسخ فرکانسی $|Z(j\omega)|$ داریم

$$\omega_0 = 10 \quad , \quad \Delta\omega = 10/2 - 9/8 = 0/4 \quad , \quad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = 2\alpha \quad \rightarrow \quad 2\alpha = 0/4$$

می دانیم که در فرکانس تشدید ω_0 ، سلف و خازن اثر یکدیگر را خنثی کرده و $Z(j\omega) = R$ می باشد بنابراین داریم

$$|Z(j\omega_0)| = |Z(j10)| = R \rightarrow R = 10\Omega \quad , \quad 2\alpha = \frac{1}{RC} \rightarrow 0/2 = \frac{1}{10C} \rightarrow C = 0/25F$$

$$\omega_0 = 10 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{0/25L}} = 10 \rightarrow L = 0/02H$$

ب ـ در این حالت از روش نرمالیزه کردن استفاده می کنیم. مقادیر اجزای مدار نرمالیزه شده را برابر مقادیر محاسبه شده در قسمت قبل در نظر می گیریم.

$$r_0 = \frac{\text{سطح امپدانس مطلوب}}{\text{سطح امپدانس طرح نرمالیزه شده}} = \frac{10^5}{10} = 10^4$$

$$\Omega_0 = \frac{\text{فرکانس نوعی مطلوب}}{\text{فرکانس نوعی طرح نرمالیزه شده}} = \frac{2\pi \times 20 \times 10^3}{10} = 4\pi \times 10^3$$

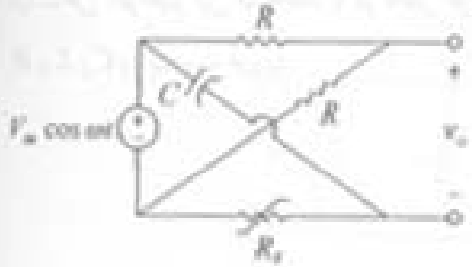
بنابراین اجزای مطلوب بصورت زیر بدست می آیند.

$$R = r_0 R_n = 10^4 \times 10 = 10^5 \quad , \quad L = \frac{r_0}{\Omega_0} = L_n = \frac{10^4}{4\pi \times 10^3} \times 0/02 = \frac{1}{10\pi} H$$

$$C = \frac{C_n}{r_0 \Omega_0} = \frac{0/25}{10^4 \times 4\pi \times 10^3} = \frac{25}{4\pi} \times 10^{-9} F$$

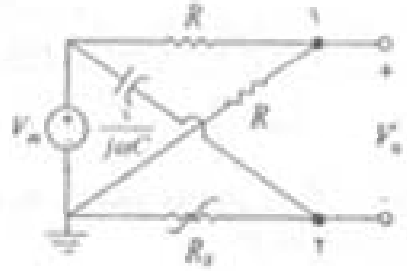
مسئله ۷۳

- v_o را تعیین کنید.
- منحنی های اندازه و فاز تابع شبکه انتقال ولتاژ V_o را بر حسب R_x رسم کنید.
- رفتار فیلتری این مدار را بر حسب تغییرات R_x تعیین کنید.



شکل مسئله ۷۳

حل : با فرض اینکه مدار در حالت دایمی سینوسی باشد آن را بصورت زیر رسم می کنیم.



① KCL برای گره ۱ $\rightarrow \dfrac{V_1}{R}+\dfrac{V_1-V_m}{R}=0 \rightarrow V_1=\dfrac{V_m}{2}$

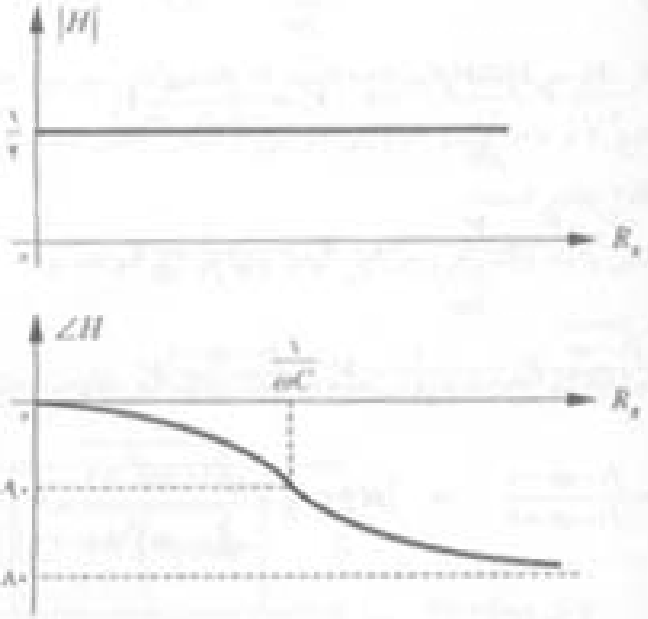
② KCL برای گره ۲ $\rightarrow \dfrac{V_2-V_m}{\frac{1}{j\omega C}}+\dfrac{V_2}{R_x}=0 \rightarrow V_2=\dfrac{j\omega CR_x}{j\omega CR_x+1}V_m$

$$\rightarrow V_o=V_1-V_2=\frac{V_m}{2}-\frac{j\omega CR_x}{j\omega CR_x+1}V_m=\frac{1-j\omega CR_x}{2(j\omega CR_x+1)}V_m \rightarrow H(jR_x)=\frac{1-\omega C(jR_x)}{2\omega C(jR_x)+2}$$

$$\rightarrow |H(jR_x)|=\frac{\sqrt{1+(\omega CR_x)^2}}{2\sqrt{1+(\omega CR_x)^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\angle H(jR_x)=-\tan\omega CR_x-\tan\omega CR_x=-2\tan\omega CR_x=\begin{cases}0 & , R_x=0\\ -90^\circ & , R_x=\frac{1}{\omega C}\\ -180^\circ & , R_x\rightarrow\infty\end{cases}$$

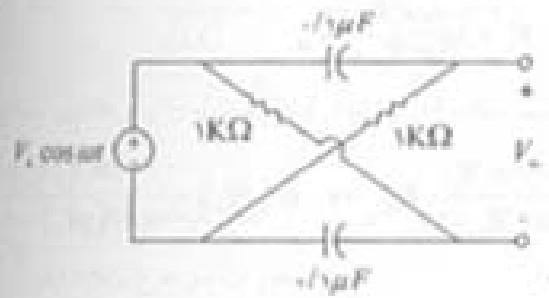
بنابراین نمودارهای اندازه و فاز تابع شبکه بصورت زیر می باشد.



با توجه به نمودار $|H|$، ملاحظه می شود که مدار یک فیلتر تمام گذر است.

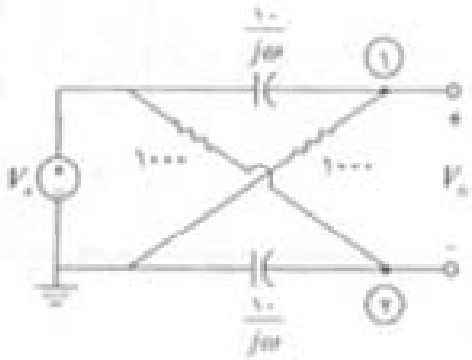
مسئله ۷۳

- تابع شبکه $H(j\omega)=\frac{V_o}{V_s}$ را بدست آورید.
- پاسخ فرکانسی مدار را رسم کنید.
- نوع فیلتری مدار را مشخص کنید.



شکل مسئله ۷٤

حل : با فرض اینکه مدار در حالت دایمی سینوسی باشد آن را بصورت زیر رسم می کنیم.



$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow \frac{V_1}{1000}+\frac{V_1-V_s}{\frac{10}{j\omega}} \rightarrow V_1=\frac{j10\omega}{1+j10\omega}V_s$$

$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \frac{V_2-V_s}{1000}+\frac{V_2}{\frac{10}{j\omega}} \rightarrow V_2=\frac{1}{1+j10\omega}V_s$$

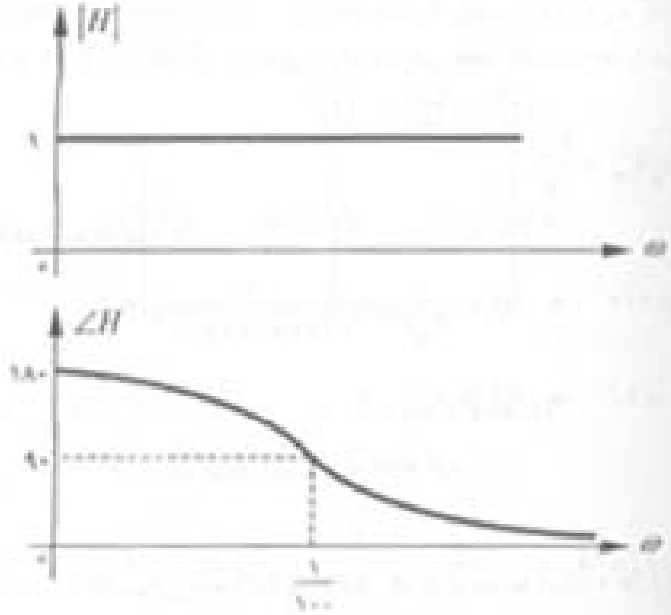
$$\rightarrow V_o=V_1-V_2=\frac{j10\omega}{1+j10\omega}V_s-\frac{1}{1+j10\omega}V_s=\frac{j10\omega-1}{j10\omega+1}V_s$$

$$\rightarrow H(j\omega)=\frac{V_o}{V_s}=\frac{j10\omega-1}{j10\omega+1} \rightarrow |H(j\omega)|=\frac{\sqrt{(10\omega)^2+1}}{\sqrt{(10\omega)^2+1}}=1$$

$$\angle H(j\omega)=\angle(j10\omega-1)-\angle(j10\omega+1)=180-\tan^{-1}10\omega-\tan^{-1}10\omega=180-2\tan^{-1}10\omega$$

$$=\begin{cases}180-0=180 & , \omega=0\\ 180-90=90 & , \omega=\frac{1}{100}\\ 180-180=0 & , \omega\rightarrow\infty\end{cases}$$

بنابراین نمودارهای اندازه و فاز پاسخ فرکانسی تابع شبکه بصورت زیر می باشد.



با توجه به نمودار $|H|$، واضح است که مدار بصورت یک فیلتر تمام گذر عمل می کند.

مسئله ۷۵

فرکانس منبع ولتاژ سینوسی چنان تنظیم شده است که دامنه ولتاژ سینوسی حداکثر شود.

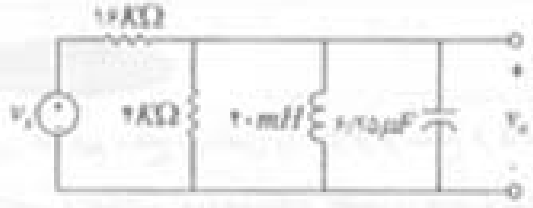
الف ـ فرکانس منبع v_s و دامنه ولتاژ خروجی در این فرکانس چقدر است.

ب ـ پهنای باند ۳dB چقدر است.

پ ـ درجه فرکانسی دامنه ولتاژ خروجی $\frac{1}{\sqrt{2}}$ برابر حداکثر آن خواهد بود.

ت ـ Q این مدار چیست.

ث ـ اگر مقاومت $16k\Omega$ مقاومت درونی منبع را نشان دهد، این مقاومت منبع، Q مدار را چقدر پایین می آورد.



شکل مسئله ۷۵

حل: الف ـ می دانیم که به ازای فرکانس تشدید ولتاژ خروجی ماکزیمم خواهد بود بنابراین فرکانس مورد نظر بصورت زیر بدست می آید.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(40\times10^{-3})(0.25\times10^{-6})}} = 200\left(\frac{rad}{sec}\right)$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \rightarrow f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{2000}{2\pi} = 318/27\ Hz$$

در حالت تشدید سلف و خازن اثر یکدیگر را خنثی کرده بنابراین فقط مقاومت ها را در نظر خواهیم گرفت

$$\rightarrow \max V_o = \frac{2}{16+2} V_m = \frac{V_m}{5}$$

ب ـ با توجه به مدار داده شده داریم

$$R_{eq} = 2 \| 16 = \frac{2 \times 16}{2+16} = 3/2 \rightarrow 2\alpha = \frac{1}{R_{eq}C} = \frac{1}{3/2 \times 6/25 \times 10^{-6}} = 50$$

$$\rightarrow Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{2000}{50} = 40 \rightarrow Q \gg 1$$

از آنجا که $Q \gg 1$ می باشد لذا می توان از تقریب زیر استفاده کرد.

$$\Delta\omega \approx 2\alpha = 50$$

پ ـ فرکانسهای مورد نظر، فرکانسهای قطع ۳dB می باشند که با توجه به اینکه $Q \gg 1$ می باشد از تقریب های زیر استفاده خواهیم کرد.

$$\omega_1 = \omega_0 - \alpha = 2000 - 25 = 1975 \quad , \quad \omega_2 = \omega_0 + \alpha = 2000 + 25 = 2025$$

ت ـ در قسمت (ب) محاسبه شده است.

ث ـ اگر مقاومت $16K\Omega$ نباشد مقاومت معادل $R'_{eq} = 2$ می شود که با توجه به تعریف ضریب کیفیت خواهیم داشت.

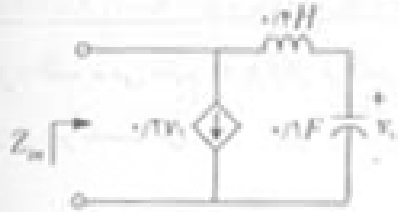
$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\omega_0}{\frac{1}{R_{eq}C}} = \omega_0 R_{eq} C \rightarrow Q \propto R_{eq}$$

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{R_{eq}}{R'_{eq}} = \frac{3/2}{2} \rightarrow Q' = \frac{2}{3/2} Q = \frac{2}{3/2}(40) = 50 \rightarrow \Delta Q = 50 - 40 = 10$$

بنابراین مقاومت $16K\Omega$، Q مدار را ۱۰ واحد پایین می آورد.

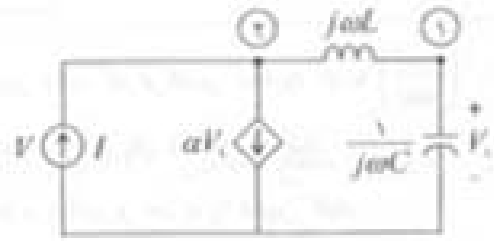
مسئله ۷۷

می خواهیم سطح امپدانس را ۲ برابر و سطح فرکانس را ۵ برابر افزایش دهیم. مقادیر جدید عناصر و امپدانس ورودی مدار جدید را بدست آورید.



شکل مسئله ۷۷

حل : در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود. ابتدا به محاسبه Z_{in} خواهیم پرداخت. بدین منظور منبع جریان I را به دو سر ورودی وصل کرده و ولتاژ دو سر آن را محاسبه خواهیم کرد.



$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \quad -I+\alpha V_1+\frac{V_1}{\frac{1}{j\omega C}} \rightarrow I=(\alpha+j\omega C)V_1$$

$$\text{KVL برای حلقه بیرونی} \rightarrow \quad -V+\left(j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right)\frac{V_1}{\frac{1}{j\omega C}}=0 \rightarrow V=\left(1-LC\omega^2\right)V_1$$

$$\rightarrow \quad V=\left(1-LC\omega^2\right)\frac{I}{(\alpha+j\omega C)}$$

$$\rightarrow \quad Z(j\omega)=\frac{V}{I}=\frac{1-LC\omega^2}{\alpha+j\omega C} \quad , \quad Y(j\omega)=\frac{\alpha}{1-LC\omega^2}+j\frac{C\omega}{1-LC\omega^2}$$

سطح امپدانس با اندازه امپدانس ماکزیمم به ازای فرکانس تشدید بدست می آید. ابتدا فرکانس تشدید را بدست می آوریم.

$$\operatorname{Im}\{Y(j\omega_0)\}=0 \rightarrow \frac{C\omega_0}{1-LC\omega_0^2}=0 \rightarrow \omega_0=0 \rightarrow \text{سطح امپدانس}=R_0=|Z(j\omega_0)|=\frac{1}{\alpha}$$

سطح امپدانس باید ۴ برابر و سطح فرکانس باید ۵ برابر شود بنابراین $r_R=4$ و $\Omega_R=4$ بوده و با توجه به شکل مسئله داریم

$$R_0=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{0.2}=5 \quad , \quad L_0=0.4 \quad , \quad C_0=0.1$$

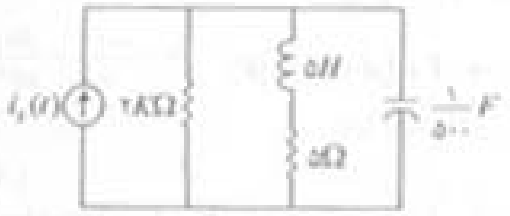
و با توجه به رابطه (۸- ۶) کتاب، مقادیر عناصر برای مدار جدید برابر است با :

$$R=r_R R_0=4\times 5=20 \rightarrow \frac{1}{\alpha}=20 \rightarrow \alpha=0.05$$

$$L=\frac{r_R}{\Omega_R}L_0=\frac{4}{5}(0.4)=0.32\,H \qquad , \qquad C=\frac{C_0}{r_R\Omega_R}=\frac{0.1}{4\times 5}=5\times 10^{-3}\,F=5\,mF$$

مسئله ۷۸

- فرکانس تشدید مدار چیست.
- مقیاس مدار را چنان تغییر دهید که فرکانس تشدید آن به $\left(\frac{rad}{sec}\right)$ $\Omega = ۳\sqrt{۱۱}\times ۱۰^{۴}$ تبدیل شود و امپدانس دیده شده توسط منبع جریان $۹۰۰K\Omega$ باشد.
- مقادیر جدید مقاومت ها و سلف و خازن را تعیین کنید.



شکل مسئله ۷۸

حل : ادمیتانس دیده شده از دو سر منبع جریان برابر است با :

$$Y(j\omega)=\frac{۱}{۲۰۰۰}+\frac{۱}{۵+j۵\omega}+\frac{۱}{j\frac{\omega}{۵۰۰}}=\left(\frac{۱}{۲۰۰۰}+\frac{۵}{۲۵+۲۵\omega^{۲}}\right)+j\omega\left(\frac{۱}{۵۰۰}-\frac{۵}{۲۵+۲۵\omega^{۲}}\right)$$

می دانیم که فرکانس تشدید از حل معادله $\mathrm{Im}\{Y(j\omega)\}=۰$ بدست می آید.

$$\mathrm{Im}\{Y(j\omega)\}=۰ \rightarrow \frac{۱}{۵۰۰}-\frac{۵}{۲۵+۲۵\omega^{۲}}=۰ \rightarrow ۲۵+۲۵\omega^{۲}=۲۵۰۰ \rightarrow \omega_0=۳\sqrt{۱۱}$$

سطح امپدانس به ازای فرکانس تشدید بدست آمده برابر است با:

$$R_0=Z(j\omega_0)=\frac{۱}{\left(\frac{۱}{۲۰۰۰}+\frac{۵}{۲۵+۲۵\omega^{۲}}\right)_{\omega=\omega_0}}=۲۰\Omega$$

مقیاس مدار خواسته شده همان ضرایب نرمالیزاسیون امپدانس وفرکانس می باشند که با فرض اینکه طرح نرمالیزه مدار شکل فوق باشد داریم

$$r_0=\frac{\text{سطح امپدانس مطلوب}}{\text{سطح امپدانس طرح نرمالیزه}}=\frac{۲۰۰K\Omega}{۲۰\Omega}=۱۰^{۴}$$

$$\Omega_0=\frac{\text{فرکانس تشدید مطلوب}}{\text{فرکانس نوعی طرح نرمالیزه شده}}=\frac{۲\pi\times ۲۰\times ۱۰^{۴}}{۱۰}=۴\pi\times ۱۰^{۴}$$

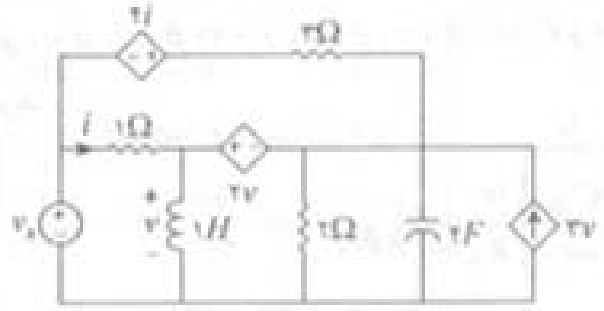
بنابراین مقادیر عناصر مدار برای سطح فرکانس و امپدانس خواسته شده بصورت زیر بدست خواهد آمد.

$$R_L=r_0R_{L_n}=\left(۱۰^{۴}\right)\left(۲\times ۱۰^{۲}\right)=۲M\Omega \quad , \quad R_s=r_0R_{s_n}=\left(۱۰^{۴}\right)\left(۵\right)=۵K\Omega$$

$$L = \frac{r_o}{\Omega_o} L_o = \left(\frac{10^3}{10^3}\right)(5) = 5\ mH \quad , \quad C = \frac{C_o}{r_o \Omega_o} = \frac{\frac{1}{500}}{(10^3)(10^3)} = 2\ pF$$

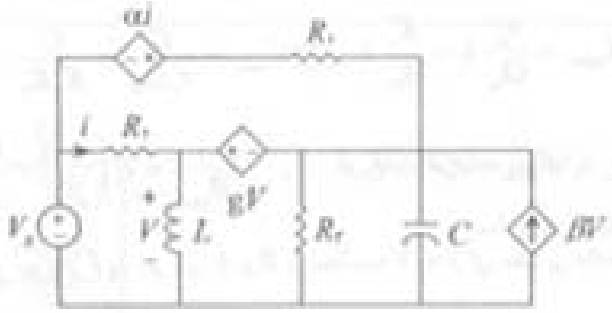
مسئله ۷۹

می خواهیم سطح امپدانس ۲۰۰۰ برابر و سطح فرکانس 2×10^5 برابر گردد. مقادیر جدید عناصر را تعیین کنید.



شکل مسئله ۷۹

حل: فرض کنیم که مدار جدید مورد نظر بصورت زیر باشد.



با توجه به مقادیر داده شده سطح امپدانس و سطح فرکانس برابر $r_o = 2000 = 2\times10^3$ و $\Omega_o = 2\times10^5$ بوده و با فرض اینکه شکل مسئله ۷۹ طرح نرمالیزه شده باشد خواهیم داشت.

$$R_1 = r_o R_{1n} = (2\times10^3)(3) = 6K\Omega \quad , \quad R_2 = r_o R_{2n} = (2\times10^3)(1) = 2K\Omega$$

$$R_3 = r_o R_{3n} = (2\times10^3)(2) = 4K\Omega \quad , \quad L = \frac{r_o}{\Omega_o} L_n = \left(\frac{2\times10^3}{2\times10^5}\right)(1) = 5\ mH$$

$$C = \frac{C_n}{r_o \Omega_o} = \frac{2}{(2\times10^3)(2\times10^5)} = 2/5\ nF$$

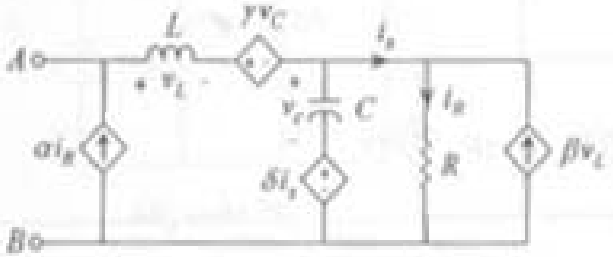
αi، gV و βV به ترتیب منابع ولتاژ کنترل شده با جریان ، ولتاژ کنترل شده با ولتاژ و جریان کنترل شده با ولتاژ اند بنابراین α از جنس امپدانس، g بدون بعد و β از جنس ادمیتانس است و لذا g تغییری نکرده و α و β بصورت زیر بدست می آیند.

$$\alpha = r_a\alpha_o = \left(2\times10^{2}\right)(2) = 800 \quad , \quad \frac{1}{\beta} = r_a\frac{1}{\beta_o} = \frac{2\times10^{2}}{2} \rightarrow \beta = 0/0015$$

مسئله ۸۰

می خواهیم سطح امپدانس را K_1 برابر و سطح فرکانس را K_2 برابر افزایش دهیم. مقادیر جدید R ، L ، C ، α ، β ، δ و γ چیست.

برای $\alpha=1$ ، $\beta=1$ ، $\gamma=30$ ، $\delta=2$ ، $R=2$ ، $C=1$ و $L=2$ امپدانس ورودی مدار را بدست آورید.



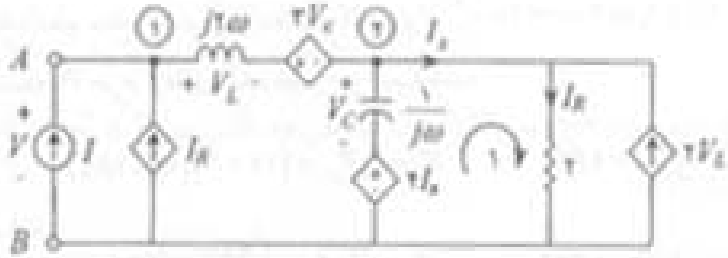
شکل مسئله ۸۰

حل : به روشی مشابه حل مسئله ۷۹ داریم.

$$R_{new} = r_a R = K_1 R \quad , \quad L_{new} = \frac{r_a}{\Omega_o}L = \frac{K_1}{K_2}L \quad , \quad C_{new} = \frac{C}{r_a\Omega_o} = \frac{C}{K_1K_2}$$

$$\alpha_{new} = \alpha \quad , \quad \gamma_{new} = \gamma \quad , \quad \delta_{new} = r_a\delta = K_1\delta \quad , \quad \frac{1}{\beta_{new}} = r_a\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{K_1}{\beta} \rightarrow \beta_{new} = \frac{\beta}{K_1}$$

در ادامه با وصل کردن منبع جریان I به دو سر A و B و محاسبه V به ازای مقادیر داده شده، امپدانس ورودی را تعیین خواهیم کرد.



$$V_1 = V \quad , \quad V_1 = 2I_R \quad , \quad \begin{cases} V_1 = V - \left(2V_C + 2I_R\right) \\ I_s = I_R - 2V_L \end{cases} \rightarrow I_s = 5I_R + 6V_C - V$$

$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow -I - I_R + \frac{V - \left(2V_C + 2I_R\right)}{j2\omega} = 0 \rightarrow V - 2V_C - \left(2 + j2\omega\right)I_R = j2\omega I$$

KCL برای گره ② $\rightarrow \quad -\dfrac{V-(3V_C+2I_B)}{j2\omega}+\dfrac{V_C}{\frac{1}{j\omega}}+5I_B+6V_C-V=0$

$$\rightarrow \quad -(1+j2\omega)V+\left(3-2\omega^2+j12\omega\right)V_C+(2+j10\omega)I_B=0$$

KVL برای مش ① $\rightarrow \quad -2(5I_B+6V_C-V)-V_C+2I_B=0 \quad \rightarrow \quad 2V-15V_C-18I_B=0$

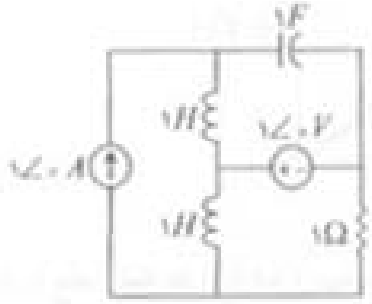
با حل سه معادله سه مجهول بدست آمده به روش کرامر خواهیم داشت.

$$V=\frac{\begin{vmatrix} j2\omega I & -3 & -2-j\omega \\ 0 & 3-2\omega^2+j12\omega & 2+j10\omega \\ 0 & -25 & -18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2-j2\omega \\ -1-j2\omega & 3-2\omega^2+j12\omega & 2+j10\omega \\ 2 & -25 & -18 \end{vmatrix}}=\frac{18\omega^2+j17\omega-2}{-8\omega^2-j2\omega}I \quad \rightarrow \quad Z_{in}(j\omega)=\frac{V}{I}$$

$$=\frac{18\omega^2+j17\omega-2}{-8\omega^2-j2\omega}$$

مسئله ۸۱

در چه ناحیه فرکانسی توان متوسط تحویلی منبع جریان از منبع ولتاژ بیشتر است.



شکل مسئله ۸۱

حل : ابتدا منبع ولتاژ را برابر صفر منظور کرده اثر منبع جریان را بررسی می کنیم. امپدانس دیده شده از دو سر منبع جریان برابر است با:

$$Z_1(j\omega)=\left(j\omega \parallel \frac{1}{j\omega}\right)+j\omega \parallel (1)=\frac{\omega^2}{1+\omega^2}+j\frac{2\omega}{1-\omega^2}$$

$$\rightarrow \quad P_{1(\omega)}=\frac{|I|}{2}\mathrm{Re}\{Z_1(j\omega)\}=\frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2}{1+\omega^2}\right)=\frac{\omega^2}{2+2\omega^2}$$

حال منبع جریان را برابر صفر در نظر می گیریم و ادمیتانس دیده شده از دو سر منبع ولتاژ را حساب می کنیم.

$$Y_v(j\omega)=\frac{1}{j\omega+\frac{1}{j\omega}}+\frac{1}{1+j\omega}=\frac{1}{1+\omega^2}+j\frac{2\omega^2}{1-\omega^2}$$

$$\rightarrow\ P_{v(\omega)}=\frac{|V|}{2}\mathrm{Re}\{Y_v(j\omega)\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)=\frac{1}{2+2\omega^2}$$

در نهایت خواهیم داشت.

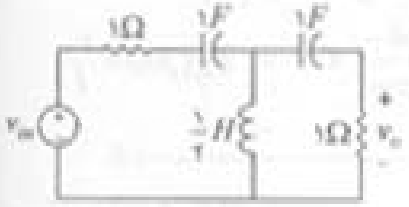
$$P_{i(\omega)}>P_{v(\omega)}\ \rightarrow\ \frac{\omega^2}{2+2\omega^2}>\frac{1}{2+2\omega^2}\ \rightarrow\ \omega^2>1\ \rightarrow\ |\omega|>1$$

مسئله ۸۲

تابع شبکه $H(j\omega)=\frac{V_o}{V_{in}}$ را تعیین کنید.

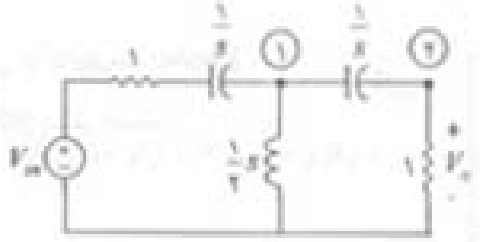
رفتار فیلتری و فرکانس قطع آن را مشخص کنید.

می خواهیم فیلتری با همین مشخصه در فرکانس $\omega=10^6$ داشته باشیم. مقادیر جدید عناصر را تعیین کنید.



شکل مسئله ۸۲

حل : با فرض $s=j\omega$ مدار بصورت زیر خواهد بود.



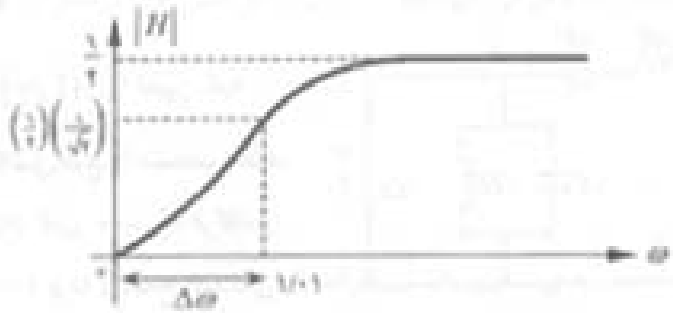
$$\text{KCL برای گره ②}\ \rightarrow\ \frac{V_o}{1}+\frac{V_o-V_1}{\frac{1}{s}}=0\ \rightarrow\ V_1=\frac{s+1}{s}V_o$$

$$\text{KCL برای گره ①}\ \rightarrow\ \frac{\frac{s+1}{s}V_o-V_{in}}{\frac{1}{s}+1}+\frac{\frac{s+1}{s}V_o}{\frac{1}{2}s}+\frac{\frac{s+1}{s}V_o-V_o}{\frac{1}{s}}=0$$

$$\rightarrow\ \frac{V_o}{V_{in}}=\frac{s^2}{2s^3+2s^2+2s+2}\ \rightarrow\ H(j\omega)=\frac{(j\omega)^2}{2(j\omega)^3+2(j\omega)^2+2(j\omega)+2}$$

$$\rightarrow\ |H(j\omega)|=\left|\frac{(j\omega)^2}{2(j\omega)^3+2(j\omega)^2+2(j\omega)+2}\right|=\begin{cases}0\ , & \omega=0\\ \frac{1}{2}\ , & \omega\rightarrow\infty\end{cases}$$

بنابراین نمودار $|H(j\omega)|$ بصورت زیر خواهد بود که نشان دهنده یک فیلتر بالاگذر می باشد.

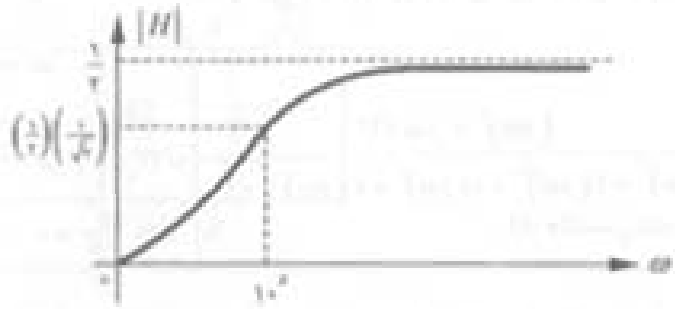


در ادامه به محاسبه فرکانس قطع ۳dB خواهیم پرداخت.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\max|H(j\omega)| \rightarrow \frac{\omega^2}{\sqrt{(2-2\omega^2)^2+(2\omega+2\omega^3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \omega = 1/01$$

$$\rightarrow \Delta\omega = 1/01$$

حال می خواهیم فیلتری همانند فیلتر فوق ولی با فرکانس قطع $\omega = 10^5$ داشته باشید.

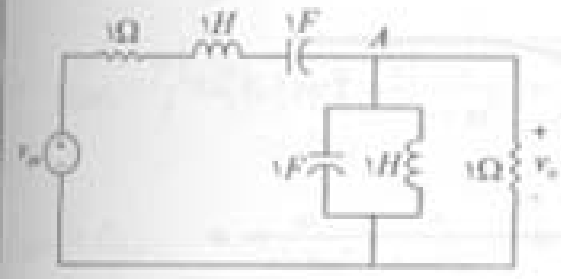


برای محاسبه مقادیر جدید عناصر ابتدا ضرایب نرمالیزاسیون را محاسبه خواهیم کرد از آنجا که فقط سطح فرکانس را افزایش داده ایم لذا $r_m = 1$ بوده و خواهیم داشت.

$$\Omega_m = \frac{\text{فرکانس قطع مطلوب}}{\text{فرکانس قطع نرمالیزه شده}} = \frac{10^5}{1/01} \approx 10^5$$

$$R_{new} = r_m R = (1)(1) = 1\Omega \quad , \quad C_{new} = \frac{C}{r_m\Omega_m} = \frac{1}{1\times 10^5} = 1\mu F \quad , \quad L_{new} = \frac{r_m}{\Omega_m}L = \frac{1}{10^5}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\mu H$$

مسئله ۸۳



شکل مسئله ۸۳

- تابع شبکه $H(j\omega)=\frac{V_o}{V_{in}}$ را تعیین کنید.
- رفتار فیلتری وفرکانس قطع را مشخص کنید.
- مقیاس مدار را چنان تغییر دهید که فرکانس مورد توجه $1000Hz$ بوده و سطح امپدانس مدار ۳۰۰ برابر شود.

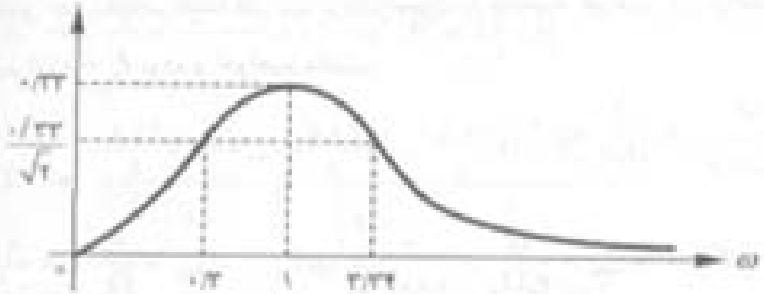
حل : با توجه به شکل مدار در حالت دایمی سینوسی داریم

KCL برای گره ① $\rightarrow$ $$\frac{V_o-V_{in}}{1+j\omega+\frac{1}{j\omega}}+\frac{V_o}{j\omega+\frac{1}{j\omega}}+\frac{V_o}{1}=0$$

$$\rightarrow H(j\omega)=\frac{V_o}{V_{in}}=\frac{(j\omega)^2+j\omega}{(j\omega)^4+3(j\omega)^3+2(j\omega)^2+3(j\omega)+1}$$

$$\rightarrow |H(j\omega)|=\left|\frac{(j\omega)^2+j\omega}{(j\omega)^4+3(j\omega)^3+2(j\omega)^2+3(j\omega)+1}\right|=\begin{cases}0 & , \omega\to 0\\ 0/33 & , \omega=1\\ \lim\limits_{\omega\to\infty}\frac{\omega^2}{\omega^2}=0 & , \omega\to\infty\end{cases}$$

بنابراین نمودار $H(j\omega)$ بصورت زیر است که نشان دهنده یک فیلتر میان گذر است.



در ادامه فرکانسهای قطع $3db$ را محاسبه خواهیم کرد.

$$|H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{2}}\max|H(j\omega)| \rightarrow \frac{\omega-\omega^3}{\sqrt{(1-2\omega^2+\omega^4)^2+(3\omega-2\omega^3)^2}}=\frac{0/33}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow \quad \omega_1 = ۰/۲ \quad , \quad \omega_2 = ۲/۲۲$$

از آنجا که سطح امپدانس ۳۰۰ برابر می شود لذا $r_m = ۳۰۰$ و فرکانس تشدید مطلوب برابر $۱۰۰۰Hz$ است بنابراین داریم

$$\Omega_m = \frac{۲\pi \times ۱۰۰۰\left(\frac{rad}{sec}\right)}{۱\left(\frac{rad}{sec}\right)} = ۲\pi \times ۱۰^{۳}$$

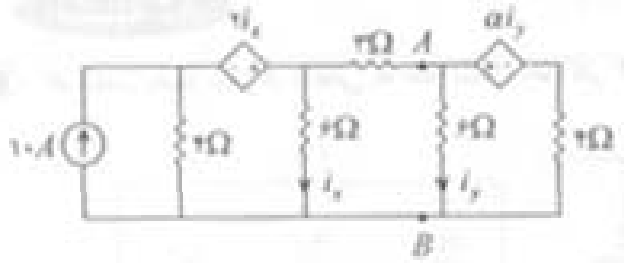
بنابراین مقادیر جدید عناصر بصورت زیر بدست خواهد آمد

$$R_{new} = r_m R = (۳۰۰)(۱) = ۳۰۰\Omega \quad , \quad L_{new} = \frac{r_m}{\Omega_m} L = \frac{۳۰۰}{۲\pi \times ۱۰^{۳}}(۱) = ۴۷/۷۵mH$$

$$C_{new} = \frac{C}{r_m \Omega_m} = \frac{۱}{۳۰۰ \times ۲\pi \times ۱۰^{۳}} = ۵۳۰/۵۲nF$$

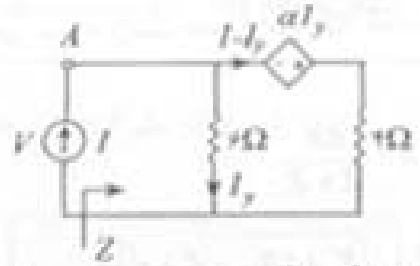
مسئله ۸۴

α را چنان تعیین کنید که حداکثر توان به مدار سمت راست دو سر A و B تحویل داده شود.



شکل مسئله ۸۴

حل : بدین منظور باید امپدانس معادل مدار سمت راست برابر مزدوج امپدانس معادل مدار سمت چپ باشد که آنها را بدست خواهیم آورد.

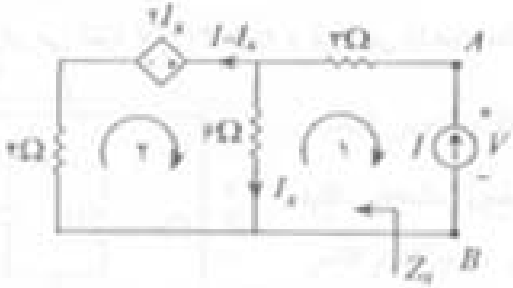


با توجه به شکل فوق $I_y = \frac{V}{۶}$ بوده و خواهیم داشت.

$$KVL \text{ برای حلقه بیرونی} \rightarrow \quad -V + \alpha I_y + ۲(I - I_y) = ۰ \quad \rightarrow \quad -V + \alpha\left(\frac{V}{۶}\right) + ۲\left(I - \frac{V}{۶}\right) = ۰$$

$$\rightarrow \quad Z = \frac{V}{I} = \frac{۲۲}{۱۰ - \alpha}$$

و برای مدار سمت چپ دو سر A و B داریم.



KVL برای مش ② $\rightarrow \quad -2(I-I_x)-2I_x+6I_x=0 \quad \rightarrow \quad I_x=\frac{I}{2}$

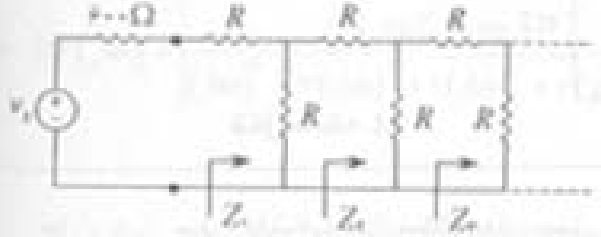
KVL برای مش ① $\rightarrow \quad -6\left(\frac{I}{2}\right)-2I+V=0 \quad \rightarrow \quad V=6I \quad \rightarrow \quad Z_o=\frac{V}{I}=6$

شرط انتقال توان ماکزیمم عبارتست از:

$$Z=Z_o \quad \rightarrow \quad \frac{22}{100-a}=6 \quad \rightarrow \quad a=6$$

مسئله ۸۵

R چقدر باشد تا توان انتقالی به خط انتقال حداکثر گردد.



شکل مسئله ۸۵

حل : از آنجا که تعداد عناصر سمت راست نامعین می باشد لذا $Z_1=Z_2=Z_3=\ldots$ می باشد همچنین می توان نوشت.

$$Z_1=R+R\parallel Z_2=R+R\parallel Z_1=R+\frac{RZ_1}{R+Z_1}$$

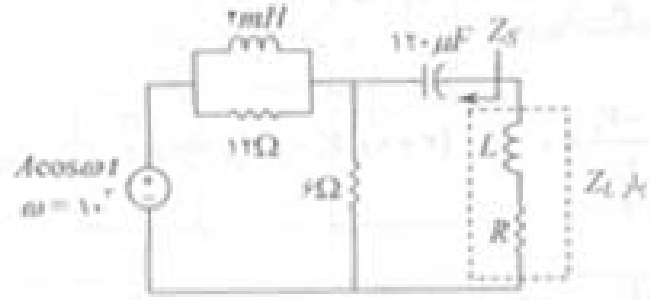
$$Z_1^2-RZ_1-R^2=0 \quad \rightarrow \quad Z_1=\frac{R+\sqrt{R^2+4R^2}}{2}=\frac{R+\sqrt{5}R}{2}=1/618R \quad , \quad Z_2=600$$

شرط انتقال توان حداکثر عبارتست از:

$$Z_1=Z_2=600 \quad \rightarrow \quad 1/618R=600 \quad \rightarrow \quad R=371/67\Omega$$

مسئله ۸۶

R و L را چنان تعیین کنید که حداکثر توان متوسط به بار Z_L منتقل شود.



شکل مسئله ۸۶

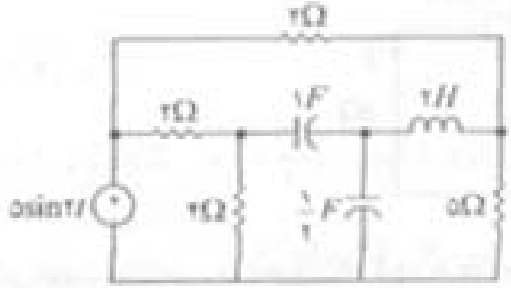
حل: ابتدا امپدانس دیده شده از دو سر بار را حساب می کنیم.

$$Z_s = \frac{1}{j0/1200\omega} + (6 \parallel 12 \parallel j2) = 2 - j6/33 \quad , \quad Z_L = R + j\omega L$$

شرط انتقال توان ماکزیمم عبارتست از:

$$Z_L = Z_s \rightarrow R + j10^4 L = 2 + j6/33 \rightarrow \begin{cases} R = 2 \\ 10^4 L = 6/33 \rightarrow L = 6/33 mH \end{cases}$$

مسئله ۸۷

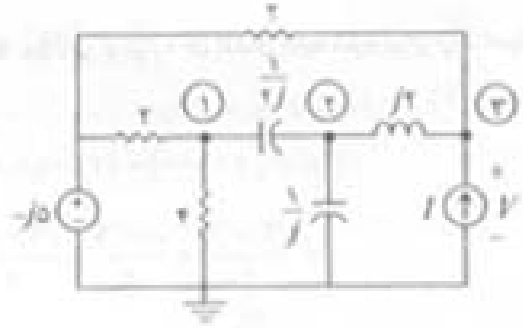


شکل مسئله ۸۷

توان تحویلی به مقاومت ۵Ω را حساب کنید.

بجای مقاومت ۵Ω چه امپدانسی جایگزین کنیم تا توان تحویلی به آن ماکزیمم شود.

حل: ابتدا معادل تونن دو سر مقاومت ۵Ω را بدون در نظر گرفتن خودش بدست می آوریم.



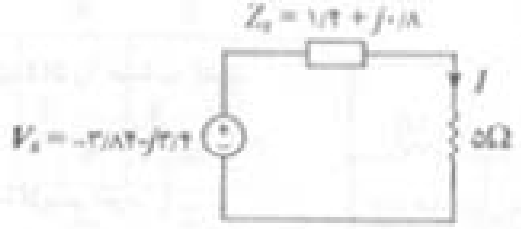
KCL برای گره ② $\rightarrow \dfrac{V_2 - V_3}{j2} + \dfrac{V_2 + j5}{2} - I = 0 \rightarrow -V_3 + (1+j)V_2 = j2I + 5$

KCL برای گره ③ $\rightarrow \dfrac{V_3 - V_1}{\frac{1}{2j}} + \dfrac{V_3}{\frac{1}{j}} + \dfrac{V_3 - V_2}{j2} = 0 \rightarrow 2V_3 - 5V_2 - V_3 = 0$

KCL برای گره ① $\rightarrow \dfrac{V_1 + j5}{2} + \dfrac{V_1}{4} + \dfrac{V_1 - V_3}{\frac{1}{2j}} = 0 \rightarrow (3+8j)V_1 - 8jV_3 = -j10$

$$\rightarrow V = V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & j2I+5 \\ 0 & -5 & 0 \\ 3+8j & -8j & -j10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1+j \\ 2 & -5 & -1 \\ 3+8j & -8j & 0 \end{vmatrix}} = (1/2 + j0/8)I + (-3/84 - j3/2)$$

بنابراین مدار معادل شکل مسئله را می توان بصورت زیر رسم کرد.



و در نهایت توان متوسط تحویل داده شده به مقاومت 5Ω بصورت زیر بدست می آید.

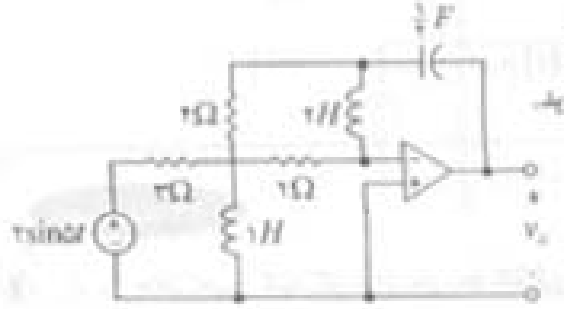
$$I = \frac{V_e}{Z_e + 5} = \frac{-3/84 - j3/2}{6/2 + j0/8} \rightarrow P_{av} = \frac{|I|^2}{2}\mathrm{Re}\{Z\} = \frac{1}{2}\left(\frac{(3/84)^2 + (3/2)^2}{(6/2)^2 + (0/8)^2}\right)(5) = 0/81\ W$$

امپدانس جایگزین برای اینکه حداکثر توان به آن انتقال داده شود برابر $\bar{Z}_e$ است.

$$Z = \bar{Z}_e = 1/2 - j0/8$$

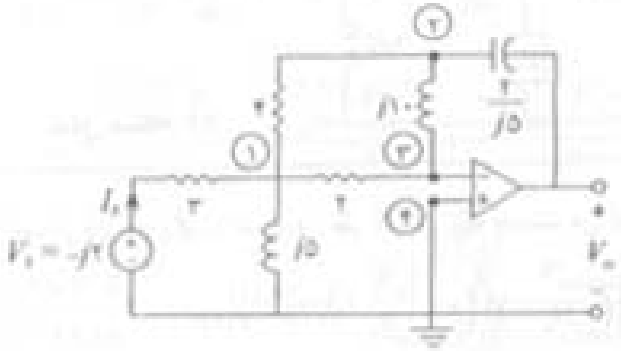
مسئله ۸۸

- توان مختلط تحویلی منبع ولتاژ را بدست آورید.
- ولتاژ v_o را در حالت دایمی سینوسی بدست آورید.



شکل مسئله ۸۸

حل: در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود.



با توجه به شکل فوق و با فرض ایده آل بودن آپ امپ داریم.

$$V_2 = V_3 = 0$$

KCL برای گره ۳ $\rightarrow \frac{0-V_2}{2} + \frac{0-V_3}{j10} = 0 \rightarrow j5V_2 + V_3 = 0 \rightarrow V_3 = -j5V_2$

KCL برای گره ۱ $\rightarrow \frac{V_1-(-j2)}{3} + \frac{V_1}{j5} + \frac{V_1-0}{2} + \frac{V_1-(-j5V_1)}{4} = 0 \rightarrow V_1 = 0.36 - j0.32$

$$I_o = \frac{V_s - V_1}{3} = \frac{-j2-(0.36-j0.32)}{3} = 0.16 - j0.55$$

توان مختلط تحویلی $\rightarrow P = \frac{1}{2}V_s I_o^* = \frac{1}{2}(-j2)(0.16+j0.55) = 0.55 - j0.16$

و در نهایت با نوشتن KCL برای گره ۲ V_o را بدست خواهیم آورد.

$$V_2 = -j5V_2 = -j5(-0.36-j0.32) = (-1.6+j1.55)$$

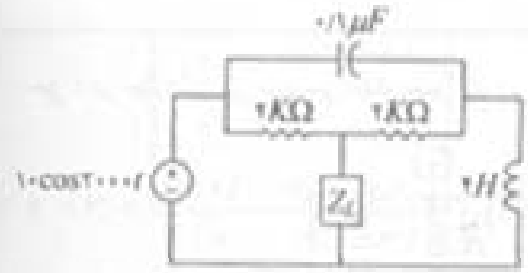
KCL برای گره ۲ $\rightarrow \frac{V_2-V_1}{4} + \frac{V_2-0}{j10} + \frac{V_2-V_o}{\frac{2}{j5}} = 0$

$$\rightarrow \frac{(-۱/۶+j۱/۵۵)-(-۰/۳۱-j۰/۳۲)}{۲}+\frac{(-۱/۶+j۱/۵۵)}{j۱۰}+\frac{(-۱/۶+j۱/۵۵)-V_o}{\frac{۲}{j۵}}=۰$$

$$\rightarrow V_o=-۱/۳۲+j۱/۶۲=۲/۰۹\angle ۱۲۹^\circ \quad \rightarrow \quad v_o(t)=۲/۰۹\cos(۵t+۱۲۹^\circ)$$

مسئله ۸۹

Z_L را چنان تعیین کنید که توان متوسط انتقالی به آن حداکثر باشد.



شکل مسئله ۸۹

حل : ابتدا امپدانس دیده شده از دو سر Z_L را بدون در نظر گرفتن Z_L بدست می آوریم.

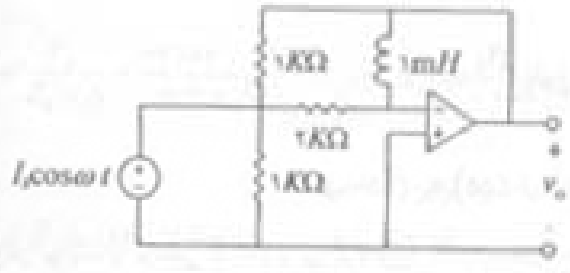
$$Z_s=\left(۲۰۰۰+(j۸۰۰۰)\parallel(-j۵۰۰۰)\right)\parallel ۲۰۰۰=۱۹۱۷/۴-j۲۷۵/۲$$

و مقدار Z_L برای انتقال حداکثر توان متوسط به آن برابر است با:

$$\rightarrow Z_L=\bar{Z}_s=۱۹۱۷/۴+j۲۷۵/۲$$

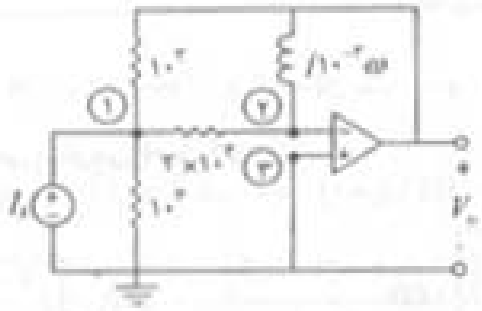
مسئله ۹۰

در چه فرکانسی مقدار RMS ولتاژ v_o حداکثر می شود.



شکل مسئله ۹۰

حل : در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر می باشد.



با فرض اینکه آپ امپ ایده آل باشد و با توجه به شکل فوق داریم:

$$V_1 = V_2 = 0$$

$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \frac{0-V_1}{2\times10^3} + \frac{0-V_o}{j10^{-3}\omega} = 0 \rightarrow V_1 = -\frac{2\times10^6}{j\omega}V_o$$

$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow -I_s + \frac{\frac{2\times10^6}{j\omega}V_o}{10^3} + \frac{-\frac{2\times10^6}{j\omega}V_o - 0}{2\times10^3} + \frac{-\frac{2\times10^6}{j\omega}V_o - V_o}{10^3} = 0$$

$$\rightarrow H(j\omega) = \frac{V_o}{I_s} = \frac{-j2\times10^3\omega}{10^3 + 2j\omega} \rightarrow |H(j\omega)| = \frac{|V_o|}{|I_s|} = \frac{\frac{|V_o|}{\sqrt{2}}}{\frac{|I_s|}{\sqrt{2}}} = \frac{V_{o(rms)}}{I_{s(rms)}} = \frac{2\times10^3\omega}{\sqrt{10^{12}+4\omega^2}}$$

$$\rightarrow V_{o(rms)} = \frac{2\times10^3\omega}{\sqrt{10^{12}+4\omega^2}} I_{s(rms)}$$

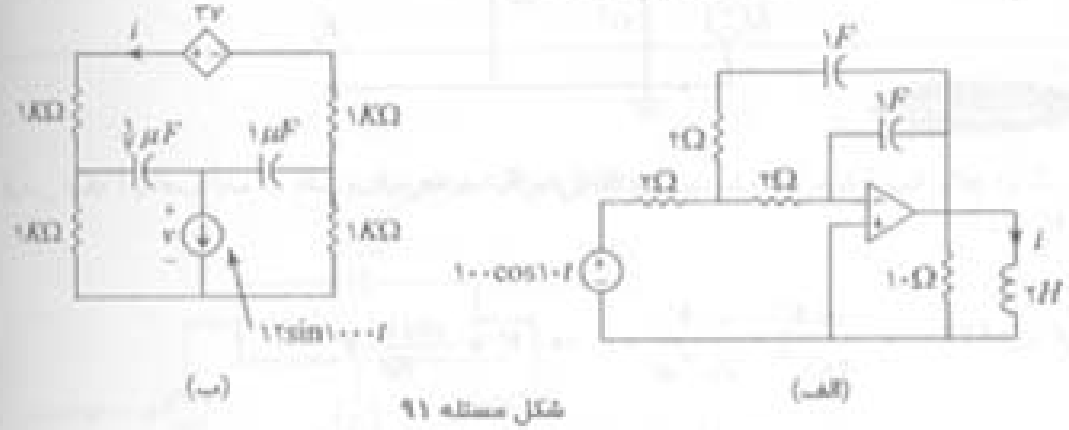
برای محاسبه فرکانسی که به ازای آن $V_{o(rms)}$ حداکثر می شود از $V_{o(rms)}$ نسبت به ω مشتق گرفته و برابر صفر قرار می دهیم.

$$\frac{dV_{o(rms)}}{d\omega} = \frac{2\times10^3\sqrt{10^{12}+4\omega^2} - \frac{8\times10^3\omega}{\sqrt{10^{12}+4\omega^2}}}{10^{12}+4\omega^2} = \frac{2\times10^{12}}{\left(10^{12}+4\omega^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

باتوجه به عبارت بدست آمده برای مشتق $V_{o(rms)}$ واضح است که فقط به ازای $\omega \rightarrow \infty$ مشتق برابرصفر خواهد شد و جواب مسئله $\omega = \infty$ است.

مسئله ۹۱

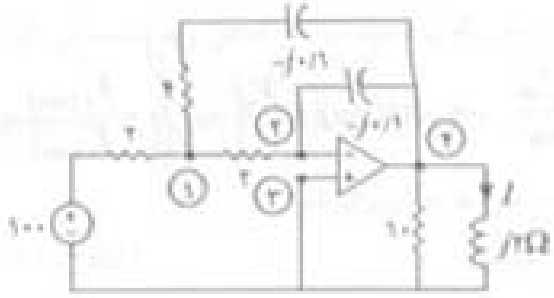
جریان i را در حالت دایمی سینوسی تعیین کنید.



(الف) (ب)

شکل مسئله ۹۱

حل : الف ـ در حالت دایمی سینوسی شکل مدار بصورت زیر است.



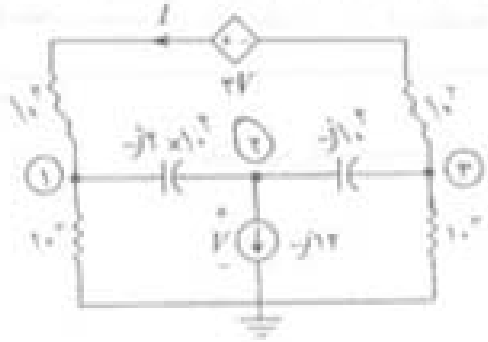
با فرض ایده آل بودن آپ امپ و با توجه به شکل فوق $V_1 = V_2 = 0$ بوده و خواهیم داشت.

$$KCL \text{ برای گره } ② \rightarrow \frac{0-V_1}{2} + \frac{0-V_2}{-j0.1} = 0 \rightarrow V_1 = -j2V_2$$

$$KCL \text{ برای گره } ① \rightarrow \frac{-j2V_2-100}{2} + \frac{-j2V_2-V_2}{2-j0.1} + \frac{-j2V_2-0}{2} = 0 \rightarrow V_2 = -0.01+j2$$

$$\rightarrow I = \frac{-0.01+j2}{j20} = -0.0005 + j0.1 \approx 0.1\angle 0.3^\circ \rightarrow i(t) = 0.1\cos(10t + 0.3^\circ)$$

ب ـ در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود.



با توجه به شکل فوق $V = V_2$ بوده و خواهیم داشت.

KVL برای حلقه بیرونی $\rightarrow \quad -V_1 - 10^3 I + 3V_2 - 10^3 I + V_2 = 0 \quad \rightarrow \quad V_2 = V_1 - 3V_2 + 2\times10^3 I$

KCL برای گره ① $\rightarrow \quad \dfrac{V_1}{10^3} + \dfrac{V_1 - V_2}{-j2\times10^3} - I = 0 \quad \rightarrow \quad (1 + j0/5)V_1 - j0/5V_2 - 10^3 I = 0$

KCL برای گره ② $\rightarrow \quad \dfrac{V_2 - V_1}{-j2\times10^3} - j12 + \dfrac{V_2 - \left(V_1 - 3V_2 + 2\times10^3 I\right)}{-j10^3} = 0$

$$\rightarrow \quad -3V_1 + 9V_2 - 2\times10^3 I = 24\times10^3$$

KCL برای گره ③ $\rightarrow \quad \dfrac{V_3 - V_1}{-j2\times10^3} - j12 + \dfrac{V_3 - \left(V_1 - 3V_2 + 2\times10^3 I\right)}{-j10^3} = 0$

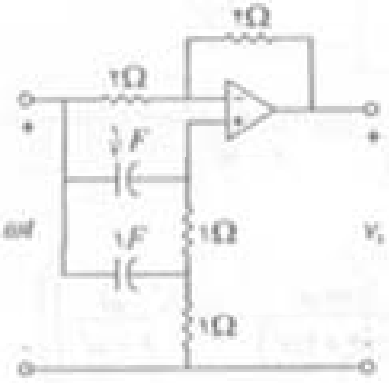
$$\rightarrow \quad (1 + j)V_1 - (3 + j2)V_2 + 10^3(3 + j2)I = 0$$

$$\rightarrow I = \frac{\begin{vmatrix} 1+j0/5 & -j0/5 & 0 \\ -3 & 9 & 24\times10^3 \\ 1+j & -(3+j2) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+j0/5 & -j0/5 & -10^3 \\ -3 & 9 & -2\times10^3 \\ 1+j & -(3+j2) & 10^3(3+j2) \end{vmatrix}} = 2/2 + j6/9 = 8/1\angle 58/3^\circ$$

$$\rightarrow i(t) = 8/1\cos\left(1000t + 58/3^\circ\right)$$

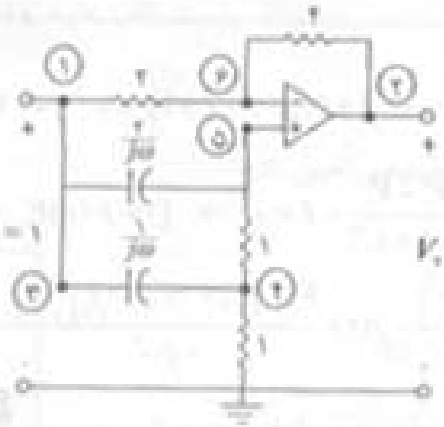
مسئله ۹۲

خروجی حالت دایمی سینوسی v_o را تعیین کنید.



شکل مسئله ۹۲

حل: در حالت دایمی سینوسی شکل مدار را می توان بصورت زیر رسم کرد.



با فرض ایده آل بودن آپ امپ $V_4 = V_5$ بوده و با توجه به شکل $V_s = 1$ می باشد.

$$\text{KCL برای گره ۵} \rightarrow \frac{V_5 - 1}{2} + \frac{V_5 - V_o}{2} = 0 \rightarrow V_5 = \frac{V_o + 2}{3}$$

$$\text{KCL برای گره ۴} \rightarrow \frac{V_4 - 1}{\frac{1}{j\omega}} + \frac{V_4}{1} + \frac{V_4 - \frac{V_5 + 2}{3}}{1} = 0 \rightarrow -V_5 + (4 + j2\omega)V_4 = j3\omega$$

$$\text{KCL برای گره ۳} \rightarrow \frac{1 - V_3}{\frac{1}{j\omega}} + \frac{1 - \frac{V_5 + 2}{3}}{\frac{2}{j\omega}} + \frac{1 - \frac{V_5 + 2}{3}}{2} = 0 \rightarrow (1 + j\omega)V_3 + j4\omega V_5 = 1 + j7\omega$$

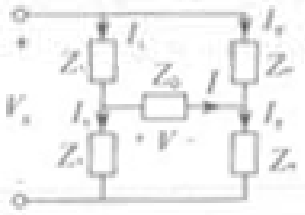
$$\rightarrow V_5 = \frac{\begin{vmatrix} j3\omega & 4 + j2\omega \\ 1 + j7\omega & j4\omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 4 + j\omega \\ 1 + j\omega & j4\omega \end{vmatrix}} = \frac{-(4 + 2\omega^2) + j22\omega}{4 - \omega^2 + j\omega}$$

$$\rightarrow V_5 = \sqrt{\frac{(4 + 2\omega^2)^2 + (22\omega)^2}{(4 - \omega^2)^2 + \omega^2}} \angle \left(\tan^{-1} \frac{22\omega}{-(4 + 2\omega^2)} - \tan^{-1} \frac{\omega}{4 - \omega^2} \right)$$

$$\rightarrow v_5(t) = \sqrt{\frac{(4 + 2\omega^2)^2 + (22\omega)^2}{(4 - \omega^2)^2 + \omega^2}} \cos\left(\omega t - \left(\tan^{-1} \frac{22\omega}{-(4 + 2\omega^2)} - \tan^{-1} \frac{\omega}{4 - \omega^2} \right) \right)$$

مسئله ۹۴

نشان دهید که اگر $Z_1Z_4 = Z_2Z_3$ باشد، آنگاه $V = I = 0$.



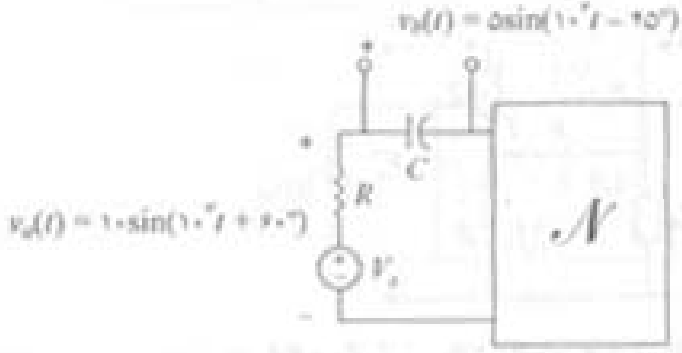
شکل مسئله ۹۴

حل: با فرض $I = 0$، $I_1 = I_2$ و $I_3 = I_4$ خواهد شد و با فرض $V = 0$ و با نوشتن KVL برای دو حلقه مستقل خواهیم داشت.

$$\begin{cases} -Z_1I_1 + Z_2I_2 - 0 = 0 \rightarrow Z_1I_1 = Z_2I_2 \\ -Z_3I_3 + 0 + Z_4I_4 = 0 \rightarrow Z_3I_3 = Z_4I_4 \end{cases} \rightarrow \frac{Z_1I_1}{Z_3I_3} = \frac{Z_2I_2}{Z_4I_4} \rightarrow Z_1Z_4 = Z_2Z_3$$

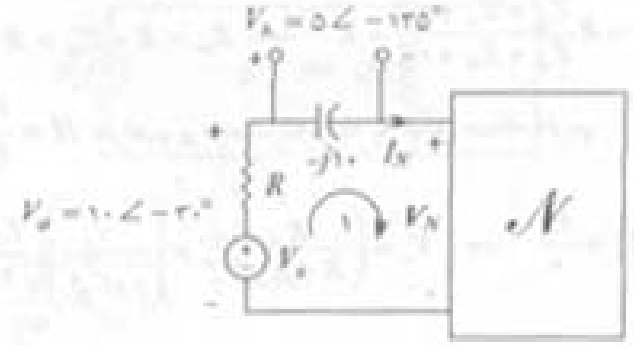
مسئله ۹۵

امپدانس دیده شده در سرهای مدار A را تعیین کنید. (امپدانس خازن برابر 10Ω است)



شکل مسئله ۹۵

حل: در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر است.



$$I_x = \frac{5\angle -135}{-j10} = \frac{5\angle -135}{10\angle -90^\circ} = 0.5\angle -45^\circ = 0.35 - j35$$

برای مش ۱ $KVL \rightarrow -V_a + V_b + V_x = 0 \rightarrow V_x = V_a - V_b = 10\angle -30^\circ - 5\angle -135^\circ$

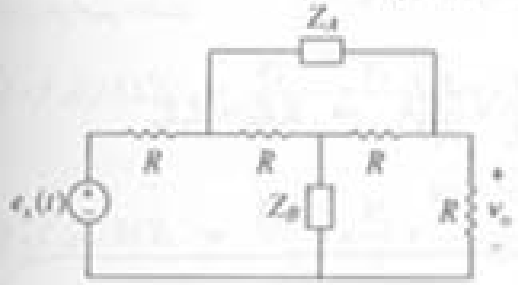
$$= 12.5 - j1.5$$

$$\rightarrow Z_x = \frac{V_x}{I_x} = \frac{12.5 - j1.5}{0.35 - j35} = 11.32 + j15.18\ \Omega$$

مسئله ۹۶

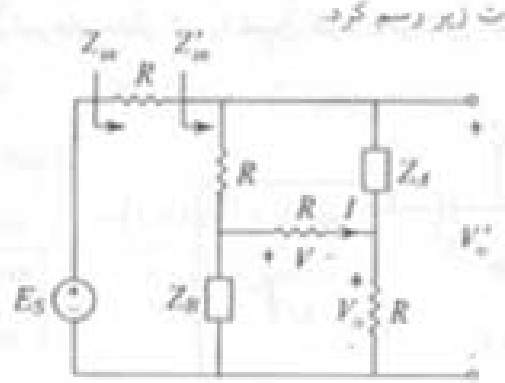
نشان دهید امپدانس ورودی مدار برابر $2R$ است. $(Z_A Z_B = R^2)$

نشان دهید $H = \frac{V_o}{E_s} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{Z_A}{R}}$



شکل مسئله ۹۶

حل: مدار را می توان بصورت زیر رسم کرد.



با توجه به صورت مسئله $Z_A Z_B = RR$ می باشد، بنابراین طبق مسئله ۹۴ باید $V = I = 0$ باشد. لذا خواهیم داشت.

$$Z'_{in} = (Z_A + R) \| (Z_B + R) = \frac{Z_A Z_B + R(Z_A + Z_B) + R^2}{Z_A + R + Z_B + R} = \frac{R^2 + R(Z_A + Z_B) + R^2}{Z_A + Z_B + 2R}$$

$$= R\frac{Z_A + Z_B + 2R}{Z_A + Z_B + 2R} = R \rightarrow Z_{in} = R + Z'_{in} = R + R = 2R$$

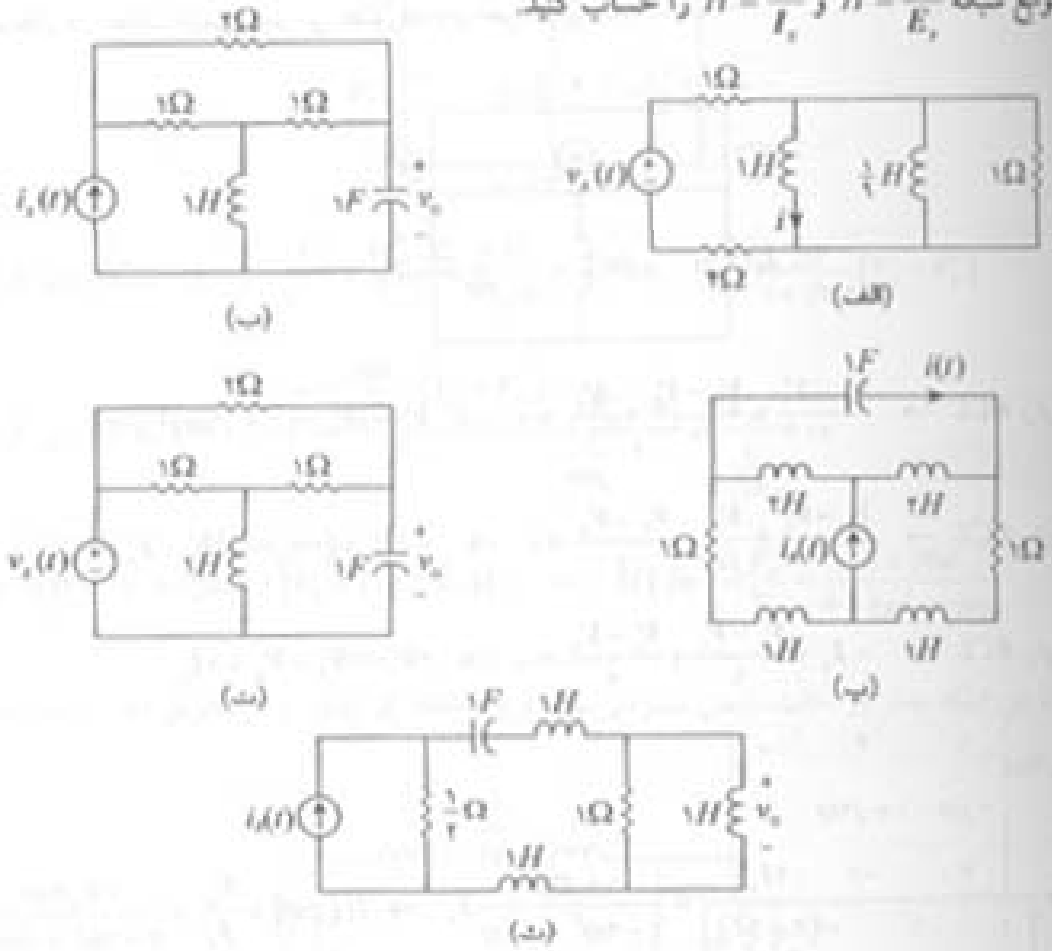
در ادامه به محاسبه $H = \frac{V_o}{E_s}$ خواهیم پرداخت. با توجه به شکل مسئله داریم.

$$V'_o = \frac{Z'_{in}}{R + Z'_{in}} E_s = \frac{R}{R + R} E_s = \frac{E_s}{2} \rightarrow V_o = \left(\frac{R}{R + Z_A}\right) V'_o = \left(\frac{1}{1 + \frac{Z_A}{R}}\right)\left(\frac{E_s}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{Z_A}{R}} E_s$$

$$\rightarrow \quad H = \frac{V_o}{E_s} = \frac{\frac{1}{4}}{1 + \frac{Z_A}{R}}$$

مسئله ۹۷

الف) توابع شبکه $H = \frac{I}{E_s}$ و $H = \frac{V_o}{I_s}$ را حساب کنید.



شکل مسئله ۹۷

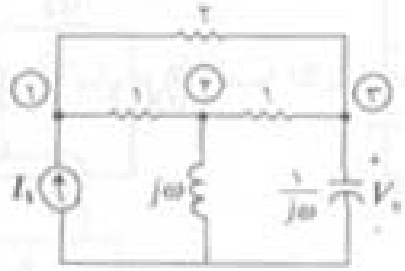
حل: الف ـ در حالت دایمی سینوسی شکل مسئله بصورت زیر خواهد بود.

$$Z = \left(j\omega \,\|\, \frac{j\omega}{9} \,\|\, 1 \right) = \frac{1}{\frac{1}{j\omega} + \frac{9}{j\omega} + 1} = \frac{j\omega}{10 + j\omega}$$

$$V = \frac{Z}{1+2+Z}V_s = \frac{\frac{j\omega}{10+j\omega}}{5+\frac{j\omega}{10+j\omega}}V_s = \frac{j\omega}{50+j6\omega}V_s$$

$$\rightarrow I = \frac{V}{j\omega} = \frac{1}{50+j6\omega}V_s \quad \rightarrow H(j\omega) = \frac{I}{V_s} = \frac{1}{50+j6\omega}$$

ب ـ مدار در حالت دایمی سینوسی بصورت زیر خواهد بود.



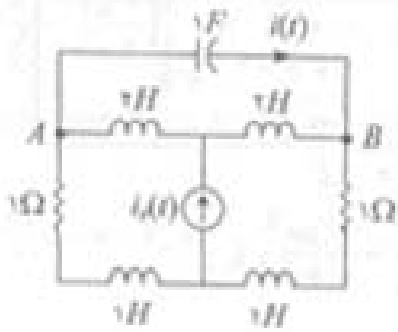
KCL برای گره ② $\rightarrow \frac{V_s-V_1}{2}+\frac{V_2-V_1}{1}+\frac{V_2}{\frac{1}{j\omega}}=0 \rightarrow V_1+3V_2-(2+j2\omega)V_o=0$

KCL برای گره ③ $\rightarrow \frac{V_o-V_1}{1}+\frac{V_o}{j\omega}+\frac{V_o-V_2}{1}=0 \rightarrow -5V_1+(1+j2\omega)V_2-V_o=0$

KCL برای گره ① $\rightarrow -I_s+\frac{V_1-V_o}{1}+\frac{V_1-V_2}{2}=0 \rightarrow 3V_1-2V_2-V_o=2I_s$

$$\rightarrow V_o = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -j\omega & 1+j2\omega & 0 \\ 3 & -2 & 2I_s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -(2+2j) \\ -5 & 1+j2\omega & -j\omega \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1+j2\omega}{2-2\omega^2+j3\omega}I_s \rightarrow H(j\omega)=\frac{V_o}{I_s}=\frac{1+j2\omega}{2-2\omega^2+j3\omega}$$

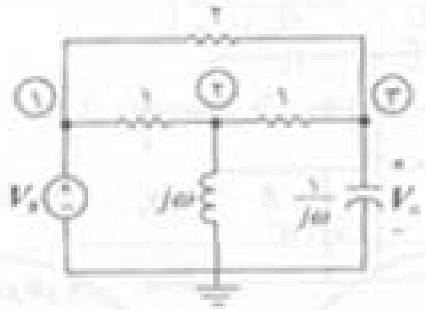
پ ـ شکل (ب) را مجدداً رسم می کنیم.



یک تقارن $V_s = V_0$ بوده و $i(t) = 0$ می باشد بنابراین داریم

$$H(j\omega) = \frac{I}{I_s} = \frac{0}{I_s} = 0$$

ث ـ در حالت دایمی مدار بصورت زیر می باشد

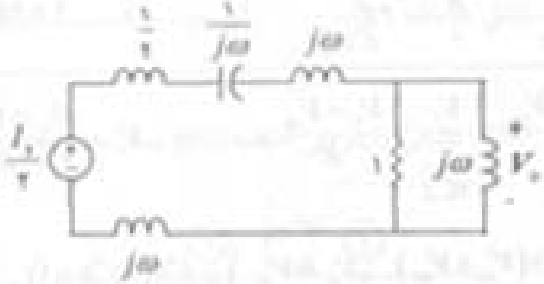


KCL برای گره ۲ $\rightarrow \frac{V_2 - V_s}{1} + \frac{V_2 - V_o}{1} + \frac{V_2}{j\omega} = 0 \rightarrow V_2 = \frac{j\omega}{1 + j2\omega}(V_s + V_o)$

KCL برای گره ۳ $\rightarrow \frac{V_o - \frac{j\omega}{1+j2\omega}(V_s + V_o)}{1} + \frac{V_o - V_s}{2} + \frac{V_o}{\frac{1}{j\omega}} = 0$

$$\rightarrow \left(2(j\omega)^2 + 6j\omega + 3\right)V_o = (1 + 2j\omega)V_s \rightarrow H(j\omega) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{1 + j2\omega}{3 - 2\omega^2 + j6\omega}$$

ث ـ با فرض اینکه مدار در حالت دایمی سینوسی بوده و با استفاده از تبدیل توئن ـ نرتن مدار را بصورت زیر رسم می کنیم



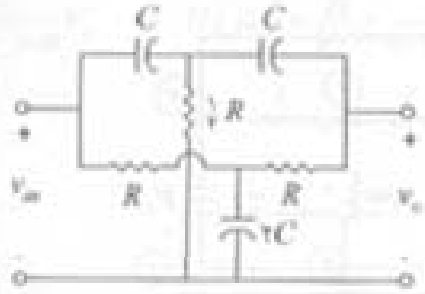
با استفاده از قاعده تقسیم ولتاژ خواهیم داشت

$$\rightarrow V_o = \frac{(1)\,||\,(j\omega)}{(1)\,||\,(j\omega) + \frac{1}{2} + \frac{1}{j\omega} + j\omega + j\omega}\left(\frac{I_s}{2}\right) = \frac{\frac{j\omega}{1 + j\omega}}{\frac{j\omega}{1 + j\omega} + \frac{1}{2} + \frac{1}{j\omega} + j2\omega}\left(\frac{I_s}{2}\right)$$

$$= \frac{(j\omega)^2}{2(j\omega)^3 + 7(j\omega)^2 + 3j\omega + 2} I_s \rightarrow H(j\omega) = \frac{V_o}{I_s} = \frac{-\omega^2}{2 - 7\omega^2 + j(3\omega - 2\omega^3)}$$

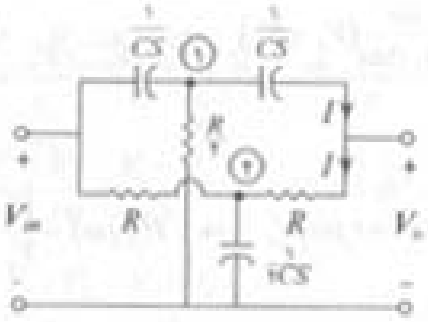
مسئله ۹۸

$H(j\omega)=\frac{V_o}{V_{in}}$ را محاسبه و نوع رفتار فیلتری مدار را تعیین کنید.



شکل مسئله ۹۸ (فیلتر T دوقلو)

حل : با جایگزینی $s=j\omega$ ، مدار حالت دائمی سینوسی بصورت زیر خواهد بود.



$$KCL \text{ برای گره } ① \rightarrow \frac{V_1-V_{in}}{\frac{1}{Cs}}+\frac{V_1}{\frac{R}{2}}+\frac{V_1-V_o}{\frac{1}{Cs}}=0 \rightarrow V_1=\frac{RCs(V_o+V_{in})}{2+2RCs}$$

$$KCL \text{ برای گره } ② \rightarrow \frac{V_2-V_{in}}{R}+\frac{V_2}{\frac{1}{2Cs}}+\frac{V_2-V_{in}}{R}=0 \rightarrow V_2=\frac{V_o+V_{in}}{2+2RCs}$$

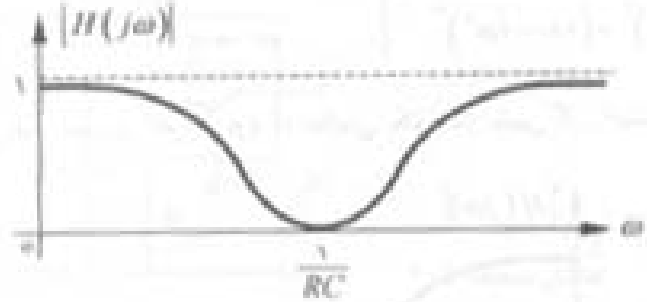
$$I=\frac{V_1-V_o}{\frac{1}{Cs}+R}=\frac{Cs}{1+RCs}\left(\frac{RCs(V_o+V_{in})}{2+2RCs}-\frac{V_o+V_{in}}{2+2RCs}\right)=\frac{Cs(RCs-1)}{2(1+RCs)^2}(V_o+V_{in})$$

$$V_o=IR+V_1=\frac{RCs(RCs-1)}{2(1+RCs)^2}(V_o+V_{in})+\frac{(V_o+V_{in})}{2+2RCs}=\frac{(RCs)^2+1}{2(1+RCs)^2}(V_o+V_{in})$$

$$\frac{V_o}{V_{in}}=\frac{R^2C^2s^2+1}{R^2C^2s^2+2RCs+1} \rightarrow H(j\omega)=\frac{1-R^2C^2\omega^2}{1-R^2C^2\omega^2+j2RC\omega}$$

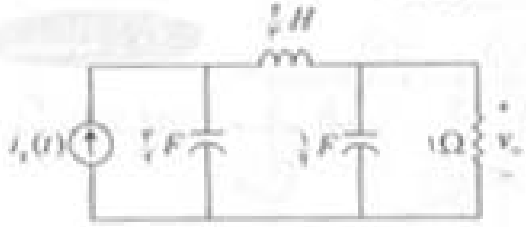
$$|H(j\omega)| = \frac{|1 - R^2C^2\omega^2|}{\sqrt{(1 - R^2C^2\omega^2)^2 + (2RC\omega)^2}} = \begin{cases} \frac{1}{1} = 1 & , \quad \omega \to 0 \\ 0 & , \quad \omega \to \frac{1}{RC} \\ \frac{R^2C^2\omega^2}{R^2C^2\omega^2} = 1 & , \quad \omega \to \infty \end{cases}$$

بنابراین نمودار $|H(j\omega)|$ بصورت زیر خواهد بود که نشان دهنده یک فیلتر میان گذر است.



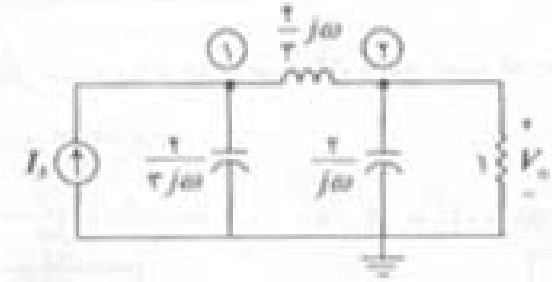
مسئله ۹۹

◁ $H(j\omega) = \frac{V_o}{I_s}$ را تعیین و رفتار فیلتری مدار را مشخص کنید.



شکل مسئله ۹۹

حل: با فرض اینکه مدار در حالت دایمی سینوسی است شکل مدار بصورت زیر خواهد شد.



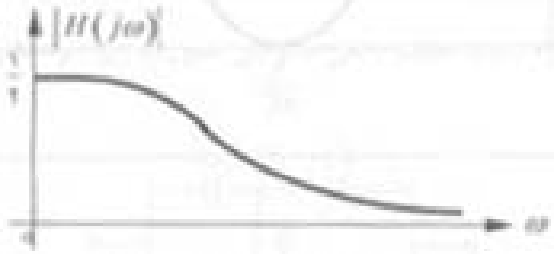
KCL برای گره ۲ $\rightarrow \frac{V_o}{1} + \frac{V_o}{\frac{2}{j\omega}} + \frac{V_o - V_1}{\frac{2}{3}j\omega} = 0 \rightarrow V_1 = \frac{1}{3}\left(2(j\omega)^2 + 2j\omega + 3\right)V_o$

KCL برای گره ① $\rightarrow$ $$-I_s+\frac{\frac{1}{2}\left(2(j\omega)^2+2j\omega+3\right)V_o}{\frac{2}{3j\omega}}+\frac{\frac{1}{2}\left(2(j\omega)^2+2j\omega+3\right)V_o-V_o}{\frac{2}{3}j\omega}=0$$

$$\rightarrow H(j\omega)=\frac{V_o}{I_s}=\frac{1}{(j\omega)^3+2(j\omega)^2+2(j\omega)+2}=\frac{1}{2-2\omega^2+j\left(2\omega-2\omega^3\right)}$$

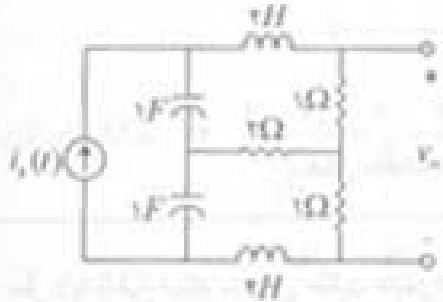
$$|H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\left(2-2\omega^2\right)^2+\left(2\omega-2\omega^3\right)^2}}=\begin{cases}\frac{1}{2} & , \quad \omega\rightarrow 0\\ 0 & , \quad \omega\rightarrow\infty\end{cases}$$

بنابراین نمودار $|H(j\omega)|$ بصورت زیر خواهد بود که نمایش یک فیلتر پایین گذر است.



مسئله ۱۰۰

$H(j\omega)=\frac{V_o}{I_s}$ را حساب کنید.



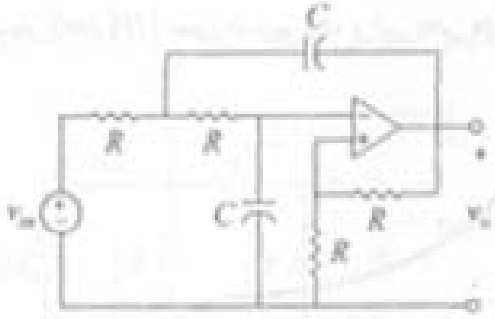
شکل مسئله ۱۰۰

حل : با توجه به شکل مسئله و با توجه به مسئله ۹۲، واضح است که جریان و ولتاژ مقاومت 2Ω برابر صفر است و لذا مدار بصورت زیر خواهد بود.

$$\rightarrow V_o = \frac{2}{\frac{2}{j\omega} + 2 + j\omega}\left(\frac{2I_s}{j\omega}\right) \rightarrow H(j\omega) = \frac{V_o}{I_s} = \frac{2}{1 - 2\omega^2 + j\omega}$$

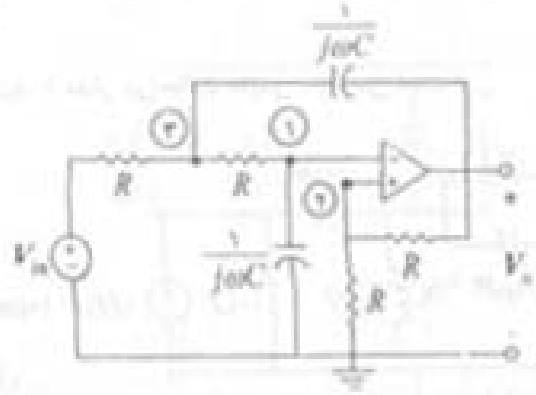
مسئله ۱۰۱

$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_{in}}$ را حساب کرده و رفتار فیلتری آن را مشخص کنید.



شکل مسئله ۱۰۱

حل : در حالت دایمی سینوسی شکل مدار بصورت زیر است.



با فرض اینکه آی بودن آپ امپ و با بکارگیری قاعده تقسیم ولتاژ داریم.

$$V_1 = V_2 = \frac{R}{R+R}V_o = \frac{V_o}{2}$$

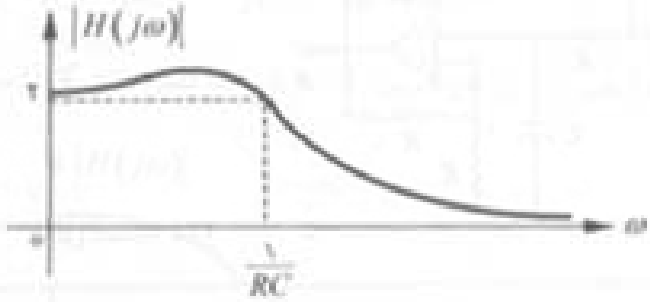
KCL برای گره ① $\rightarrow \dfrac{\frac{V_o}{2}}{\frac{1}{j\omega C}} + \dfrac{\frac{V_o}{2} - V_2}{R} = 0 \rightarrow V_2 = \frac{1}{2}(1 + jRC\omega)V_o$

KCL برای گره ② $\rightarrow \dfrac{\frac{1}{2}(1 + jRC\omega)V_o - V_{in}}{R} + \dfrac{\frac{1}{2}(1 + jRC\omega)V_o - \frac{V_o}{2}}{R} = 0$

$$+\frac{\frac{1}{2}(1+jRC\omega)V_o - V_o}{\frac{1}{j\omega C}} = 0 \rightarrow H(j\omega) = \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{2}{(1-R^2C^2\omega^2)+jRC\omega}$$

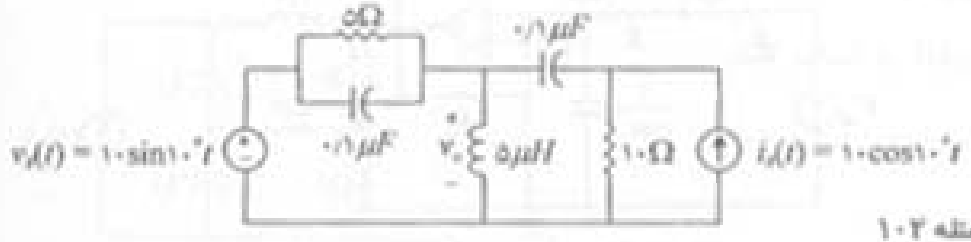
$$|H(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{(1-R^2C^2\omega^2)^2+(RC\omega)^2}} = \begin{cases} 2 & , \quad \omega \to 0 \\ 2 & , \quad \omega \to \frac{1}{RC} \\ 0 & , \quad \omega \to \infty \end{cases}$$

بنابراین نمودار $|H(j\omega)|$ بصورت زیر بوده و این یعنی مدار یک فیلتر پایین گذر است.



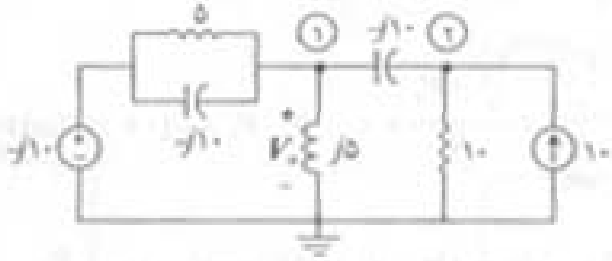
مسئله ۱۰۲

$v_o(t)$ را حساب کنید. (مدار در حالت دایمی سینوسی است)



شکل مسئله ۱۰۲

حل : در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر می باشد.



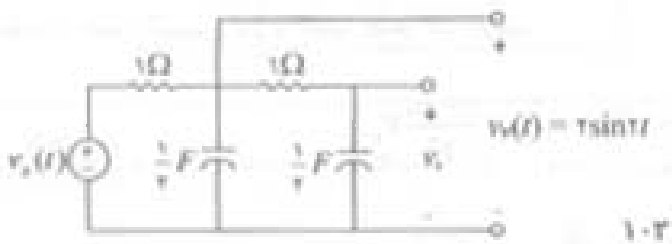
$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \frac{V_2 - V_o}{-j10} + \frac{V_2}{10} - 10 = 0 \rightarrow V_2 = \frac{1}{2}(1+j)V_o + 50 - j50$$

$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow \frac{V_o+j10}{5}+\frac{V_o+j10}{-j10}+\frac{V_o}{j5}+\frac{V_o-\left[\frac{1}{2}(1+j)V_o+50-j50\right]}{-j10}=0$$

$$\rightarrow V_o=\frac{-40+j120}{1+2j}=26/2\angle 37/9^\circ \rightarrow v_o(t)=26/2\cos\left(10^3t+37/9^\circ\right)$$

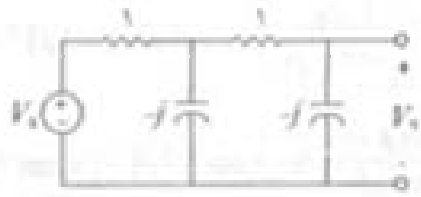
مسئله ۱۰۳

$\frac{V_o}{V_s}=Ae^{j\phi}$ را حساب کنید. (مدار در حالت دایمی سینوسی است)



شکل مسئله ۱۰۳

حل: با توجه به $v_s(t)=2\cos t$ بوده و مدار در حالت دایمی سینوسی بصورت زیر خواهد بود.



بنابراین با بکارگیری قاعده تقسیم ولتاژ خواهیم داشت.

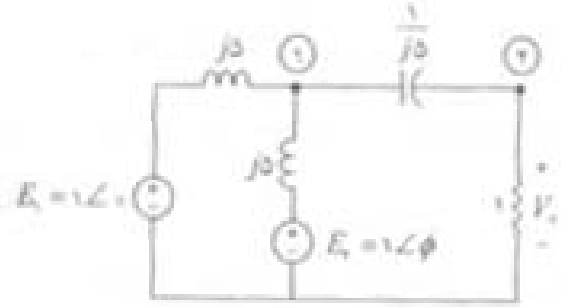
$$V_o=\frac{(-j)\|(1-j)}{1+(-j)\|(1-j)}V_s=\frac{\frac{1+j}{1-2j}}{1-\frac{1+j}{1-2j}}V_s \rightarrow \frac{V_o}{V_s}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j=\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}$$

مسئله ۱۰۴

آیا می توان ϕ را چنان انتخاب کرد که اختلاف فاز v_o با e_s برابر ۶۰ درجه باشد.

شکل مسئله ۱۰۴

حل : با فرض اینکه مدار در حالت دایمی سینوسی باشد و اینکه $\omega = 5$ است مدار را بصورت زیر رسم می کنیم.



با استفاده از قاعده تقسیم ولتاژ و قضیه جمع آثار داریم

$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \frac{V_2 - V_1}{\frac{1}{j5}} + \frac{V_2}{1} = 0 \rightarrow V_1 = \frac{1 + j5}{j5} V_2$$

$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow \frac{\frac{1+j5}{j5}V_2 - E_1}{j5} + \frac{\frac{1+j5}{j5}V_2 - E_2}{j5} + \frac{\frac{1+j5}{j5}V_2 - V_2}{\frac{1}{j5}} = 0$$

$$\rightarrow V_2 = \frac{j5}{-23 + j10}(E_1 + E_2) = \frac{j5}{-23 + j10}(1 + \cos\phi + j\sin\phi)$$

$$\rightarrow \angle V_2 - \angle E_1 = 90 + \tan^{-1}\frac{\sin\phi}{1+\cos\phi} - \left(180 - \tan^{-1}\frac{10}{23}\right) - 0 = \tan^{-1}\frac{\sin\phi}{1+\cos\phi} - 66/5$$

$$\rightarrow \angle V_2 - \angle E_1 = 60^\circ \rightarrow \tan^{-1}\frac{\sin\phi}{1+\cos\phi} - 66/5 = 60$$

$$\rightarrow \frac{\sin\phi}{1+\cos\phi} = \tan 126/5 = -1/35 \rightarrow \sin\phi + 1/35\cos\phi = -1/35$$

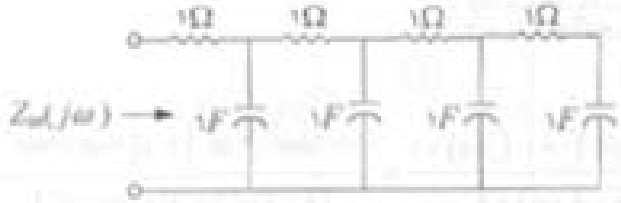
$$\rightarrow \sqrt{1 + (1/35)^2}\cos\left(\phi - \tan^{-1} 1/35\right) = -1/35 \rightarrow \cos(\phi - 126/5) = -0/8$$

$$\rightarrow \phi = \pm 234/5 + 126/5 = 90, 166$$

مسئله ۱۰۵

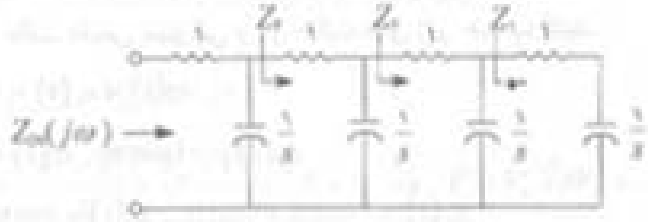
الف ـ $Z_{in}(j\omega) = ?$

ب ـ مقاومت ها را با سلف های $1H$ و خازنها را با مقاومتهای 1Ω تعویض و $Z_{in}(j\omega)$ را تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۰۵

حل : الف ـ در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر است که از تغییر متغیر $s = j\omega$ استفاده کرده ایم.



با استفاده از گسترش کسرهای متوالی داریم

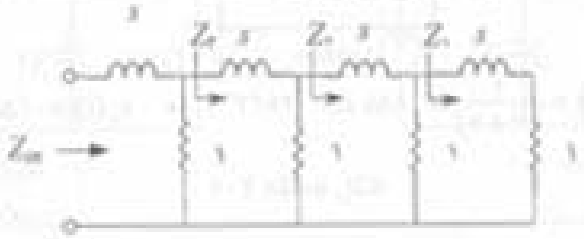
$$Z_4 = 1 + \frac{1}{s} = \frac{s+1}{s} \quad , \quad Z_3 = 1 + \frac{1}{s + \frac{s}{s+1}} = 1 + \frac{s+1}{s^2+2s} = \frac{s^2+3s+1}{s^2+2s}$$

$$Z_2 = 1 + \frac{1}{s + \frac{s^2+2s}{s^2+3s+1}} = 1 + \frac{s^2+3s+1}{s^3+4s^2+3s} = \frac{s^3+5s^2+6s+1}{s^3+4s^2+3s}$$

$$Z_{in} = 1 + \frac{1}{s + \frac{s^3+4s^2+3s}{s^3+5s+6s+1}} = 1 + \frac{s^3+4s^2+3s}{s^3+6s^2+10s^2+4s} = \frac{s^3+7s^2+15s^2+10s+1}{s^3+6s^2+10s^2+4s}$$

$$\rightarrow \; Z_{in}(j\omega) = \frac{(j\omega)^3+7(j\omega)^2+15(j\omega)^2+10(j\omega)+1}{(j\omega)^3+6(j\omega)^2+10(j\omega)^2+4(j\omega)} = \frac{\left(\omega^3-15\omega^2+1\right)+j\left(-7\omega^2+10\omega\right)}{\left(\omega^2-10\omega^2\right)+j\left(-6\omega^2+4\omega\right)}$$

ب ـ با اعمال تغییرات گفته شده مدار بصورت زیر خواهد شد



$$Z_1 = s+1 \ , \ Z_2 = s + \frac{1}{1+\frac{1}{s+1}} = s + \frac{s+1}{s+2} = \frac{s^2+3s+1}{s+2}$$

$$Z_3 = s + \frac{1}{1+\frac{s+2}{s^2+3s+1}} = s + \frac{s^2+3s+1}{s^2+2s+3} = \frac{s^3+5s^2+6s+1}{s^2+2s+3}$$

$$Z_{in} = s + \frac{1}{1+\frac{s^2+2s+3}{s^3+5s^2+6s+1}} = \frac{s^4+7s^3+15s^2+10s+1}{s^3+6s^2+10s+4}$$

$$\rightarrow \ Z_{in}(j\omega) = \frac{(j\omega)^4+7(j\omega)^3+15(j\omega)^2+10(j\omega)+1}{(j\omega)^3+6(j\omega)^2+10(j\omega)+4} = \frac{\left(1-15\omega^2+\omega^4\right)+j\left(10\omega-7\omega^3\right)}{\left(4-6\omega^2\right)+j\left(10\omega-\omega^3\right)}$$

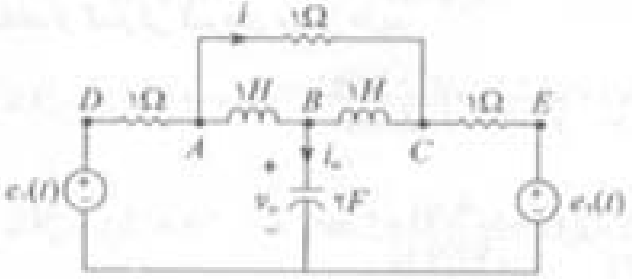
مسئله ۱۰۶

$v_o(t)$ را در حالت دایمی سینوسی و در حالت های زیر حساب کنید.

الف) $e_1(t) = e_2(t) = 2\cos 2t$

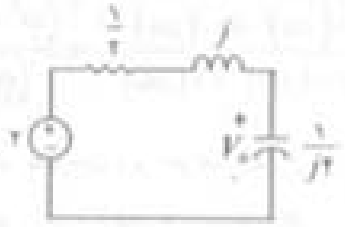
ب) $e_1(t) = -2\cos 2t \ , \ e_2(t) = 2\cos 2t$

پ) $e_1(t) = 3\cos 2t + 2\sin 2t \ , \ e_2(t) = \cos 2t + \sin 2t$



شکل مسئله ۱۰۶

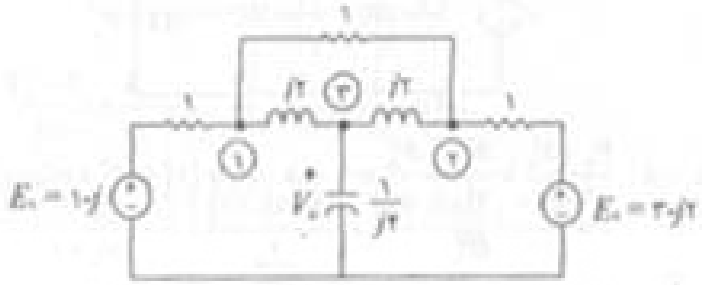
حل : الف ـ در این حالت به علت تقارن $v_B = v_C$ بوده و لذا $i = 0$ می باشد و با انطباق نقاط A بر C و E بر D مدار در حالت دایمی سینوسی و با $\omega = 2$ بصورت زیر خواهد شد.



$$\rightarrow \ V_o = \frac{\frac{1}{j4}}{\frac{1}{2}+j+\frac{1}{j4}}(2) = \frac{2}{-3+2j} = 0.55\angle -126.3^\circ \ \rightarrow \ v_o(t) = 0.55\cos\left(2t-126.3^\circ\right)$$

ب ـ به علت مختلف العلامه بودن منابع و نیز تقارن مدار لذا اثر آنها در تولید V_o برابر و مختلف العلامه بوده و در نتیجه $V_o = 0$ می باشد بنابراین در این حالت $V_o = 0$ خواهد بود.

پ ـ در این حالت با بدست آوردن فازور منابع مدار را بصورت زیر رسم می کنیم.



$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow \frac{V_1-(10-j)}{1}+\frac{V_1-V_2}{1}+\frac{V_1-V_o}{j2}=0 \rightarrow (1+j2)V_1-j2V_2-V_o=2-j2$$

$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \frac{V_2-(30-j2)}{1}+\frac{V_2-V_1}{1}+\frac{V_2-V_o}{j2}=0$$

$$\rightarrow -j2V_1+(1+j2)V_2-V_o=2-j6$$

$$\text{KCL برای گره ۳} \rightarrow \frac{V_o-V_1}{j2}+\frac{V_o-V_2}{j2}+\frac{V_o}{\frac{1}{j2}}=0 \rightarrow V_1+V_2+5V_o=0$$

$$\rightarrow V_o=\frac{\begin{vmatrix} 1+j2 & -j2 & 2-j2 \\ -j2 & 1+j2 & 2-j6 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+j2 & -j2 & -1 \\ -j2 & 1+j2 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{-24-j30}{-54+j56}=\frac{54.9\angle-124}{77.8\angle134}=0.7\angle-258^\circ$$

$$\rightarrow v_o(t)=0.7\cos(2t-258^\circ)$$

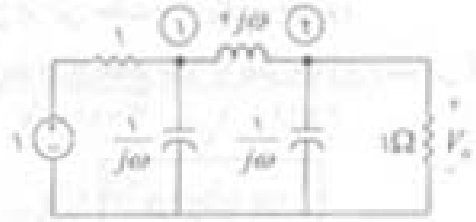
مسئله ۱۰۷

ولتاژ خروجی را در $\omega = 0, 1, 10, 100$ حساب کرده و رفتار فیلتری آنها را نتیجه بگیرید.

(ب) (الف)

شکل مسئله ۱۰۷

حل : الف ـ شکل مسئله در حالت دایمی و فرکانس زاویه ای ω بصورت زیر می باشد.



$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \frac{V_2 - V_1}{2j\omega} + \frac{V_2}{\frac{1}{j\omega}} + \frac{V_2}{1} = 0 \rightarrow V_1 = \left(2(j\omega)^2 + 2j\omega + 1\right)V_2$$

$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow \frac{\left(2(j\omega)^2 + 2j\omega + 1\right)V_2 - 1}{1} + \frac{\left(2(j\omega)^2 + 2j\omega + 1\right)V_2}{\frac{1}{j\omega}}$$

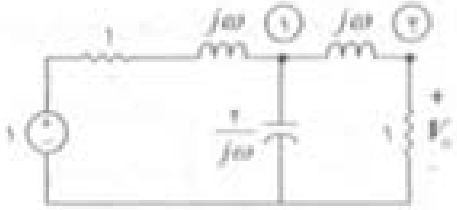
$$+ \frac{\left(2(j\omega)^2 + 2j\omega + 1\right)V_2 - V_2}{2j\omega} = 0$$

$$\rightarrow V_2(j\omega) = \frac{1}{2(j\omega)^3 - 2(j\omega)^2 + 2j\omega + 2} = \frac{1}{2.2\omega^2 + j\left(2\omega - 2\omega^3\right)}$$

$$= \begin{cases} 0.5 & , \quad \omega = 0 \\ \frac{1}{1.96 + j0.398} = 0.5\angle -11.5^\circ & , \quad \omega = 0.1 \\ \frac{1}{-2 + j2} = 0.35\angle -135^\circ & , \quad \omega = 1 \\ \frac{1}{-398 + j1600} = 0.0005\angle 101.5^\circ & , \quad \omega = 10 \end{cases}$$

نمودار $|V_2(j\omega)|$ در شکل زیر رسم شده است که نشان می دهد یک فیلتر پایین گذر است.

پ ـ شکل مسئله در حالت دایمی سینوسی و فرکانس زاویه ای ω بصورت زیر می باشد.



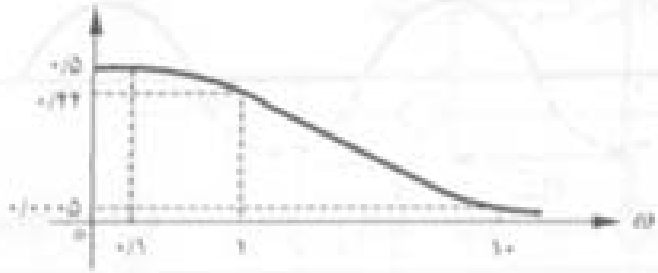
KCL برای گره ۲ $\rightarrow \quad \frac{V_o - V_1}{j\omega} + \frac{V_o}{۱} = ۰ \quad \rightarrow \quad V_1 = (۱ + j\omega)V_o$

KCL برای گره ۱ $\rightarrow \quad \frac{(۱ + j\omega)V_o - ۱}{۱ + j\omega} + \frac{(۱ + j\omega)V_o}{\frac{۲}{j\omega}} + \frac{(۱ + j\omega)V_o - V_o}{j\omega} = ۰$

$$\rightarrow V_o(j\omega) = \frac{۱}{(j\omega)^۳ + ۲(j\omega)^۲ + ۵j\omega + ۲} = \frac{۲}{(۲ - ۲\omega^۲) + j(۵\omega - \omega^۳)}$$

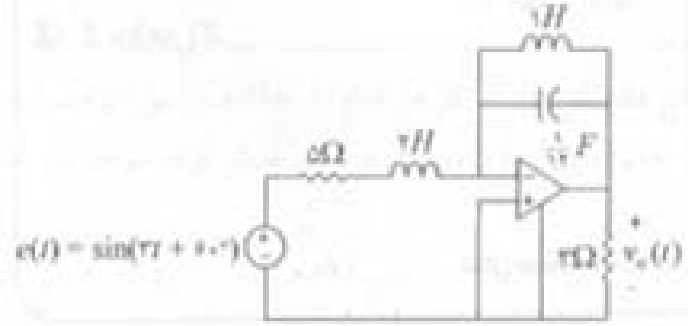
$$= \begin{cases} \frac{۲}{۴} = ۰/۵ & , \quad \omega = ۰ \\ \frac{۲}{۳/۹۸ + j۰/۵} = ۰/۵\angle -۷/۱^\circ & , \quad \omega = ۰/۱ \\ \frac{۲}{۲ + j۲} = ۰/۴۴\angle -۴۳^\circ & , \quad \omega = ۱ \\ \frac{۱}{-۱۹۶ - j۱۹۵۰} = ۰/۰۰۰۵\angle ۹۴^\circ & , \quad \omega = ۱۰ \end{cases}$$

بنابراین نمودار $|V_o(j\omega)|$ بصورت زیر خواهد بود که نمودار اندازه یک فیلتر پایین گذر است.



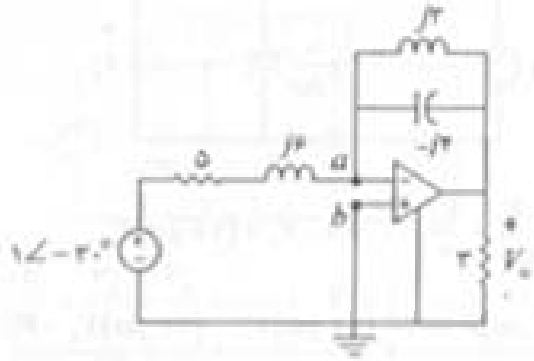
مسئله ۱۰۸

$v_o(t)$ را در حالت دایمی سینوسی تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۰۸

حل : در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود.



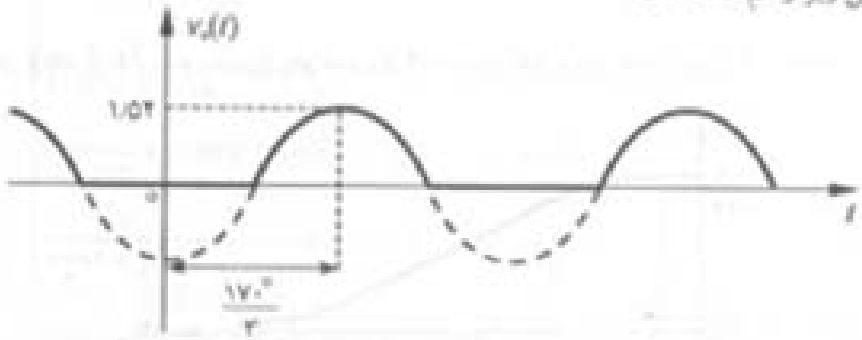
با فرض ایده آل بودن آپ امپ $V_a = V_b = 0$ بوده و خواهیم داشت.

$$\text{KCL برای گره } a \rightarrow \frac{0-1\angle -30}{5+j6}+\frac{0-V_o}{j2}+\frac{0-V_o}{-j2}=0$$

$$\frac{V_o}{-j12}=\frac{1\angle -30}{7.8\angle 50.2^\circ} \rightarrow V_o = 12\angle -90^\circ \frac{1\angle -30^\circ}{7.8\angle 50.2^\circ}=\left(\frac{12}{7.8}\right)\angle -90^\circ -30^\circ -50.2^\circ$$

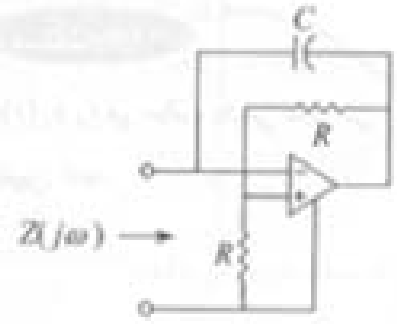
$$=1.54\angle -170.2^\circ \rightarrow v_o(t)=1.54\left(\cos 2t - 170.2^\circ\right)$$

با دقت در مدار ملاحظه می شود که باباس منفی آپ امپ زمین شده است بنابراین همواره $v_o(t) \geq 0$ خواهد بود، که در شکل زیر رسم شده است.



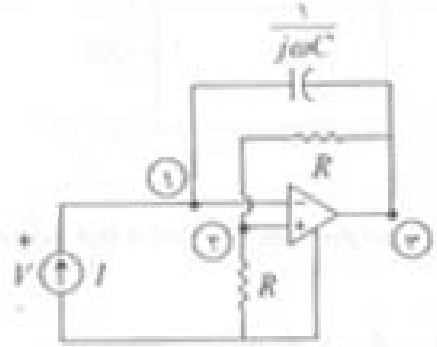
مسئله ۱۰۹

$Z(j\omega) = ?$



شکل مسئله ۱۰۹

حل: بدین منظور منبع جریان I را به دو سر ورودی وصل کرده و ولتاژ دو سر آن را محاسبه می کنیم.



با توجه به شکل فوق و بنا بر قاعده تقسیم ولتاژ داریم.

$$V_2 = \frac{R}{R+R}V_o = \frac{V_o}{2} \quad , \quad V_1 = V_2$$

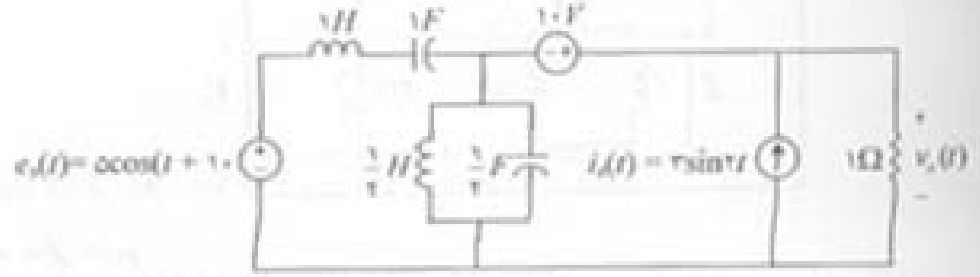
با فرض اینکه آن بوده آپ امپ $V_1 = V_2$ بوده و خواهیم داشت.

$$V_1 = V_2 \quad \rightarrow \quad \frac{V_o}{2} = V \quad \rightarrow \quad V_o = 2V$$

$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow \quad -I + \frac{V - 2V}{\frac{1}{j\omega C}} \quad \rightarrow \quad Z(j\omega) = \frac{V}{I} = -\frac{1}{j\omega C} = \frac{j}{\omega C}$$

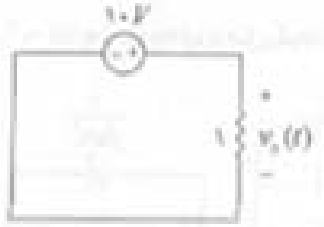
مسئله ۱۱۰

$v_o(t)$ را در حالت دایمی سینوسی تعیین کنید.



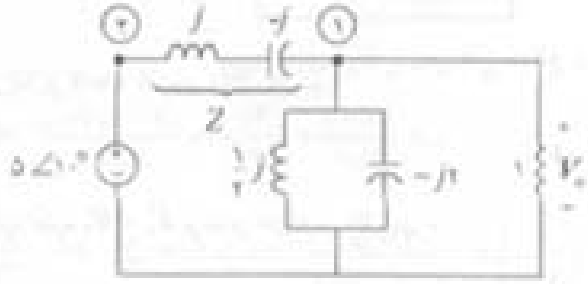
شکل مسئله ۱۱۰

حل: از آنجا که فرکانس زاویه ای منابع متفاوت است لذا اثر هر کدام را جداگانه بررسی خواهیم کرد. ابتدا منبع ولتاژ $10V$ را در نظر می گیریم. در حالت دایمی خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه خواهد بود. لذا مدار بصورت زیر می باشد.



$v_o(t) = ۱۰\ V$

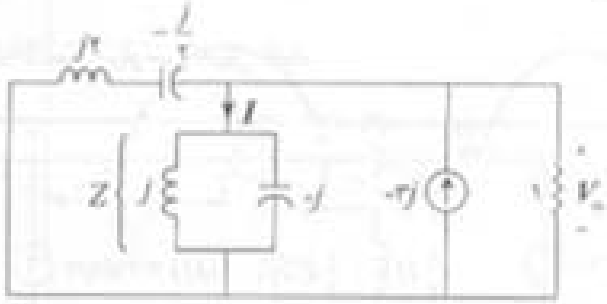
حال منبع ولتاژ $v_s(t)$ را منظور خواهیم کرد. در حالت دایمی سینوسی با توجه به اینکه $\omega = ۱$ می باشد مدار بصورت زیر خواهد شد.



با توجه به شکل داریم

$$Z = j - j = ۰ \quad \rightarrow \quad V_۱ = V_۲ \quad \rightarrow \quad V_o = ۵\angle ۱۰^\circ \quad \rightarrow \quad v_o(t) = ۵\cos\left(t + ۱۰^\circ\right)$$

در ادامه اثر منبع جریان $i_s(t)$ را بررسی خواهیم کرد. در حالت دایمی سینوسی با توجه به اینکه $\omega = ۲$ می باشد مدار بصورت زیر خواهد بود.



با توجه به شکل داریم

$$Z = j\tfrac{۱}{۲} - j = \frac{j \times (-j)}{j - j} = \frac{۱}{۰} = \infty \quad \rightarrow \quad I = ۰$$

بنابراین با بکارگیری قاعده تقسیم جریان خواهیم داشت

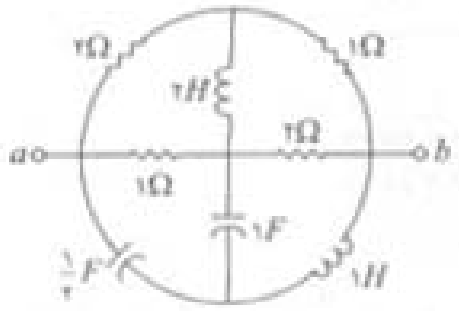
$$V_o = \frac{j۲ - \frac{j}{۲}}{۱ + j۲ - \frac{j}{۲}}(-۳j) = \frac{۹}{۲ + ۳j} = ۲/۵\angle ۵۶/۳ \quad \rightarrow \quad v_o(t) = ۲/۵\cos\left(۲t - ۵۶/۳^\circ\right)$$

و در نهایت بنا بر قضیه جمع آثار ولتاژ خروجی برابر است با:

$$v_o(t) = 10 + 5\cos(t + 10) + 2/5\cos\left(2t - 56/3^\circ\right)$$

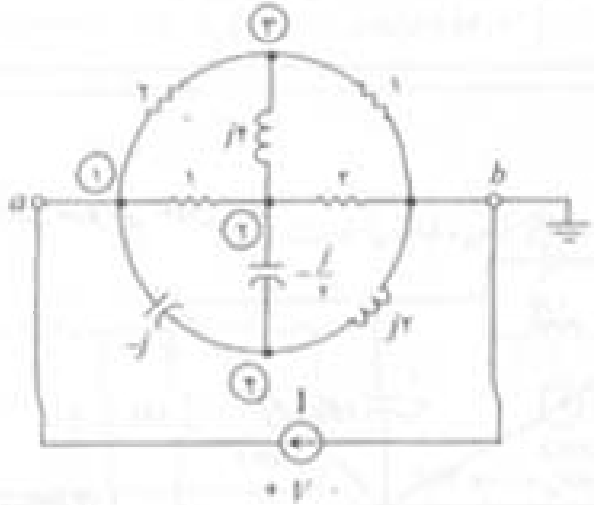
مسئله ۱۱۱

$Z_{ab}(j2) = ?$



شکل مسئله ۱۱۱

حل: بدین منظور منبع جریان آزمایشی I را به دو سر a و b وصل کرده و ولتاژ دو سر آن را بدست می آوریم. در حالت دایمی سینوسی و در فرکانس زاویه ای $\omega = 2$ مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow -I + \frac{V - V_2}{2} + \frac{V - V_3}{-j} + \frac{V - V_1}{1} = 0$$

$$\rightarrow (3 + 2j)V - 2V_2 - V_3 - 2jV_1 = 2I$$

$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \frac{V_2 - V}{1} + \frac{V_2 - V_3}{j2} + \frac{V_2 - V_1}{\frac{j}{-2}} + \frac{V_2 - 0}{2} = 0$$

$$\rightarrow -j2V + (-8 + j6)V_2 - V_3 + 8V_1 = 0$$

$$\text{KCL برای گره ۳} \rightarrow \frac{V_3 - V}{2} + \frac{V_3 - V_2}{j2} + \frac{V_3 - 0}{1} = 0 \rightarrow -2V - 2V_2 + (1 + j6)V_3 = 0$$

KCL برای گره ② $\rightarrow \dfrac{V_2 - V}{-j} + \dfrac{V_2 - V_3}{-\frac{j}{2}} + \dfrac{V_2 - 0}{j2} = 0 \rightarrow 2V + 2V_2 - 5V_3 = 0$

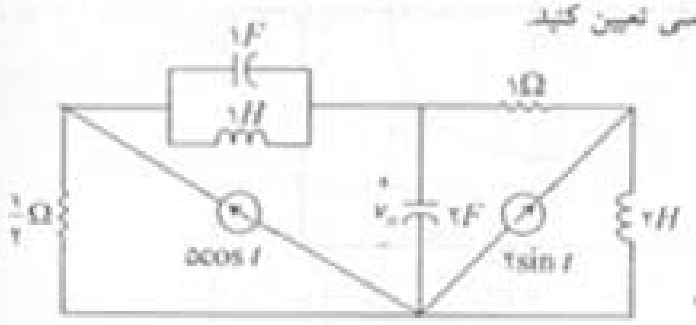
$$\rightarrow V = \frac{\begin{vmatrix} 2j & -2 & -1 & -2j \\ 0 & -8+j4 & -1 & 8 \\ 0 & -2 & 1+j4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3+2j & -2 & -1 & -2j \\ -j2 & -8+j4 & -1 & 8 \\ -2 & -2 & 1+j4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{0/37 + j5/87}{2/28 + j5/25} I$$

$$\rightarrow Z(j2) = \frac{V(j2)}{I(j2)} = \frac{0/37 + j5/87}{2/28 + j5/25} = 0/97 + j0/35\ \Omega$$

$$\rightarrow Z = R + j\omega L \quad \rightarrow \quad R = 0/97\Omega \quad , \quad L = 0/175\ H$$

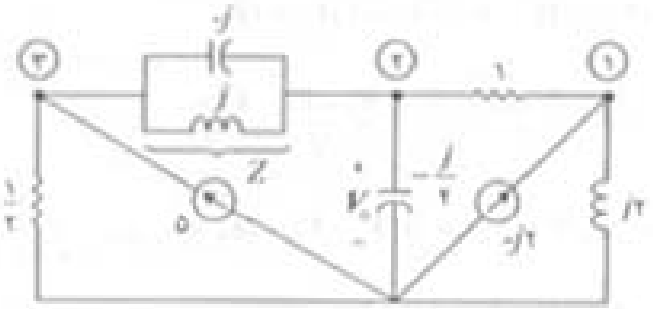
مسئله ۱۱۲

$v_o(t)$ را در حالت دایمی سینوسی تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۱۲

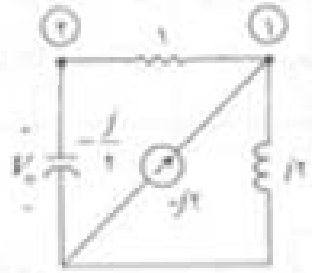
حل : در حالت دایمی سینوسی و با توجه به اینکه $\omega = 1$ می باشد، مدار بصورت زیر خواهد بود.



با توجه به شکل فوق داریم

$$Z = -j \,||\, j = \frac{-j \times j}{-j + j} = \frac{1}{0} = \infty$$

بنابراین دو سر ② و ③ مدار باز بوده و مدار بصورت زیر خواهد شد.



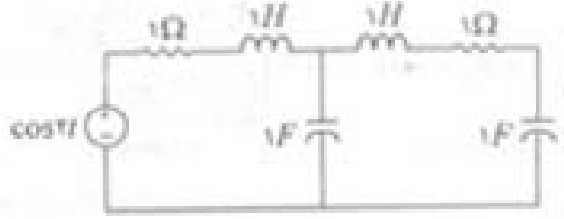
$$\text{KCL برای گره ②} \rightarrow \frac{V_2}{-\frac{j}{2}} + \frac{V_o - V_1}{1} = 0 \rightarrow V_1 = (1 + j2)V_o$$

$$\text{KCL برای گره ①} \rightarrow \frac{(1+j2)V_o - V_o}{1} + \frac{(1+j2)V_o}{j2} - j2 = 0$$

$$\rightarrow V_o = \frac{-2}{-3 + j2} = 1/11\angle 33/3^\circ \rightarrow v_o(t) = 1/11\cos\left(t + 33/3^\circ\right)$$

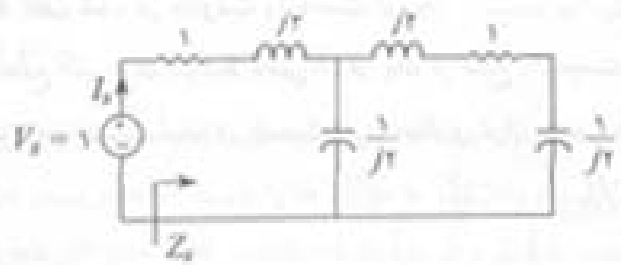
مسئله ۱۱۳

توان متوسط تلف شده و ذخیره شده را بدست آورید.



شکل مسئله ۱۱۳

حل : در حالت دایمی سینوسی و اینکه $\omega = 2$ است مدار بصورت زیر خواهد شد.



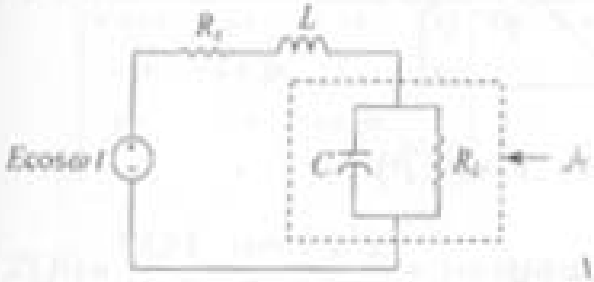
$$Z_s = 1 + j2 + \left(\frac{1}{j2}\right) \| \left(j2 + 1 + \frac{1}{j2}\right) = 1/12 + j1/34$$

$$S=\frac{1}{2}V_s\bar{I}_s=\frac{1}{2}V_s\overline{\left(\frac{V_s}{Z_s}\right)}=\frac{V_s\cdot\bar{V}_s}{2\bar{Z}_s}=\frac{|V_s|^2}{2\bar{Z}_s}=\frac{1}{2(1/12-j1/37)}$$

$$\rightarrow\ S=0/18-j0/22\ \rightarrow\ \begin{cases}\text{توان متوسط تلف شده}=0/18\ W\\ \text{انرژی متوسط ذخیره شده}=0/22\ VAr\end{cases}$$

مسئله ۱۱۴

L و R_s را چنان تعیین کنید که بیشترین توان به بار تحویل داده شود.



شکل مسئله ۱۱۴

حل: با توجه به شکل فوق داریم

$$Z_s=R_s+j\omega L\ ,\ \ Z_L=R_L\,\|\,\frac{1}{j\omega C}=\frac{R_L}{1+j\omega R_LC}=\frac{R_L-j\omega R_L^2C}{1+\omega^2R_L^2C^2}$$

شرط انتقال توان ماکزیمم به بار Z_L عبارتست از:

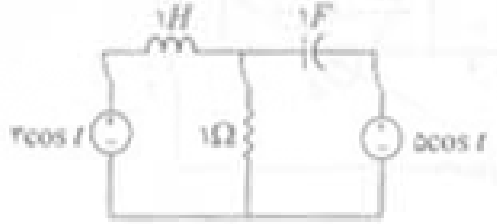
$$Z_L=\bar{Z}_s\ \rightarrow\ \frac{R_L}{1+\omega^2R_L^2C^2}-j\frac{\omega R_L^2C}{1+\omega^2R_L^2C^2}=R_s-j\omega L\ \rightarrow\ \begin{cases}R_s=\dfrac{R_L}{1+\omega^2R_L^2C^2}\\ L=\dfrac{R_L^2C}{1+\omega^2R_L^2C^2}\end{cases}$$

مسئله ۱۱۵

الف ـ توان متوسط تلف شده در مقاومت را بدست آورید.

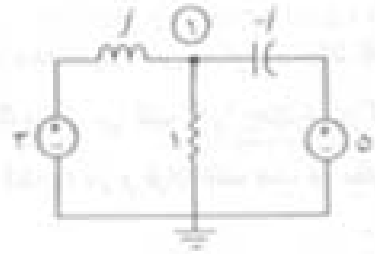
ب ـ با استفاده از جمع آثار توان متوسط ناشی از هر یک از منابع را بدست آورید.

پ ـ آیا مجموع توانهای بدست آمده در قسمت (ب) مساوی توان بدست آمده در قسمت (الف) است؟ چرا؟



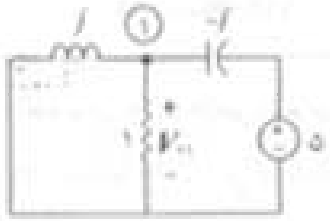
شکل مسئله ۱۱۵

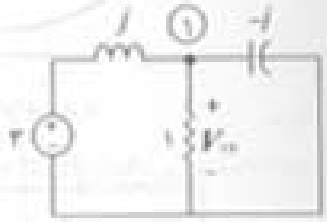
حل: الف ـ در حالت دایمی سینوسی ($\omega = 1$) نمودار مدار بصورت زیر می باشد.



$$KCL \text{ برای گره } 1 \rightarrow \frac{V_1-2}{j}+\frac{V_1-5}{-j}+\frac{V_1}{1}=0 \rightarrow V_1=j2 \rightarrow P_{ave}=\frac{|V_1|^2}{2R}=\frac{|2|^2}{2\times 1}=2\,W$$

ب ـ در این حالت اثر هر کدام از منابع را جداگانه در نظر می گیریم.





$$\frac{V_{11}-5}{-j}+\frac{V_{11}}{1}+\frac{V_{11}}{j}=0 \rightarrow V_1=j5$$

$$\rightarrow P_{ave1}=\frac{|V_{11}|^2}{2R}=\frac{5^2}{2\times 1}=\frac{25}{2}\,W$$

$$\frac{V_{12}-2}{j}+\frac{V_{12}}{1}+\frac{V_{12}}{-j}=0 \rightarrow V_{12}=-j2$$

$$\rightarrow P_{ave2}=\frac{|V_{12}|^2}{2R}=\frac{2^2}{2\times 1}=\frac{9}{2}\,W$$

پ ـ مجموع توان های بدست آمده در قسمت (ب) عبارتست از :

$$P_{ave1}+P_{ave2}=\frac{25}{2}+\frac{9}{2}=17\,W$$

که مساوی توان بدست آمده در قسمت الف یعنی $P_{ave}=2W$ نیست. علت این است که اندازه مجموع دو بردار همیشه برابر مجموع اندازه های آنها نیست.

$$|V_{11}+V_{12}| \neq |V_{11}|+|V_{12}|$$

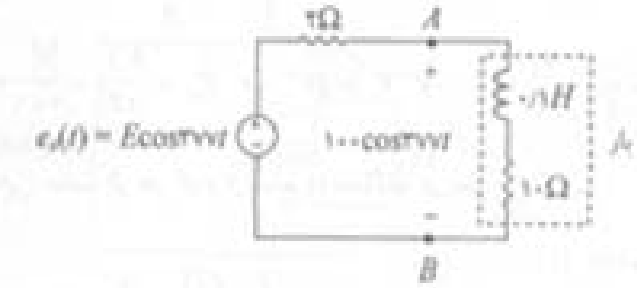
پس در محاسبه توان با استفاده از قضیه جمع آثار باید دقت کنیم که بعد از محاسبه ولتاژ و یا جریان هر عنصر یعنی از عناصر مختلف باید مجموع ولتاژها و یا جریان ها را بدست آورده و سپس در رابطه توان متوسط قرار دهیم. در مورد این مسئله محاسبه صحیح توان متوسط با استفاده از قضیه جمع آثار بصورت زیر خواهد بود.

$$P_{ave}=\frac{|V_{11}+V_{12}|^2}{2R}=\frac{|j5-j2|^2}{2\times 1}=\frac{2}{2\times 1}=2\,W$$

مسئله ۱۱۶

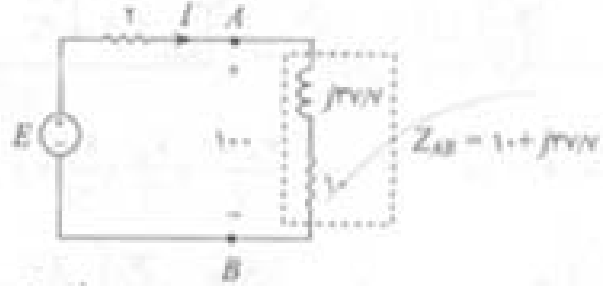
الف ـ توان متوسط تحویل داده شده به بار، ضریب توان و توان تلف شده درمقاومت ۲Ω را بیابید.

ب ـ خازن C را به دو سر A و B وصل می کنیم. C را چنان تعیین کنید که ضریب توان بار برابر یک شود. توان متوسط تحویل داده شده به بار و توان تلف شده در مقاومت ۲Ω را محاسبه و با قسمت (الف) مقایسه کنید.



شکل مسئله ۱۱۶

حل : الف ـ در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود.



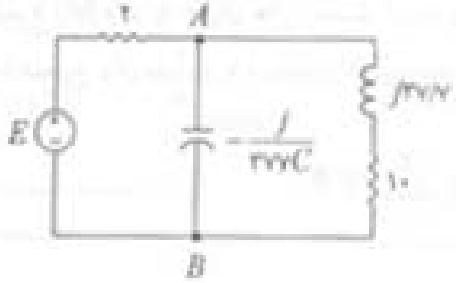
$$S_{AB} = \frac{|V_{AB}|^2}{2Z_{AB}} = \frac{(۱۰۰)^2}{2(۱۰ - j۳۷/۷)} = ۳۳/۱۸ + j۱۲۲/۸۳ \quad \rightarrow \quad P_{av(AB)} = ۳۳/۱۸\ W$$

$$\tan\phi = \frac{۱۲۲/۸۳}{۳۳/۱۸} = ۳/۷۳ \quad \rightarrow \quad \phi = ۷۵/۱ \quad \rightarrow \quad \text{ضریب توان} = \cos\phi = \cos ۷۵/۱^\circ = ۰/۲۵۶$$

توان متوسط تلف شده در مقاومت ۲Ω بصورت زیر بدست می آید.

$$I = \frac{۱۰۰}{۱۰ + j۳۷/۷} \quad \rightarrow \quad P_{av(R)} = \frac{1}{2}R|I|^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{۱۰۰}{\sqrt{۱۰^2 + (۳۷/۷)^2}} = ۶/۵۷\ W$$

ب ـ با اتصال خازن C به دو سر A و B مدار بصورت زیر خواهد شد.



می دانیم که توان در این حالت توان تحویل داده شده به دو سر AB برابر است با :

$$S_{AB}=\frac{(۱۰۰)^۲}{۲(۱۰۰-j۳۷/۷)}+\frac{(۱۰۰)^۲}{۲\left(\frac{j}{۳۷۷C}\right)}=۳۳/۱۸+j\left(۱۲۳/۸۳-۱۸۸۵\times۱۰^{-۶}C\right)$$

شرط اینکه ضریب قدرت برابر یک شود عبارتست از :

$$\cos\phi=۱ \quad\rightarrow\quad \phi=۰$$

$$\tan\phi=\frac{۱۲۳/۸۳-۱۸۸۵\times۱۰^{-۶}C}{۳۳/۱۸}=۰ \quad\rightarrow\quad ۱۲۳/۸۳-۱۸۸۵\times۱۰^{-۶}C=۰$$

$$\rightarrow\quad C=\frac{۱۲۳/۸۳}{۱۸۸۵\times۱۰^{-۶}}=۶۵/۷\times۱۰^{-۶}=۶۵/۷\ \mu F$$

روش دوم : در حالت کلی برای افزایش ضریب قدرت از $\cos\phi_1$ به $\cos\phi_2$ توان خازن لازم از رابطه زیر بدست می آید.

$$Q_C=P(\tan\varphi_1-\tan\varphi_2)$$

در این مسئله داریم

$$\tan\phi_1=۲/۷۳\ ,\ \cos\phi_2=۱\ \rightarrow\ \tan\phi_2=۰\ \rightarrow\ Q_C=۳۳/۱۸(۲/۷۳-۰)=۱۲۳/۷۶$$

$$\rightarrow\ Q_C=\frac{|V_C|^۲}{۲\ X_C}\ \rightarrow\ ۱۲۳/۷۶=\frac{۱۰۰^۲}{۲X_C}$$

$$\rightarrow\ X_C=۴۰/۴۰\quad ,\quad X_C=\frac{۱}{C\omega}\ \rightarrow\ ۴۰/۴۰=\frac{۱}{C\times۳۷۷}\ \rightarrow\ C=۶۵/۶۵\ \mu F$$

همچنین داریم

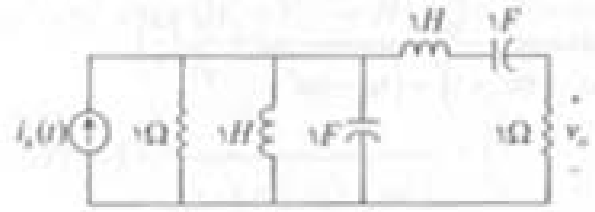
$$\rightarrow\ S_{AB}=۳۳/۱۸\quad ,\quad S_{AB}=\frac{۱}{۲}VI^*\ \rightarrow\ |I|=\frac{۲|S_{AB}|}{|V|}=\frac{۲\times۳۳/۱۸}{۱۰۰}=۰/۶۶\ A$$

$$\rightarrow\ P_{ave(R)}=\frac{۱}{۲}R|I|^۲=\frac{۱}{۲}\times۲\times(۰/۶۶)^۲=۰/۴۴\ W$$

ملاحظه می شود که توان متوسط تحویلی به بار تغییری نکرده ولی توان تلف شده در مقاومت ۲Ω بسیار کمتر شده است.

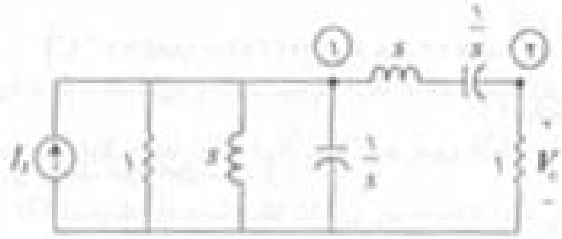
مسئله ۱۱۷

$H(j\omega)=\frac{V_o}{I_s}$ را محاسبه و رفتار فیلتری مدار و فرکانس قطع آن را تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۱۷

حل : با فرض $s = j\omega$ مدار در حالت دایمی سینوسی بصورت زیر خواهد بود.



$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \frac{V_2 - V_1}{s+\frac{1}{s}} + \frac{V_2}{1} = 0 \rightarrow V_1 = \frac{s^2+s+1}{s}V_o$$

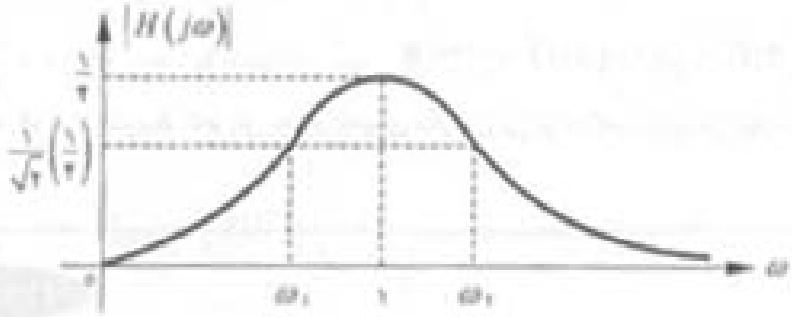
$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow -I_s + \frac{\frac{s^2+s+1}{s}V_o}{1} + \frac{\frac{s^2+s+1}{s}V_o}{s} + \frac{\frac{s^2+s+1}{s}V_o}{\frac{1}{s}} + \frac{\frac{s^2+s+1}{s}V_o - V_o}{s+\frac{1}{s}} = 0$$

$$\rightarrow -I_s + \frac{s^4+2s^3+2s^2+2s+1}{s^2}V_o = 0$$

$$\rightarrow \frac{V_o}{I_s} = \frac{s^2}{s^4+2s^3+2s^2+2s+1} \rightarrow H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^4+2(j\omega)^3+2(j\omega)^2+2j\omega+1}$$

$$\rightarrow |H(j\omega)| = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^4-2\omega^2+1)^2+(2\omega-2\omega^3)^2}} = \begin{cases} 0 & , \ \omega = 0 \\ \frac{1}{4} & , \ \omega \approx 1 \\ 0 & , \ \omega \to \infty \end{cases}$$

بنابراین نمودار $|H(j\omega)|$ بصورت زیر می باشد که نمایشگر یک فیلتر میان گذر است.



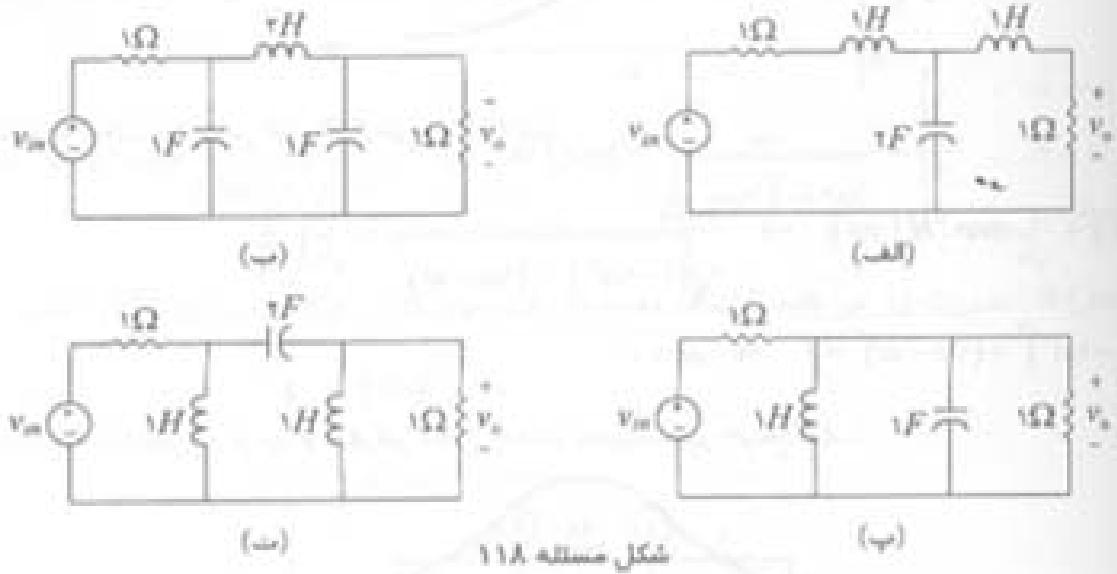
در ادامه به محاسبه فرکانسهای قطع ۳dB خواهیم پرداخت.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{4}\max|H(j\omega)| \rightarrow \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^4-2\omega^2+1)^2+(2\omega-2\omega^3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\rightarrow \omega_1 = 0/52 \quad , \quad \omega_2 = 1/93$$

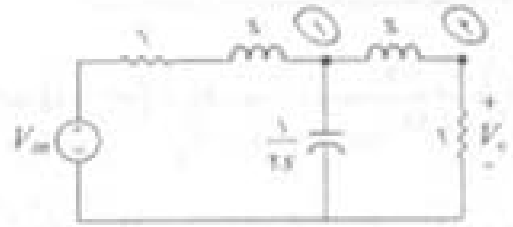
مسئله ۱۱۸

$H(j\omega)=\frac{V_o}{V_{in}}$ را برای هر یک از مدار ها تعیین کنید و نوع رفتار فیلتری و فرکانس قطع آنها را بدست آورید.



شکل مسئله ۱۱۸

حل : **الف** ـ در حالت دایمی سینوسی و با فرض $s=j\omega$ مدار بصورت زیر خواهد بود.



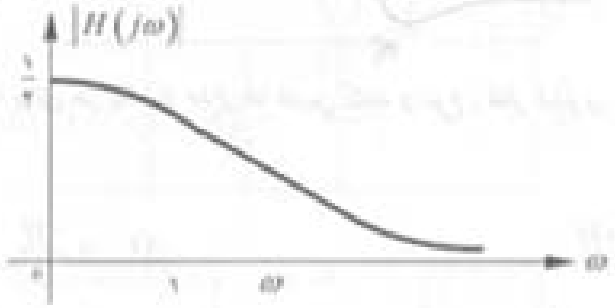
$$KCL \text{ برای گره } ② \rightarrow \frac{V_o-V_1}{s}+\frac{V_o}{1}=0 \rightarrow V_1=(s+1)V_o$$

$$KCL \text{ برای گره } ① \rightarrow \frac{(s+1)V_o-V_o}{s}+\frac{(s+1)V_o}{\frac{1}{2s}}+\frac{(s+1)V_o-V_{in}}{s+1}=0$$

$$\rightarrow \text{[illegible]} \rightarrow H(j\omega)=\frac{V_o}{V_{in}}=\frac{1}{\text{[illegible]}}$$

$$\rightarrow |H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(2-2\omega^2)^2+(2-2\omega^2)^2}}=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \omega=0\\ 0, & \omega\to\infty\end{cases}$$

بنابراین نمودار $|H(j\omega)|$ بصورت زیر است که نمایشگر یک فیلتر پایین گذر است.

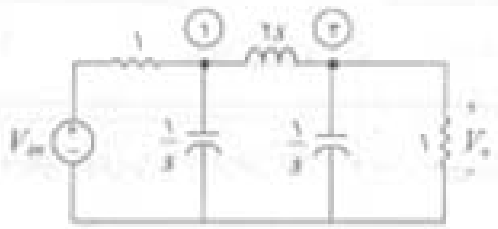


در ادامه به محاسبه فرکانس قطع $3dB$ خواهیم پرداخت.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\max|H(j\omega)| \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{(1-2\omega^2)^2+(2\omega-\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow (1-2\omega^2)^2+(2\omega-\omega)^2 = 2 \rightarrow \omega = 1$$

پ ـ در حالت دایمی سینوسی و با فرض $s = j\omega$ مدار بصورت زیر خواهد شد.



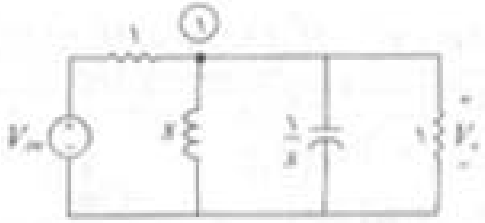
$$KCL \text{ برای گره } ② \rightarrow \frac{V_2}{1}+\frac{V_2}{\frac{1}{s}}+\frac{V_2-V_1}{2s}=0 \rightarrow V_1=(2s^2+2s+1)V_2$$

$$KCL \text{ برای گره } ① \rightarrow \frac{(2s^2+2s+1)V_2-V_{in}}{1}+\frac{(2s^2+2s+1)V_2}{\frac{1}{s}}+\frac{(2s^2+2s+1)V_2-V_2}{2s}=0$$

$$\rightarrow (2s^3+2s^2+2s+2)V_2=V_{in} \rightarrow H(j\omega)=\frac{1}{2(j\omega)^3+2(j\omega)^2+2j\omega+2}$$

ملاحظه می شود که تابع شبکه $H(j\omega)$ بدست آمده همانند قسمت (الف) است بنابراین مدار یک فیلتر پایین گذر با فرکانس قطع $1\frac{rad}{sec}$ است.

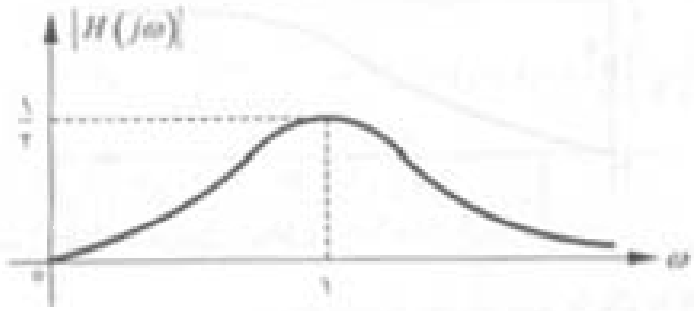
پ ـ در حالت دایمی سینوسی و با فرض $s = j\omega$ مدار بصورت زیر خواهد شد.



KCL برای گره ① $\rightarrow \frac{V_o - V_{in}}{1} + \frac{V_o}{s} + \frac{V_o}{\frac{1}{s}} + \frac{V_o}{1} = 0 \quad \rightarrow \quad (s^2 + 2s + 1)V_o = sV_{in}$

$$\rightarrow \quad H(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + 2j\omega + 1} \quad \rightarrow \quad |H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2}} = \begin{cases} 0 & , \ \omega \to 0 \\ \frac{1}{2} & , \ \omega = 1 \\ 0 & , \ \omega \to \infty \end{cases}$$

نمودار $|H(j\omega)|$ بصورت زیر می باشد که نشان دهنده یک فیلتر میان گذر با فرکانس مرکزی $1 \frac{rad}{sec}$ است.

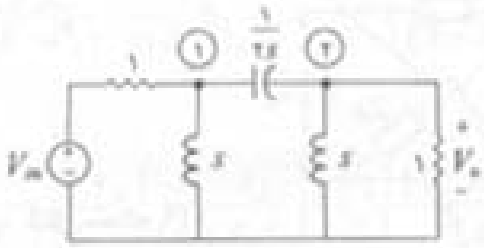


در ادامه به محاسبه فرکانسهای قطع ۳dB خواهیم پرداخت.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \max |H(j\omega)| \quad \rightarrow \quad \frac{\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow \quad \omega_1 = 0/414 \quad , \quad \omega_2 = 2/41$$

ث ـ در حالت دایمی سینوسی و با فرض $s = j\omega$ مدار بصورت زیر خواهد شد.



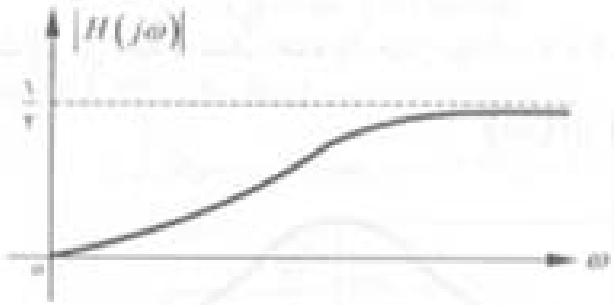
KCL برای گره ② $\rightarrow \frac{V_o}{1} + \frac{V_o}{s} + \frac{V_o - V_1}{\frac{1}{2s}} = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = \frac{2s^2 + s + 1}{2s^2} V_o$

KCL برای گره ① $\rightarrow$ $$\frac{\frac{2s^2+s+1}{2s^2}V_o - V_{in}}{1} + \frac{\frac{2s^2+s+1}{2s^2}V_o}{s} + \frac{\frac{2s^2+s+1}{2s^2}V_o - V_o}{\frac{1}{2s}} = 0$$

$$\rightarrow \left(\frac{2s^4+5s^3+2s+1}{2s^2}\right)V_o = V_{in} \rightarrow H(j\omega) = \frac{2(j\omega)^2}{2(j\omega)^4+5(j\omega)^3+2j\omega+1}$$

$$\rightarrow |H(j\omega)| = \frac{2\omega^2}{\sqrt{(1-5\omega^2)^2+(2\omega-2\omega^3)^2}} = \begin{cases} 0 & , \ \omega \rightarrow 0 \\ \frac{1}{2} & , \ \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

بنابراین نمودار $|H(j\omega)|$ بصورت زیر است که بیانگر یک فیلتر بالاگذر می باشد.



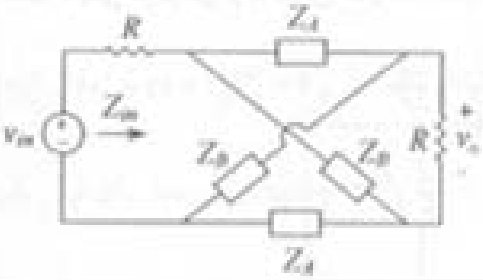
در ادامه به محاسبه فرکانس قطع $3dB$ خواهیم پرداخت.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\max|H(j\omega)| \rightarrow \frac{2\omega^2}{\sqrt{(1-5\omega^2)^2+(2\omega-2\omega^3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \omega = 0/25$$

مسئله ۱۱۹

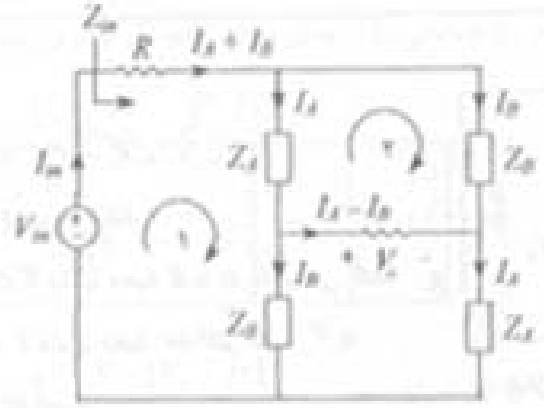
نشان دهید Z_{in} مستقل از فرکانس است. $(Z_A Z_B = R^2)$

نشان دهید $\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{1}{2}\frac{R-Z_A}{R+Z_A}$



شکل مسئله ۱۱۹

حل : مدار را می توان بصورت زیر رسم کرد که یک پل - متعادل است.



KVL برای مش ① $\rightarrow -V_{in} + R(I_A + I_B) + Z_A I_A + Z_B I_B = 0$

$$\rightarrow (R + Z_A)I_A + (R + Z_B)I_B = V_{in}$$

KVL برای مش ② $\rightarrow -Z_A I_A + Z_B I_B - R(I_A - I_B) = 0 \rightarrow (R + Z_A)I_A - (R + Z_B)I_B = 0$

$$\rightarrow I_A = \frac{V_{in}}{2(R + Z_A)} \quad , \quad I_B = \frac{V_{in}}{2(R + Z_B)} \rightarrow I_{in} = I_A + I_B = \frac{V_{in}}{2}\left(\frac{1}{R + Z_A} + \frac{1}{R + Z_B}\right)$$

$$= \frac{V_{in}}{2}\left(\frac{R + Z_A + R + Z_B}{(R + Z_A)(R + Z_B)}\right) = \frac{V_{in}}{2}\left(\frac{2R + Z_A + Z_B}{R^2 + R(Z_A + Z_B) + Z_A Z_B}\right)$$

از طرفی می دانیم که $Z_A Z_B = R^2$ است بنابراین خواهیم داشت

$$I_{in} = \frac{V_{in}}{2}\left(\frac{2R + Z_A + Z_B}{R^2 + R(Z_A + Z_B)}\right) = \frac{V_{in}}{2R}\left(\frac{2R + Z_A + Z_B}{2R + Z_A + Z_B}\right) = \frac{V_{in}}{2R} \rightarrow Z_{in} = \frac{V_{in}}{I_{in}} = 2R$$

ملاحظه می شود که مقاومت ورودی برابر $2R$ است که مستقل از فرکانس است.

همچنین می توان نوشت

$$V_o = R(I_A + I_B) = R\left(\frac{V_{in}}{2(R + Z_A)} - \frac{V_{in}}{2(R + Z_B)}\right) = \frac{RV_{in}}{2}\left(\frac{Z_B - Z_A}{(R + Z_A)(R + Z_B)}\right)$$

$$= \frac{RV_{in}}{2}\left(\frac{\frac{R^2}{Z_A} - Z_A}{(R + Z_A)\left(R + \frac{R^2}{Z_A}\right)}\right) = \frac{V_{in}}{2}\left(\frac{R^2 - Z_A^2}{(R + Z_A)^2}\right) = \frac{V_{in}}{2}\left(\frac{(R - Z_A)(R + Z_A)}{(R + Z_A)^2}\right)$$

$$= \frac{V_{in}}{2}\left(\frac{(R - Z_A)}{R + Z_A}\right) \rightarrow \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{1}{2}\frac{R - Z_A}{R + Z_A}$$

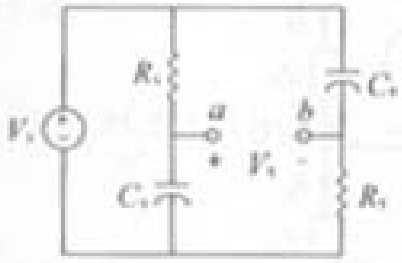
مسئله ۱۲۰

$R_1C_1 = R_2C_2 = T$ و $\angle V_2 - \angle V_1 = \phi$.

الف ـ نشان دهید ϕ با T تغییر می کند.

ب ـ برای یک مقدار ثابت T نشان دهید ϕ با ω تغییر می کند.

پ ـ برای یک مقدار ثابت T نشان دهید حداکثر دامنه V_2 به حداکثر دامنه V_1 تابعی از ω است.



شکل مسئله ۱۲۰

حل : الف ـ بنا بر قاعده تقسیم ولتاژ داریم

$$V_a = \frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} V_1 = \frac{1}{1 + j\omega R_1 C_1} V_1 = \frac{1}{1 + j\omega T} V_1$$

$$V_b = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} V_1 = \frac{j\omega R_2 C_2}{1 + j\omega R_2 C_2} V_1 = \frac{j\omega T}{1 + j\omega T} V_1$$

$$\rightarrow \; V_2 = V_a - V_b = \left(\frac{1}{1 + j\omega T} V_1 - \frac{j\omega T}{1 + j\omega T} V_1\right) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T} V_1 \quad \rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T}$$

$$\rightarrow \; \phi = \angle V_2 - \angle V_1 = -\tan^{-1}\omega T - \tan^{-1}\omega T = -2\tan^{-1}\omega T$$

بنابراین ϕ با T تغییر می کند.

ب ـ با توجه به رابطه بدست آمده برای ϕ واضح است که اگر T ثابت باشد ϕ با ω تغییر می کند.

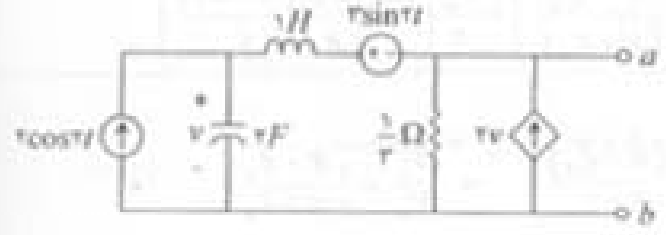
پ ـ با توجه به $\frac{V_2}{V_1}$ بدست آمده داریم

$$\left|\frac{V_2}{V_1}\right| = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = 1$$

ملاحظه می شود که $\left|\frac{V_2}{V_1}\right|$ ثابت بوده و به ω بستگی ندارد.

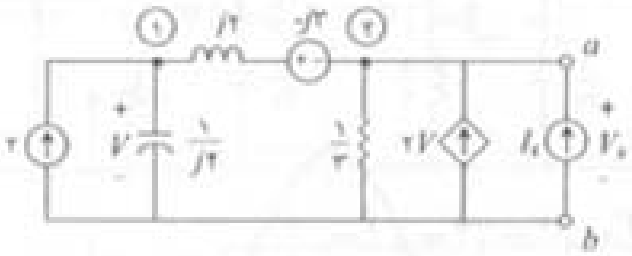
مسئله ۱۲۱

معادل تونن دو سر a و b را بدست آورید. ($\omega = 2$)



شکل مسئله ۱۲۱

حل : بدین منظور جریان آزمایشی I_x را به دو سر a و b وصل کرده و ولتاژ دو سر آن را بدست می آوریم.



$$\begin{cases} ① \text{ برای گره } KCL \rightarrow -۲+\dfrac{V}{\frac{۱}{j۲}}+\dfrac{V-(V_x-j۳)}{j۲}=۰ \rightarrow V_x+۷V=-j \\ ② \text{ برای گره } KCL \rightarrow -I_x-۲V+\dfrac{V_x}{\frac{۱}{۲}}+\dfrac{(V_x-j۳)-V}{j۲}=۰ \end{cases}$$

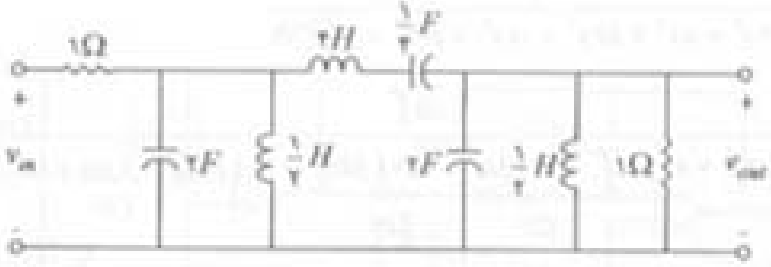
$$\rightarrow (۱+j۶)V_x-(۱+j۲)V=j۲I_x+j۲$$

$$\rightarrow V_x=\frac{\begin{vmatrix} -j & ۷ \\ j۲I_x+j۲ & -(۱+j۲) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۱ & ۷ \\ ۱+j۶ & -(۱+j۲) \end{vmatrix}}=\frac{-j۱۲I_x-۲-j۲۰}{-۸-j۲۶}=(۰/۲۹+j۰/۰۵)I_x+۰/۲۲-j۰/۰۱$$

$$\rightarrow Z_{th}=۰/۲۹+j۰/۰۵ \quad , \quad E_{oc}=۰/۲۲-j۰/۰۱=۰/۲۲\angle -۱/۲^\circ$$

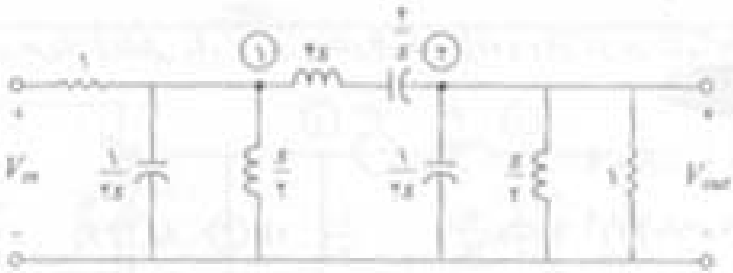
مسئله ۱۲۲

$H(j\omega)=\dfrac{V_{out}}{V_{in}}$ را تعیین و نوع رفتار فیلتری و فرکانس قطع $-3dB$ را تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۲۲

حل : با فرض $s=j\omega$ ، در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود.



KCL برای گره ۲ $\rightarrow$ $\dfrac{V_{out}}{1}+\dfrac{V_{out}}{\frac{s}{2}}+\dfrac{V_{out}}{\frac{1}{4s}}+\dfrac{V_{out}-V_1}{4s+\frac{4}{s}}=0$

$$\rightarrow \left(1+4s+\frac{4}{s}+\frac{s}{4s^2+4}\right)V_{out}-\left(\frac{s}{4s^2+4}\right)V_1=0$$

KCL برای گره ۱ $\rightarrow$ $\dfrac{V_1-V_{in}}{1}+\dfrac{V_1}{\frac{1}{4s}}+\dfrac{V_1}{\frac{s}{2}}+\dfrac{V_1-V_{out}}{4s+\frac{4}{s}}=0$

$$\rightarrow \left(\frac{s}{4s^2+4}\right)V_{out}+\left(1+4s+\frac{4}{s}+\frac{s}{4s^2+4}\right)V_1=V_{in}$$

$$\rightarrow V_{out}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -\frac{s}{4s^2+4} \\ V_{in} & 1+4s+\frac{4}{s}+\frac{s}{4s^2+4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+4s+\frac{4}{s}+\frac{s}{4s^2+4} & -\frac{s}{4s^2+4} \\ -\frac{s}{4s^2+4} & 1+4s+\frac{4}{s}+\frac{s}{4s^2+4} \end{vmatrix}}$$

$$\rightarrow \frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{s^2}{16s^4+8s^3+56s^2+17s^2+56s^2+8s+16}$$

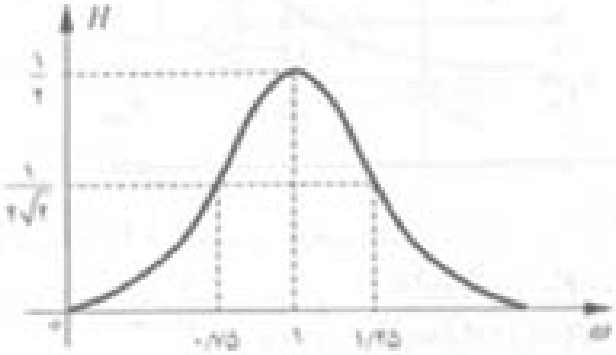
$$H(j\omega)=\frac{(j\omega)^2}{16(j\omega)^4+8(j\omega)^3+56(j\omega)^2+17(j\omega)^2+56(j\omega)^2+8j\omega+16}$$

$$\rightarrow |H(j\omega)|=\frac{|\omega^2|}{4\sqrt{\left(8-28\omega^2+28\omega^2-8\omega^4\right)^2+\left(8\omega-17\omega^2+8\omega^3\right)^2}}$$

$$=\begin{cases} 0 & , \ \omega\rightarrow 0 \\ 0 & , \ \omega\rightarrow\infty \end{cases}$$

بنابراین نمودار $|H(j\omega)|$ بصورت زیر می باشد که نمایشگر یک فیلتر میان گذر است.

$$\frac{dH(j\omega)}{d\omega}=0 \rightarrow \omega=1 \rightarrow |H(j\omega)|_{max}=|H(j\omega)|_{\omega=1}=\frac{1}{2}$$



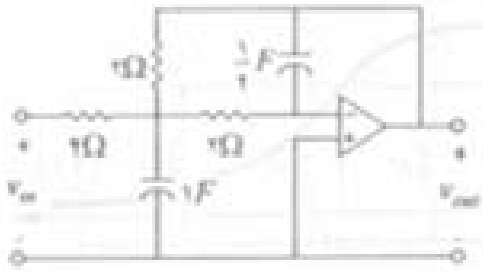
برای محاسبه فرکانس قطع $3dB$ می توان نوشت.

$$|H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{2}}|H(j\omega)|_{max}=\frac{1}{2\sqrt{2}} \rightarrow \omega=0/75\ ,\ 1/25$$

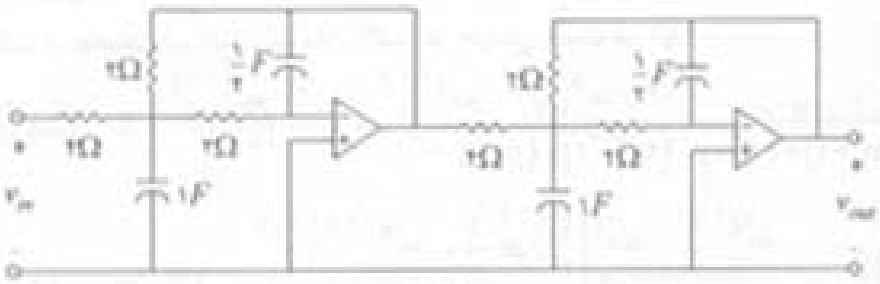
مسئله ۱۲۳

الف ـ $H(j\omega)=\frac{V_{out}}{V_{in}}$ مدار شکل (الف) را محاسبه و رفتار فیلتری آن را مشخص کنید.

ب ـ $H(j\omega)=\frac{V_{out}}{V_{in}}$ مدار شکل (ب) را تعیین و رفتار فیلتری مدار را مشخص کنید.



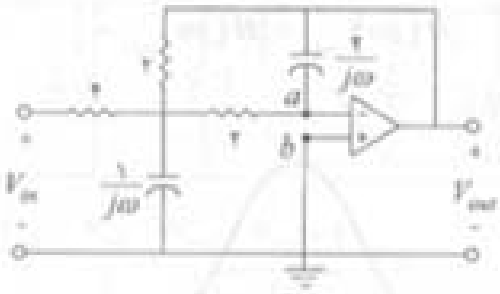
(الف)



(ب)

شکل مسئله ۱۲۳

حل : الف ـ در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر می باشد.



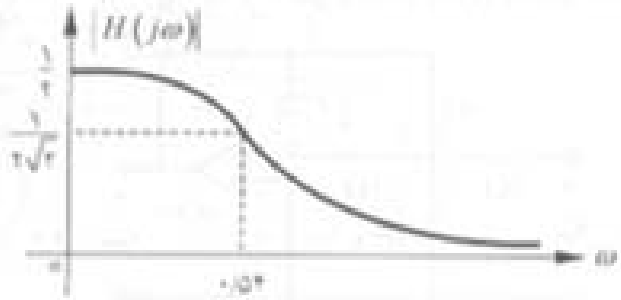
با فرض ایده آل بودن آپ امپ $V_a = V_b = ۰$ بوده و خواهیم داشت.

$$KCL \text{ برای گره } ⓐ \rightarrow \frac{۰-V_C}{۲}+\frac{۰-V_{out}}{\frac{۲}{j\omega}}=۰ \rightarrow V_C=-j\omega V_{out}$$

$$KCL \text{ برای گره } ⓒ \rightarrow \frac{-j\omega V_{out}-V_{in}}{۲}+\frac{-j\omega V_{out}}{\frac{۱}{j\omega}}+\frac{-j\omega V_{out}-V_{out}}{۲}+\frac{-j\omega V_{out}-۰}{۲}=۰$$

$$\rightarrow H(j\omega)=\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{۱}{۲\omega^۲-۲+j۵\omega} \rightarrow |H(j\omega)|=\frac{۱}{\sqrt{(۲\omega^۲-۲)^۲+(۵\omega)^۲}}=\begin{cases}\frac{۱}{۲}, & \omega\to ۰\\ ۰, & \omega\to\infty\end{cases}$$

بنابراین نمودار $|H(j\omega)|$ بصورت زیر می باشد که نمایشگر یک فیلتر پایین گذر است.

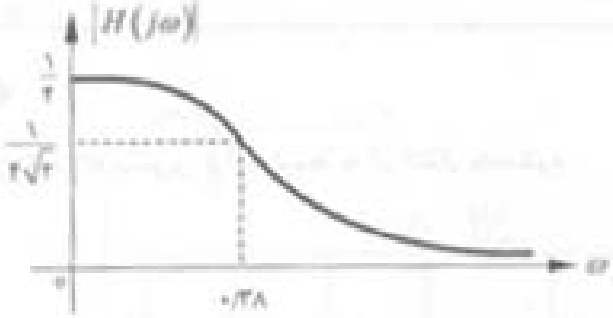


ب ـ مدار(ب) از دومدار(الف) تشکیل شده که خروجی یکی به ورودی دیگری وصل شده است ولذا تابع شبکه در این حالت از حاصلضرب تابع شبکه مدار (الف) در خودش بدست می آید.

$$H(j\omega)=\frac{۱}{(۲\omega^۲-۲)+(j۵\omega)}\times\frac{۱}{(۲\omega^۲-۲)+(j۵\omega)}$$

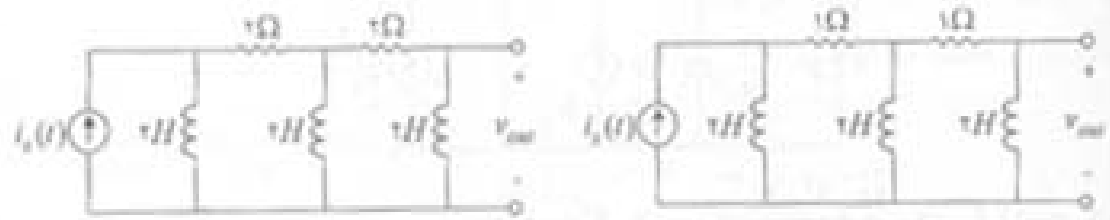
$$\rightarrow |H(j\omega)|=\frac{۱}{(۲\omega^۲-۲)^۲+(۵\omega)^۲}=\begin{cases}\frac{۱}{۴}, & \omega\to ۰\\ ۰, & \omega\to\infty\end{cases}$$

بنابراین نمودار $|H(j\omega)|$ بصورت زیر می باشد که نمایشگر یک فیلتر پایین گذر است.



مسئله ۱۲۳

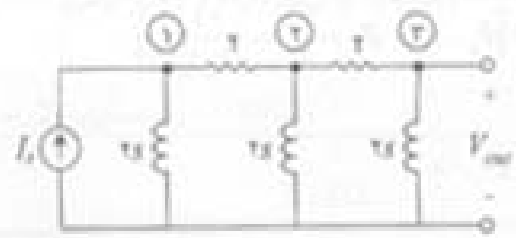
در شکل (الف) $H(j\omega)=\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{\alpha(j\omega)^3}{(j\omega)^3+\beta(j\omega)^2+\gamma(j\omega)+\delta}$ است. $H(j\omega)$ مدار شکل (ب) را بدست آورید.



(الف) (ب)

شکل مسئله ۱۲۴

حل : با فرض $s=j\omega$ مدار (ب) در حالت دائمی سینوسی بصورت زیر خواهد بود.



$$\text{KCL برای گره ۳} \rightarrow \frac{V_{out}}{2s}+\frac{V_{out}-V_2}{2}=0 \rightarrow V_2=\frac{s+1}{s}V_{out}$$

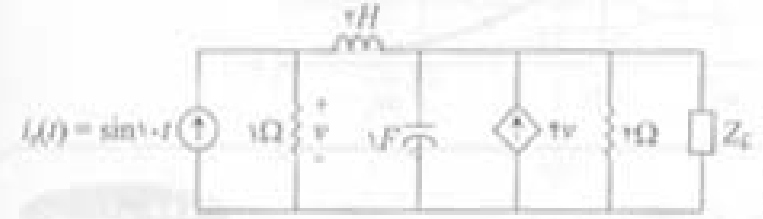
$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \frac{\frac{s+1}{s}V_{out}-V_{out}}{2}+\frac{\frac{s+1}{s}V_{out}}{2s}+\frac{\frac{s+1}{s}V_{out}-V_1}{2}=0 \rightarrow V_1=\frac{s^2+3s+1}{s^2}V_{out}$$

$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow -I_s+\frac{\frac{s^2+3s+1}{s^2}V_{out}}{2s}+\frac{\frac{s^2+3s+1}{s^2}V_{out}-\frac{s+1}{s}V_{out}}{2}=0$$

$$\rightarrow \frac{2s^2+2s+1}{s^2}V_{out}=2I_s \rightarrow H(j\omega)=\frac{2(j\omega)^2}{2(j\omega)^2+2(j\omega)+1}$$

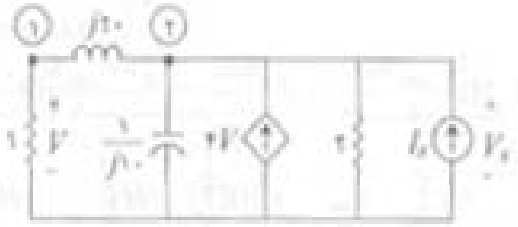
مسئله ۱۲۵

Z_L را چنان تعیین کنید که بیشترین توان متوسط به آن انتقال داده شود



شکل مسئله ۱۲۵

حل: ابتدا امپدانس دو سر Z_L را بدون در نظر گرفتن خود Z_L بدست می آوریم



$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow \frac{V}{1} + \frac{V - V_s}{j20} = 0 \rightarrow V = \frac{V_s}{1 + j20}$$

$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \frac{V_s}{1 + j20} + \frac{V_s}{\frac{1}{j10}} - 2\left(\frac{V_s}{1 + j20}\right) + \frac{V_s}{2} - I_s = 0$$

$$\rightarrow (-20.5 + j20)V_s = (2 + j20)I_s \rightarrow Z_s = \frac{V_s}{I_s} = \frac{2 + j20}{-20.5 + j20}$$

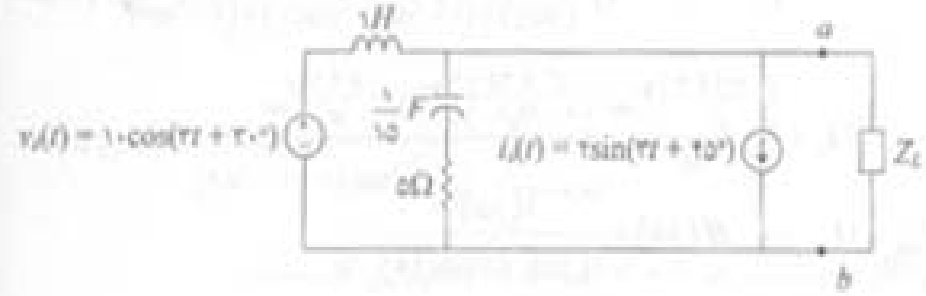
شرط انتقال توان ماکزیمم به Z_L عبارتست از:

$$Z_L = \bar{Z}_s \rightarrow Z_L = 0.005 + j0.098$$

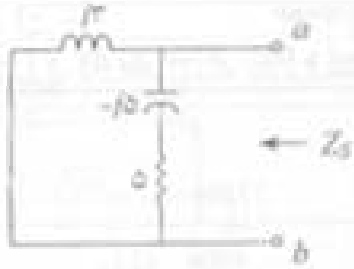
مسئله ۱۲۶

الف ـ امپدانس Z_L را چنان انتخاب کنید که بیشترین توان متوسط به آن انتقال داده شود.

ب ـ با استفاده از عناصر R و L و C مداری طراحی کنید که نشان دهنده امپدانس Z_L باشد.



حل : الف ـ ابتدا امپدانس دیده شده از دو سر a و b را بدون در نظر گرفتن Z_L بدست می آوریم.



$$Z_s = j3 \parallel (5 - j5) = \frac{j3 \times (5 - j5)}{j3 + 5 - j5} = \frac{15 + j15}{5 - j2} = 1.5 + j3.6$$

شرط انتقال توان ماکزیمم عبارتست از

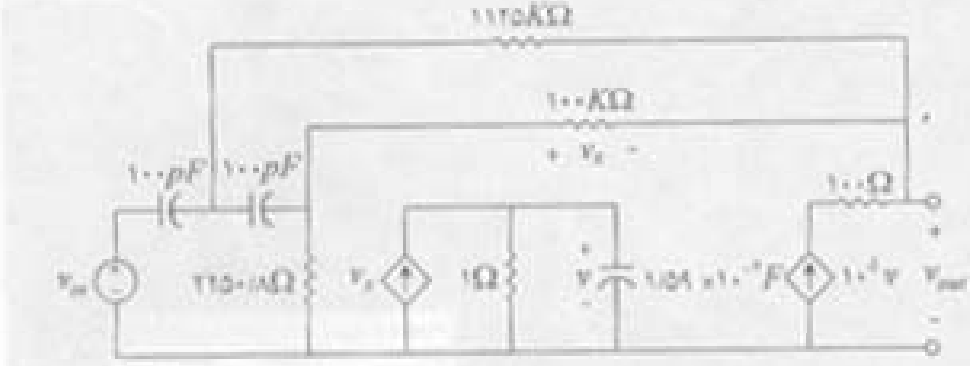
$$Z_L = Z_S^* \rightarrow Z_L = 1.5 - j3.6$$

ب ـ برای ساخت امپدانس Z_L می توان از یک مدار مقاومت R سری با خازن C استفاده کرد که مقادیر R و C بصورت زیر بدست می آیند.

$$Z_L = R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{j}{3C} = 1.5 - j3.6 \rightarrow \begin{cases} R = 1.5 \\ \frac{1}{3C} = 3.6 \rightarrow C = 0.092F \end{cases}$$

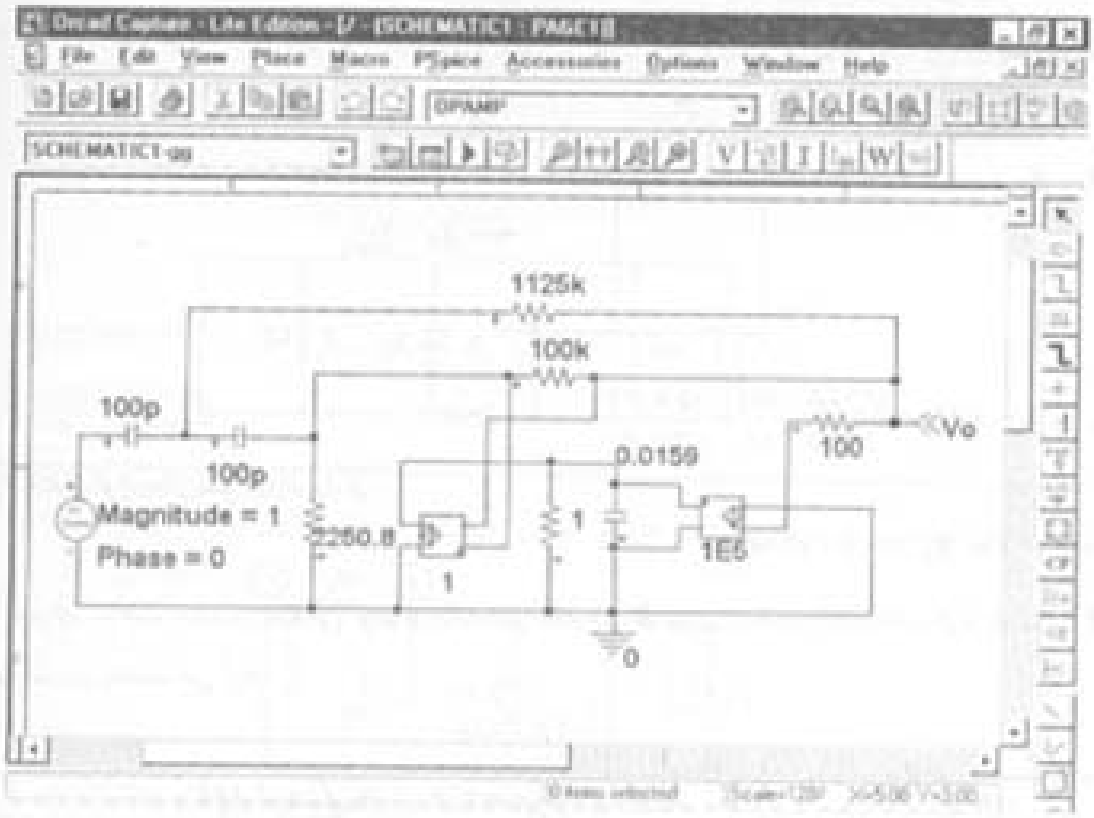
مسئله ۱۲۷

با استفاده از اسپایس $H(j\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}}$ را رسم کرده و رفتار فیلتری مدار را مشخص کنید.

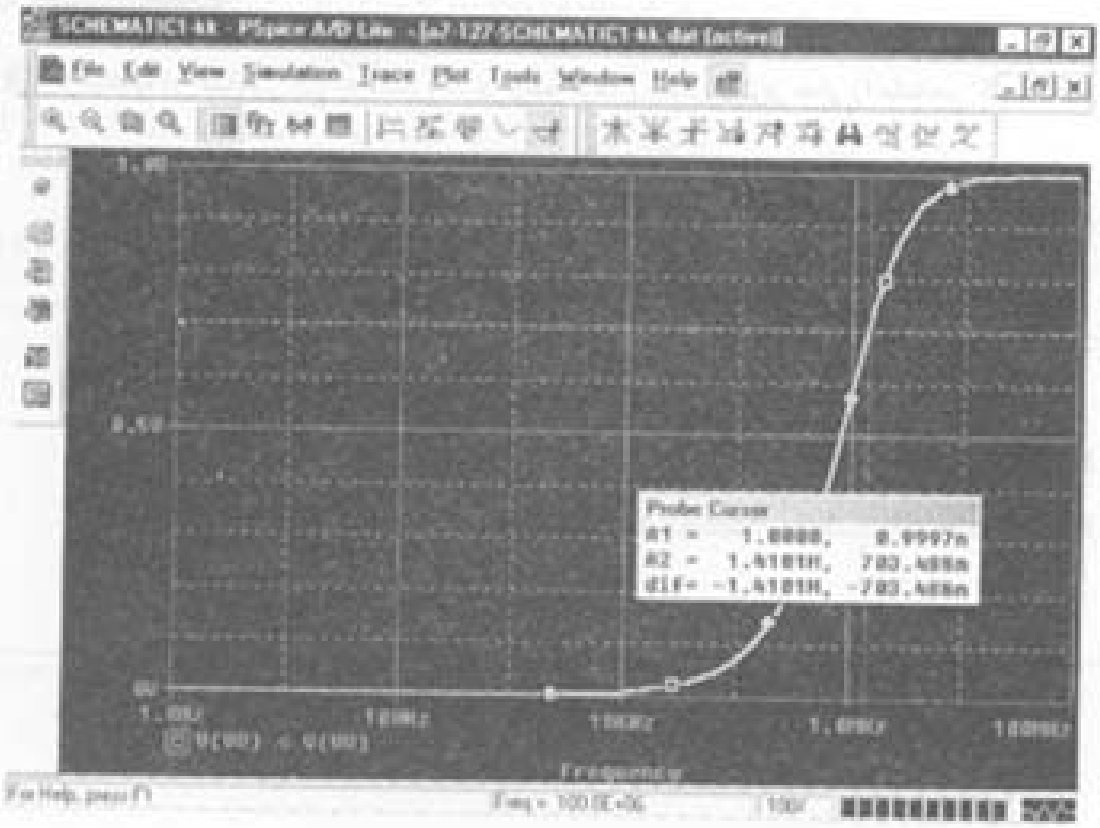


شکل مسئله ۱۲۷

حل : بدین منظور شماتیک زیر را رسم می کنیم که در آن $V_{in} = 1\angle 0$ در نظر گرفته شده است.

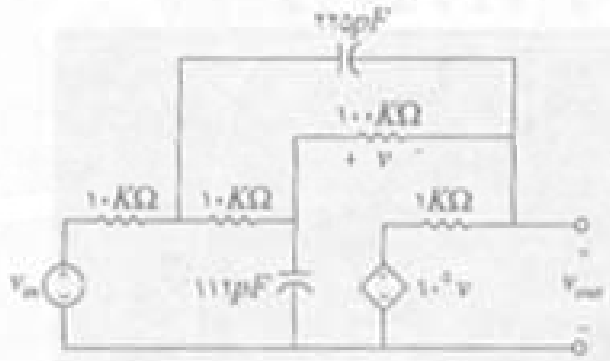


با اجرای شماتیک فوق بصورت **Ac Sweep**، V_{out} که برابر $H(j\omega)$ است بصورت زیر بدست خواهد آمد که یک فیلتر بالاگذر با فرکانس وصل $f_c = ۱/۴۱\ MHz$ می باشد.



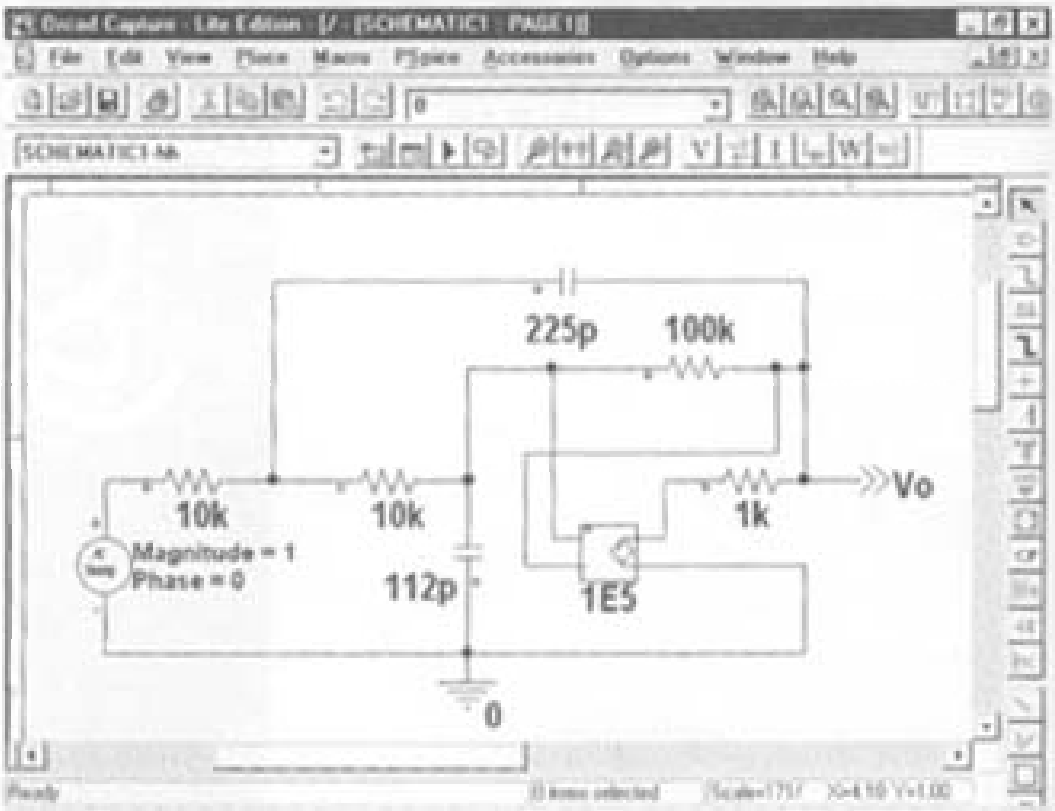
مسئله ۱۲۸

مسئله ۱۲۸ را برای مدار زیر تکرار کنید.

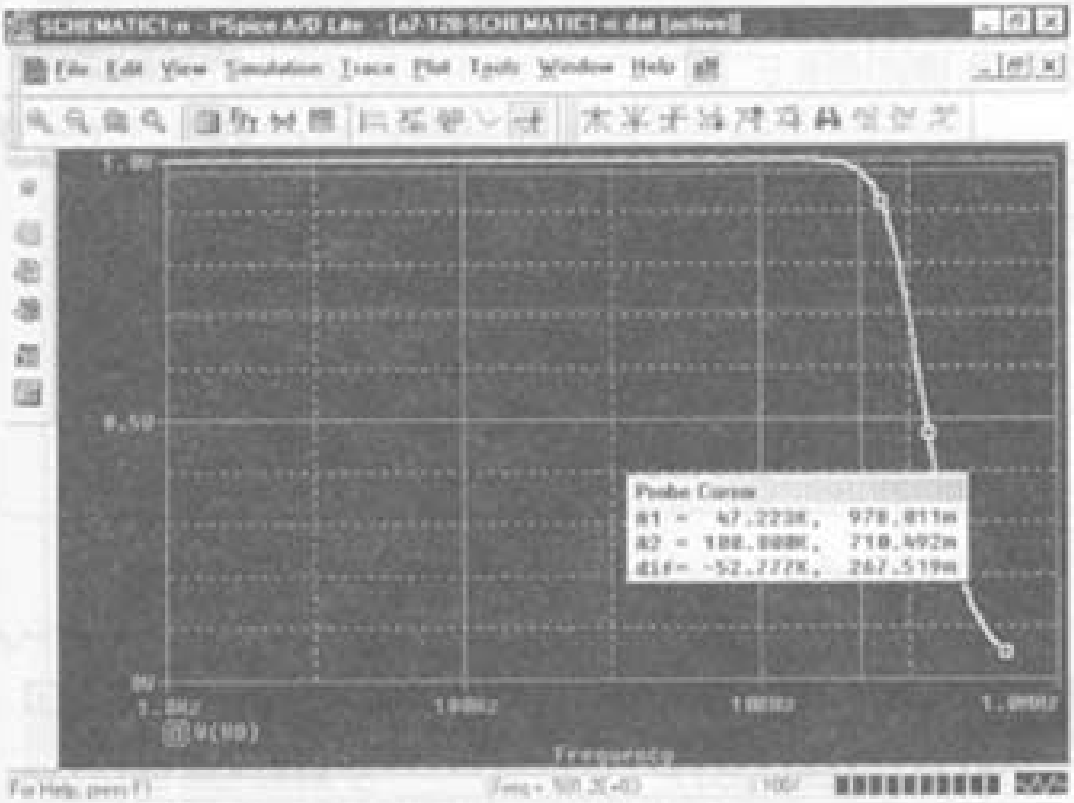


شکل مسئله ۱۲۸

حل : همانند مسئله قبل با فرض $V_{in} = 1\angle 0$ شماتیک زیر را رسم می کنیم. با این کار $H(j\omega) = V_{out}$ خواهد شد.



با اجرای شماتیک فوق بصورت **Ac Sweep**، $H(j\omega) = V_{out}$ بصورت زیر بدست می آید که یک فیلتر پایین گذر با فرکانس قطع $100\ KHz$ می باشد.


SCHEMATIC1-a - PSpice A/D Lite - [A/-120-SCHEMATIC1-a.dat (active)]
File Edit View Simulation Trace Plot Tools Window Help
1.0V
0.50
0V
1.0kHz
10kHz
100kHz
1.0MHz
V(N9)
Frequency
Probe Cursor
A1 = 47.2238k, 978.811m
A2 = 188.888k, 710.492m
A1/A2 = -52.777k, 267.519m