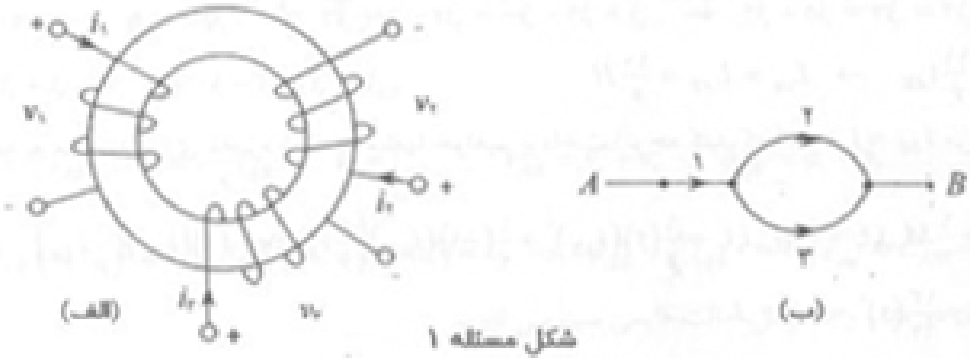
مسئله ۱

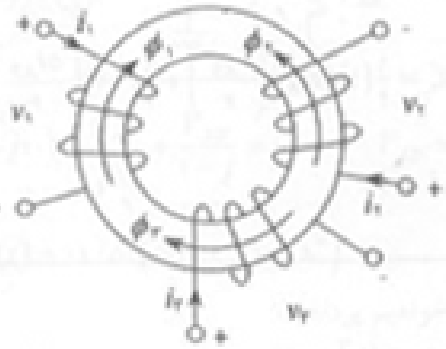
ضریب خود القایی هر سیم پیچ $2H$ و قدر مطلق ضریب خود القایی متقابل $1H$ است. اگر سیم پیچی ها را بصورت شکل (ب) ببندیم L_{AB} را بدست آورید.

اگر $i_1 = 2A$ و $i_2 = 1A$ و $i_3 = 2A$ باشد انرژی ذخیره شده در سیم پیچ ها را بیابید.



شکل مسئله ۱

حل : ابتدا شار گذرنده از هسته را بنابر قانون دست راست تعیین می کنیم.



ϕ_1 و ϕ_3 همجهت و هر دو مخالف جهت ϕ_2 اند بنابراین داریم.

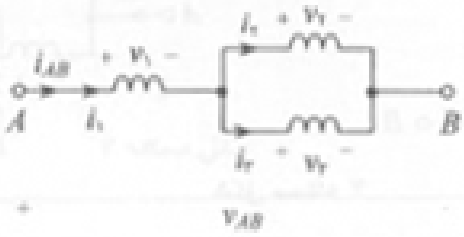
$$M_{12} = M_{21} = 1 \quad , \quad M_{13} = M_{31} = -1 \quad , \quad M_{23} = M_{32} = -1$$

و لذا خواهیم داشت

$$\phi_1 = L_1 i_1 + M_{12} i_2 + M_{13} i_3 = 2i_1 - i_2 + i_3 \quad , \quad \phi_2 = M_{21} i_1 + L_2 i_2 + M_{23} i_3 = -i_1 + 2i_2 - i_3$$

$$\phi_3 = M_{31} i_1 + M_{32} i_2 + L_3 i_3 = i_1 - i_2 + 2i_3$$

شکل (ب) را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



بنابراین می توان نوشت.

$$\begin{cases} v_1 = v_2 \rightarrow \phi_1 = \phi_2 \rightarrow -i_1 + 2i_2 - i_3 = i_1 - i_2 + 2i_3 \rightarrow 2i_1 - 3i_2 = 2i_3 = 2i_{AB} \\ i_1 + i_2 = i_3 = i_{AB} \end{cases}$$

$$\rightarrow i_1 = \frac{5}{6} i_{AB} \;,\; i_2 = \frac{1}{6} i_{AB} \;,\; v_{AB} = v_1 + v_2$$

$$\rightarrow Q_{AB} = \phi_1 + \phi_2 = (2i_1 - i_2 + i_3) + (-i_1 + 2i_2 - i_3) = i_1 + i_3 = i_{AB} + \frac{5}{6} i_{AB}$$

$$\rightarrow Q_{AB} = \frac{11}{6} i_{AB} \rightarrow L_{eq} = L_{AB} = \frac{11}{6} H$$

در ادامه به محاسبه انرژی ذخیره شده در سلفها خواهیم پرداخت.(توجه کنید که $i_{AB} = i_3 = 2A$ می باشد.)

$$E_1 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} M_{12} i_1 i_2 + \frac{1}{2} M_{13} i_1 i_3 = \frac{1}{2}(2)(i_{AB})^2 + \frac{1}{2}(-1)(i_{AB})\left(\frac{5}{6} i_{AB}\right) + \frac{1}{2}(1)(i_{AB})\left(\frac{1}{6} i_{AB}\right)$$

$$= \frac{13}{12} i_{AB}^2 = \frac{13}{12}(2)^2 = 4/33\ J$$

$$E_2 = \frac{1}{2} M_{21} i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + \frac{1}{2} M_{23} i_2 i_3 = \frac{1}{2}(-1)(i_{AB})\left(\frac{5}{6} i_{AB}\right) + \frac{1}{2}(2)\left(\frac{5}{6} i_{AB}\right)^2 + \frac{1}{2}(-1)\left(\frac{5}{6} i_{AB}\right)\left(\frac{1}{6} i_{AB}\right)$$

$$= \frac{15}{72} i_{AB}^2 = \frac{15}{72}(2)^2 = 0/83\ J$$

$$E_3 = \frac{1}{2} M_{31} i_1 i_3 + \frac{1}{2} M_{32} i_2 i_3 + \frac{1}{2} L_3 i_3^2 = \frac{1}{2}(1)(i_{AB})\left(\frac{i_{AB}}{6}\right) + \frac{1}{2}(-1)\left(\frac{5 i_{AB}}{6}\right)\left(\frac{i_{AB}}{6}\right) + \frac{1}{2}(2)\left(\frac{i_{AB}}{6}\right)^2$$

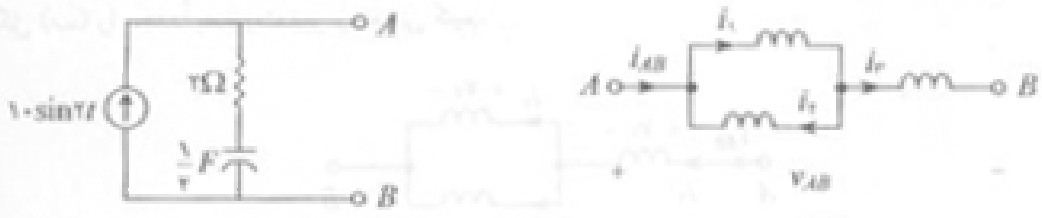
$$= \frac{19}{72}(i_{AB})^2 = \frac{19}{72}(2)^2 = 1/95\ J$$

مسئله ۲

ماتریس اندوکتانس سه سیم پیچی تزویج شده بصورت $L = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ است.

الف ـ $L_{AB} = ?$

ب ـ دو مدار را از سرهای A و B به هم وصل می کنیم v_{AB} و جریان گذرنده از هر سیم پیچ را حساب کنید.



(الف) (ب)

شکل مسئله ۲

حل : الف ـ با توجه به رابطه $\phi_k = L_k i_k$ داریم.

$$\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & -2\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\\ i_3\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}\phi_1 = 3i_1 + i_2 - 2i_3\\ \phi_2 = i_1 + 2i_2 - i_3\\ \phi_3 = -2i_1 - i_2 + 2i_3\end{cases}$$

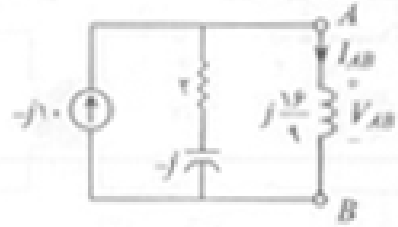
با توجه به شکل (ب) داریم.

$$\begin{cases} v_1 = -v_2 \rightarrow \phi_1 = -\phi_2 \rightarrow 3i_1 + i_2 - 2i_3 = -i_1 - 2i_2 + i_3 \rightarrow 4i_1 + 5i_2 = 3i_3 = 3i_{AB}\\ -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \rightarrow i_1 - i_2 = i_3 = i_{AB}\end{cases}$$

$$\rightarrow i_1 = \frac{8}{9} i_{AB} \;,\; i_2 = -\frac{1}{9} i_{AB} \;,\; i_3 = i_{AB} \;,\; v_{AB} = v_1 + v_2 \;,\; \phi_{AB} = \phi_1 + \phi_2$$

$$\rightarrow \phi_{AB} = (3i_1 - i_2 - 2i_3) + (-2i_1 - i_2 + 2i_3) = i_1 \rightarrow \phi_{AB} = \frac{8}{9} i_{AB} \rightarrow L_{eq} = L_{AB} = \frac{8}{9} H$$

ب ـ با اتصال دو مدار و با فرض حالت دایمی سینوسی داریم.



KCL برای گره (A) $\rightarrow -(-j10) + \dfrac{V_{AB}}{j\frac{16}{9}} + \dfrac{V_{AB}}{2-j} = 0 \rightarrow V_{AB} = 18/52\angle -27/8^\circ$

$$\rightarrow v_{AB}(t) = 18/52\left(\cos 2t - 27/8^\circ\right)$$

در ادامه به محاسبه جریان سلف ها خواهیم پرداخت:

$$I_2 = I_{AB} = \frac{V_{AB}}{j\frac{16}{9}} = \frac{18/52\angle -27/8^\circ}{\frac{16}{9}\angle 90^\circ} = 10/22\angle -137/8^\circ \rightarrow i_2(t) = 10/22\cos\left(2t - 137/8^\circ\right)$$

$$I_1 = \frac{8}{9} I_{AB} = 9/26\angle -137/8^\circ \rightarrow i_1(t) = 9/26\cos\left(2t - 137/8^\circ\right)$$

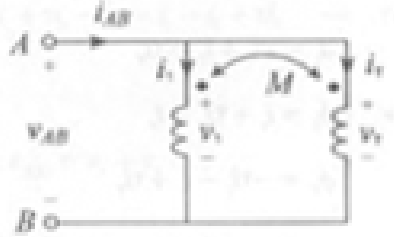
$$I_3 = -\frac{1}{9} I_{AB} = -1/16\angle -137/8^\circ \rightarrow i_3(t) = -1/16\cos\left(2t - 137/8^\circ\right)$$

مسئله ۳

$L_{AB} = ?$

شکل مسئله ۳

حل : شکل مسئله را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



از آنجا که جریان هر دو سلف از سر نقطه دار وارد شده لذا اندوکتانس متقابل مثبت خواهد بود.

$$v_1 = v_2 \rightarrow \phi_1 = \phi_2 \rightarrow L_1 i_1 + M i_2 = M i_1 + L_2 i_2 \rightarrow i_1 = \frac{L_2 - M}{L_1 - M} i_2$$

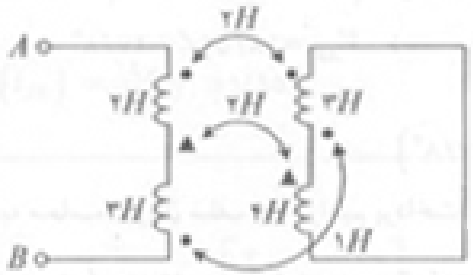
$$i_{AB} = i_1 + i_2 = \frac{L_2 - M}{L_1 - M} i_2 + i_2 = \frac{L_1 + L_2 - 2M}{L_1 - M} i_2$$

$$v_{AB} = v_1 \rightarrow \phi_{AB} = \phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 = L_1 \frac{L_2 - M}{L_1 - M} i_2 + M i_2 = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - M} i_2$$

$$\rightarrow L_{AB} = \frac{\phi_{AB}}{i_{AB}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

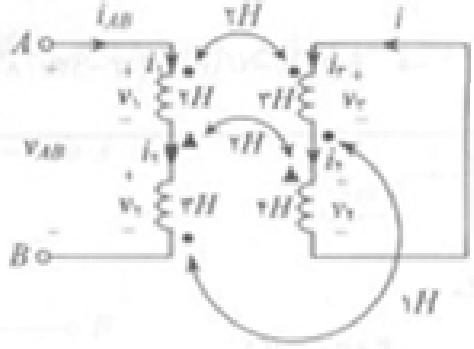
مسئله ۴

$L_{AB} = ?$



شکل مسئله ٤

حل : شکل مسئله را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



با توجه به شکل فوق به راحتی می توان نوشت.

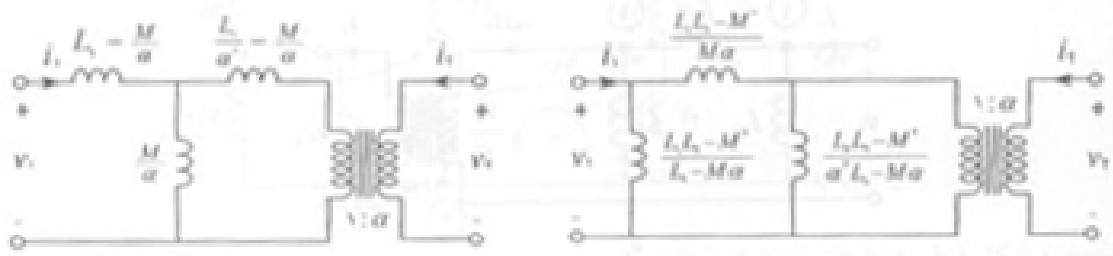
$$\begin{cases} \phi_1 = 2i_1 + 2i_2 - 2i_3 = 2i_{AB} \\ \phi_2 = 3i_2 + i_3 = 3i_{AB} + i \\ \phi_3 = 2i_1 + i_2 + 3i_3 = 3i_{AB} + 2i \\ \phi_4 = -2i_1 + 2i_4 = -2i_{AB} + 2i \end{cases}$$

$$v_3 + v_4 = 0 \quad \rightarrow \quad \phi_3 + \phi_4 = 0 \quad \rightarrow \quad 3i_{AB} + 3i - 2i_{AB} + 2i = 0 \quad \rightarrow \quad i = -\frac{i_{AB}}{7}$$

$$v_{AB} = v_1 + v_2 \rightarrow \phi_{AB} = \phi_1 + \phi_2 = 2i_{AB} + 3i_{AB} + i = 2i_{AB} + 3i_{AB} - \frac{i_{AB}}{7} = \frac{33}{7} i_{AB} \rightarrow L_{AB} = \frac{33}{7} H$$

مسئله ۵

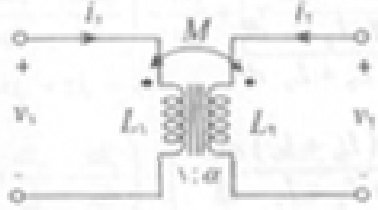
نشان دهید که دوقطبی های (الف) و (ب) می توانند به جای مدار معادل یک جفت سلف تزویج شده با اندوکتانسهای L_1 ، L_2 و M بکار روند.



(الف) (ب)

شکل مسئله ۵

حل : الف ـ سلفهای تزویج شده مورد نظر بصورت زیر خواهند بود که دستگاه معادله(۱) رفتار مدار را توصیف می کند.



$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad , \quad v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \qquad (1)$$

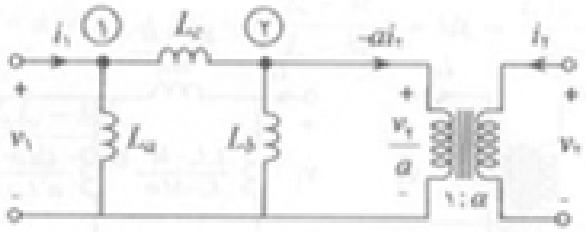
مدار قسمت (الف) را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.

$$\begin{cases} KVL \text{ برای مش ۱} \rightarrow -v_1 + L_a\dfrac{di_1}{dt} + L_c\dfrac{d(i_1+ai_2)}{dt} = 0 \rightarrow v_1 = (L_a+L_c)\dfrac{di_1}{dt} + (aL_c)\dfrac{di_2}{dt} \\ KVL \text{ برای مش ۲} \rightarrow -L_c\dfrac{d(i_1+ai_2)}{dt} + L_b\dfrac{d(-ai_2)}{dt} + \dfrac{v_2}{a} = 0 \rightarrow v_2 = aL_c\dfrac{di_1}{dt} + a^2(L_c+L_b)\dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

با مقایسه دستگاه بدست آمده با دستگاه (I) داریم.

$$\begin{cases} L_a + L_c = L_1 \\ aL_c = M \\ a^2(L_c+L_a) = L_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L_a = L_1 - \dfrac{M}{a} \\ L_b = \dfrac{L_2}{a^2} - \dfrac{M}{a} \\ L_c = \dfrac{M}{a} \end{cases}$$

ب ـ مدار قسمت (ب) را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



$$\begin{cases} KCL \text{ برای گره ۱} \rightarrow -i_1 + \dfrac{v_1}{L_a} + \dfrac{v_1 - \frac{v_2}{a}}{L_c} = 0 \rightarrow a(L_a+L_c)v_1 - L_b v_2 = aL_a L_c i_1 \\ KCL \text{ برای گره ۲} \rightarrow \dfrac{\frac{v_2}{a} - v_1}{L_c} + \dfrac{\frac{v_2}{a}}{L_b} - ai_2 = 0 \rightarrow -aL_b v_1 + (L_a+L_c)v_2 = a^2 L_b L_c i_2 \end{cases}$$

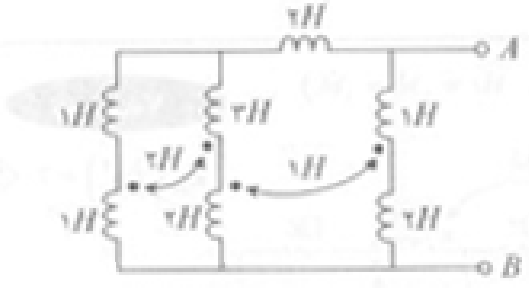
$$\rightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{L_a(L_b+L_c)}{L_a+L_b+L_c}\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{aL_aL_b}{L_a+L_b+L_c}\dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = \dfrac{L_aL_b}{L_a+L_b+L_c}\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{a^2L_b(L_a+L_c)}{L_a+L_b+L_c}\dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

با مقایسه دستگاه بدست آمده با دستگاه (I) داریم.

$$\begin{cases} \dfrac{L_a(L_b+L_c)}{L_a+L_b+L_c} = L_1 \\ \dfrac{aL_aL_b}{L_a+L_b+L_c} = M \\ \dfrac{a^2L_b(L_a+L_c)}{L_a+L_b+L_c} = L_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L_a = \dfrac{L_1L_2 - M^2}{L_2 - Ma} \\ L_b = \dfrac{L_1L_2 - M^2}{a^2L_1 - Ma} \\ L_c = \dfrac{L_1L_2 - M^2}{Ma} \end{cases}$$

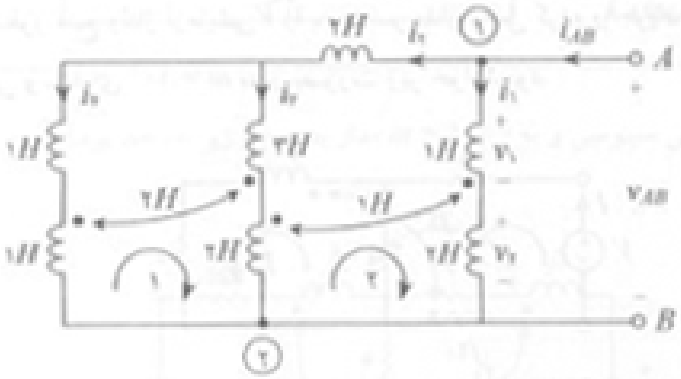
مسئله ۶

$L_{AB} = ?$



شکل مسئله ۶

حل : شکل مسئله را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



با توجه به شکل فوق به راحتی می توان نوشت.

KCL برای گره ۱ $\rightarrow \quad i_1 + i_2 = i_{AB}$

KCL برای گره ۲ $\rightarrow \quad i_1 + i_2 + i_3 = 0$

KVL برای مش ۱ $\rightarrow \quad -\left(\frac{di_2}{dt} - \frac{2di_3}{dt}\right) - \frac{di_2}{dt} + \left(3\frac{di_3}{dt} - \frac{2di_2}{dt}\right) + \left(2\frac{di_3}{dt} - \frac{di_1}{dt}\right) = 0$

$\rightarrow \quad i_1 - 7i_2 + 4i_3 = 0$

KVL برای مش ۲ $\rightarrow \quad -\left(2\frac{di_3}{dt} - \frac{di_1}{dt}\right) - \left(3\frac{di_3}{dt} - \frac{2di_2}{dt}\right) - 2\frac{di_3}{dt} + \left(\frac{di_1}{dt} - \frac{di_3}{dt}\right) + 2\frac{di_1}{dt} = 0$

$\rightarrow \quad 4i_1 - 2i_2 - 6i_3 + 2i_2 = 0$

$$\begin{cases} i_1 + i_2 = i_{AB} \\ i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ i_1 - 7i_2 + 4i_3 = 0 \\ 4i_1 - 2i_2 - 6i_3 + 2i_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3i_1 + 11i_2 = 0 \\ 2i_1 - 8i_2 = i_{AB} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_1 = \frac{11}{36} i_{AB} \\ i_2 = -\frac{i_{AB}}{12} \end{cases}$$

$$v_{AB} = v_1 + v_2 \quad \rightarrow \quad \phi_{AB} = \phi_1 + \phi_2 = i_1 - i_2 + 2i_1 = 3i_1 - i_2 = 3\left(\frac{11}{36} i_{AB}\right) + \frac{i_{AB}}{12} = i_{AB}$$

$$\rightarrow \quad L_{AB} = \frac{\phi_{AB}}{i_{AB}} = 1H$$

مسئله ۷

$Z_{in}(j10^4) = ?$

شکل مسئله ۷

حل : بدین منظور منبع ولتاژ آزمایشی V را به دو سر مدار وصل کرده و جریان آن را بدست می آوریم. در حالت دایمی سینوسی و به ازای $\omega = 10^4$ مدار بصورت زیر خواهد بود.

از آنجا که جریان هردو سیم پیچ یعنی I_1 و I_2 از سر نقطه دار وارد می شود لذا علامت ضریب القایی متقابل را مثبت منظور می کنیم.

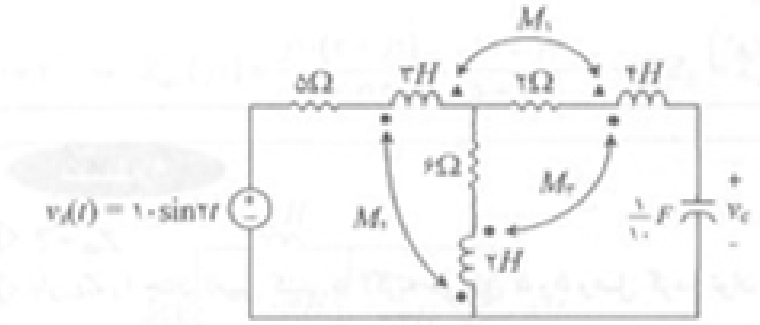
$$KVL \text{ برای مش ۲} \quad \rightarrow \quad (j20I_2 + j20I_2) + 6I_2 - j(I_2 - I_1) = 0 \quad \rightarrow \quad j21I_1 + (6 + j39)I_2 = 0$$

$$KVL \text{ برای مش ۱} \quad \rightarrow \quad -7 + 8I_1 - j(I_1 - I_2) + (j20I_1 + j20I_2) = 0 \quad \rightarrow \quad (8 + j19)I_1 + j21I_2 = 7$$

$$\rightarrow \quad I = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 6 + j39 \\ 7 & j21 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j21 & 6 + j39 \\ 8 + j19 & j21 \end{vmatrix}} = \frac{(-6 - j39)7}{113 - j226} \quad \rightarrow \quad Z_{in} = \frac{V}{I} = \frac{113 - j226}{-6 - j39} = 5/5 + j35/3$$

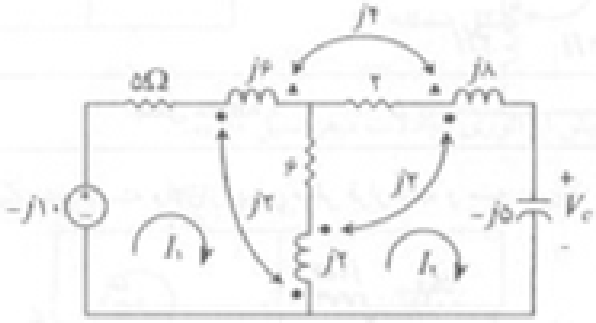
مسئله ۸

v_C را در حالت دایمی بدست آورید. ($M_1 = M_2 = 1H$, $M_3 = 2H$)



شکل مسئله ۸

حل : در حالت دایمی سینوسی و به ازای $\omega = 2$ مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$\begin{cases} KVL \text{ برای مش ۱} \rightarrow -(-j10)+5I_1+\left[j6I_1-j2(I_1-I_2)-j2I_2\right]+6(I_1-I_2) \\ \qquad +\left[j2(I_1-I_2)-j2I_1+j2I_2\right]=0 \\ KVL \text{ برای مش ۲} \rightarrow \left[j2(I_2-I_1)+j2I_1-j2I_2\right]+6(I_2-I_1)+2I_2 \\ \qquad +\left[j8I_2-j2I_1+j2(I_2-I_1)\right]-j5I_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (11+j2)I_1+(-6-j2)I_2=-j10 \\ (6+j2)I_1-(8+j)I_2=0 \end{cases} \rightarrow I_2=\frac{\begin{vmatrix} 11+j2 & -j10 \\ 6+j2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11+j2 & -6-j2 \\ 6+j2 & -(8+j) \end{vmatrix}}=\frac{j10(6+j2)}{-52-19j}$$

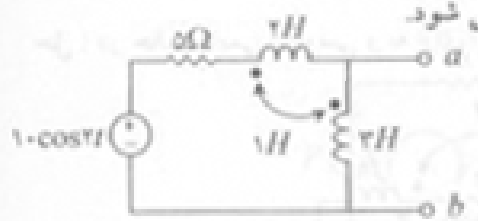
$$= \frac{(10\angle 90)(6/32\angle 18/4^\circ)}{(55/4\angle 159/9^\circ)} = 1/09\angle -51/8^\circ$$

$$\rightarrow \quad V_c = -j5I_1 = (5\angle -90^\circ)(1/09\angle -51/8^\circ) = 5/45\angle -141/8$$

$$\rightarrow \quad v_c(t) = 5/45\cos(2t - 141/8^\circ)$$

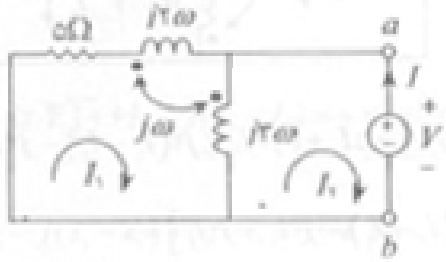
مسئله ۹

- $Z_{ab} = ?$
- بار Z_L را چنان تعیین کنید که اگر به سرهای a و b وصل گردد توان متوسط حداکثر به آن انتقال داده شود.
- چند درصد از توان تولید شده به بار Z_L تحویل داده می شود.



شکل مسئله ۹

حل : برای محاسبه Z_{ab} منبع نابسته ولتاژ را برابر صفر قرار داده و منبع جریان آزمایشی I را به دو سر a و b وصل می کنیم.



$$\begin{cases} KVL \text{ برای مش ۲} \rightarrow 5I_1 + j2\omega I_1 + j1\omega(I_1 - I_2) + j3\omega(I_1 - I_2) + j1\omega I_1 = 0 \\ \qquad \rightarrow (5 + j7\omega)I_1 - j4\omega I_2 = 0 \\ KVL \text{ برای مش ۱} \rightarrow j3\omega(I_2 - I_1) - j1\omega I_2 + V = 0 \rightarrow j4\omega I_1 - j3\omega I_2 = V \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad I = -I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j7\omega & 0 \\ j4\omega & V \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 + j7\omega & -j4\omega \\ j4\omega & -j3\omega \end{vmatrix}} = \frac{5 + j7\omega}{-j3\omega(5 + j7\omega) + j4\omega(j4\omega)}V = \frac{5 + j7\omega}{5j\omega(3 + j\omega)}V$$

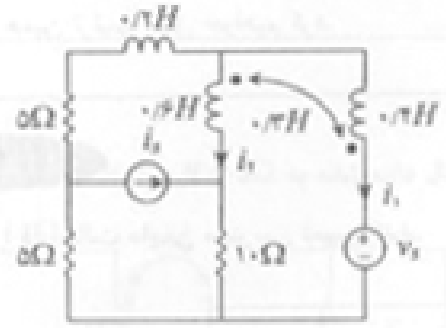
$$\rightarrow \quad Z_{ab}(j\omega) = \frac{V}{I} = \frac{5j\omega(3 + j\omega)}{5 + j7\omega}$$

شرط انتقال توان ماکزیمم به بار Z_L که دردو سر a و b قرار می گیرد $Z_L = \bar{Z}_{ab}(j\omega)$ می باشد که در ادامه به ازای $\omega = 2$، Z_L را محاسبه خواهیم کرد.

$$\omega = 2 \quad \rightarrow \quad Z_{ab}(j2) = \frac{j10(3 + j2)}{5 + j14} = \frac{-20 + j30}{5 + j14} \quad \rightarrow \quad Z_L = \bar{Z}_{ab} = \frac{-20 - j30}{5 - j14} = \frac{220 - j430}{221}$$

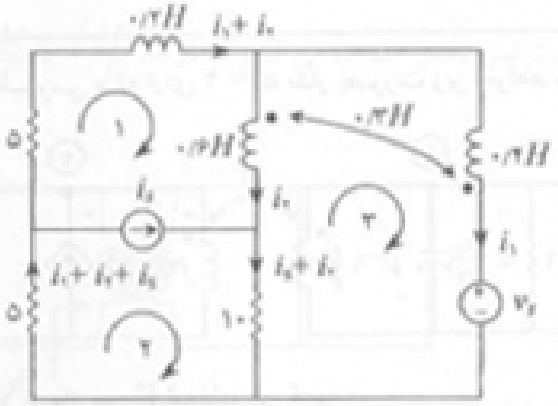
مسئله ۱۰

$i_1(t), i_2(t) = ?$



شکل مسئله ۱۰

حل : با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.



$$\begin{cases} KVL \text{ برای حلقه شامل مشهای ۱و۲} \rightarrow 5(i_1 + i_2 + i_s) + 5(i_1 + i_2) + 0/2D(i_1 + i_2) \\ \qquad + (0/6Di_2 - 0/3Di_1) + 10(i_1 + i_s) = 0 \\ KVL \text{ برای مش ۳} \rightarrow -10(i_s + i_2) - (0/6Di_2 - 0/3Di_1) + (0/9Di_2 - 0/3Di_1) + v_s = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (10 - 0/1D)i_1 + (20 + 0/8D)i_2 = -15i_s \\ 0/7Di_1 + (-10 - 0/9D)i_2 = 10i_s - v_s \end{cases}$$

$$\rightarrow\ i_L=\frac{\begin{vmatrix}-15i_s & 20+0.8D\\ 10i_s-v_s & -10-0.9D\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}10-0.1D & 20+0.8D\\ 0.7 & -10-0.9D\end{vmatrix}}=\frac{(-50+6.5D)i_s+(20+0.8D)v_s}{0.09D^2-8.56D-101.2}$$

$$0.09\frac{d^2i_L}{dt^2}-8.56\frac{di_L}{dt}-101.2i_L=6.5\frac{di_s}{dt}-5i_s+0.8\frac{dv_s}{dt}+20v_s$$

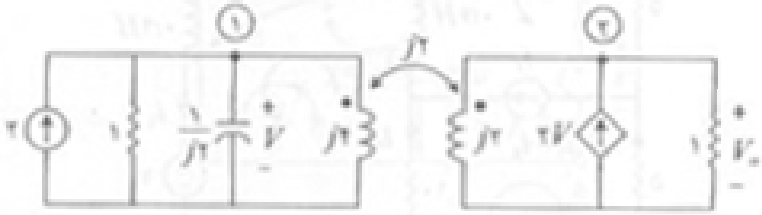
بنابراین با داشتن i_s و v_s با حل معادله دیفرانسیل می توان $i_L(t)$ را بدست آورد. برای محاسبه $i_1(t)$ با استفاده از دستگاه فوق به همین ترتیب عمل خواهیم کرد.

مسئله ۱۱

$v_o(t)$ را در حالت دایمی سینوسی تعیین کنید.

شکل مسئله ۱۱

حل : در حالت دایمی سینوسی و به ازای $\omega=2$ مدار بصورت زیر خواهد بود.



در تجزیه و تحلیل گره معمولاً از ماتریس Γ استفاده می کنیم.

$$L_1=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}\ \rightarrow\ \Gamma=L^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$$

با استفاده از ماتریس Γ به نوشتن معادلات KVL مبادرت می ورزیم.

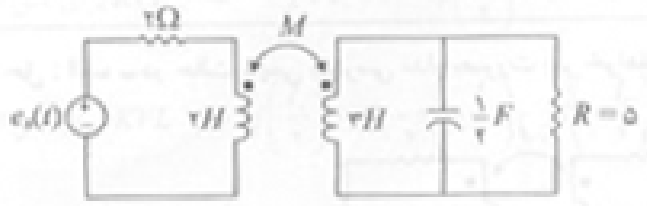
$$\begin{cases}KCL \text{ برای گره } 1 \ \rightarrow\ -2+\dfrac{V}{1}+\dfrac{V}{\frac{1}{j2}}+\left(\dfrac{1}{j2}V-\dfrac{1}{2j}V_o\right)=0 \ \rightarrow\ \left(1+j\dfrac{3}{2}\right)V+\dfrac{j}{2}V_o=2\\[2ex] KCL \text{ برای گره } 2 \ \rightarrow\ \dfrac{V_o}{1}-2V+\left(-\dfrac{1}{j2}V+\dfrac{1}{j}V_o\right)=0 \ \rightarrow\ \left(-2+\dfrac{j}{2}\right)V+(1-j)V_o=0\end{cases}$$

$$\rightarrow V_o = \frac{\begin{vmatrix} 1+j & 2 \\ -2+\frac{j}{2} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+j\frac{3}{2} & \frac{j}{2} \\ -2+\frac{j}{2} & 1-j \end{vmatrix}} = \frac{2-j}{2/75+j3} = \frac{2/12\angle -14^\circ}{2/07\angle 27/5}$$

$$\rightarrow V_o = 1/016\angle -61/5^\circ \quad \rightarrow \quad v_o(t) = 1/0165\cos\left(2t - 61/5^\circ\right)$$

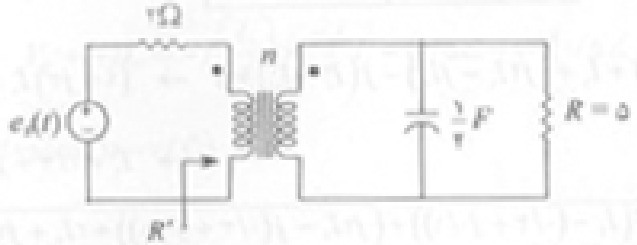
مسئله ۱۲

M را چنان تعیین کنید که توان متوسط انتقال داده شده به $R = 5\Omega$ در $\omega = 2$ حداکثر باشد.



شکل مسئله ۱۲

حل : از مقدار معادل ترانس تکفاز استفاده می کنیم که در آن $n = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{M}{\sqrt{6}}$ می باشد.



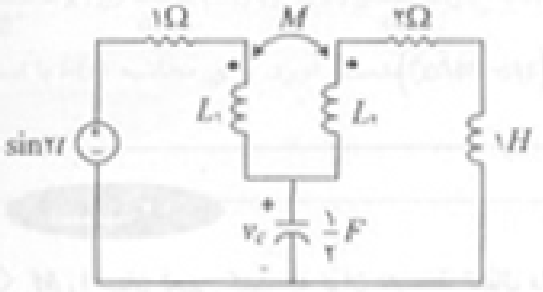
شرط انتقال توان ماکزیمم عبارتست از:

$$R_s = R' \quad \rightarrow \quad 2 = n^2 5 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{M}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{2}{5} \quad \rightarrow \quad M = 1/9$$

مسئله ۱۳

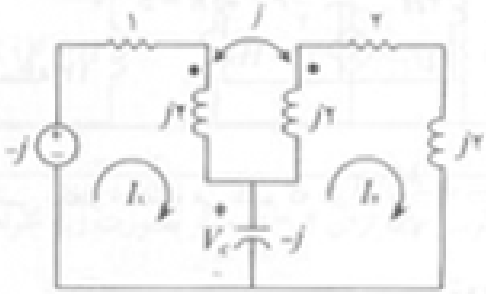
الف ـ v_c را در حالت دایمی سینوسی بدست آورید. ($M = \frac{1}{2}H$, $L_1 = 1H$, $L_2 = 2H$)

ب ـ اگر L_1 و L_2 یک ترانسفورماتور ایده آل با $\frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{2}$ را تشکیل دهند، v_c را حساب کنید.



شکل مسئله ۱۳

حل : الف ـ در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود.



KVL برای مش ۱ $\rightarrow -j + I_1 + (j4I_1 - jI_2) - j(I_1 - I_2) = 0 \rightarrow (1 + j3)I_1 = j$

$$\rightarrow I_1 = 0/3 + j0/1$$

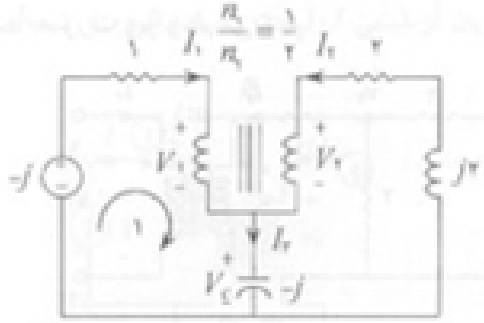
KVL برای مش ۲ $\rightarrow -j\left(I_1 - (0/3 + j0/1)\right) + \left(j2I_2 - j(0/3 + j0/1)\right) + 2I_2 + j2I_2 = 0$

$$\rightarrow I_2 = 0$$

$$\rightarrow V_c = -j(I_1 - I_2) = -j(0/3 + j0/1) = 0/1 - j0/3 = 0/316\angle -71/6^\circ$$

$$\rightarrow v_c(t) = 0/316\cos\left(2t - 71/6^\circ\right)$$

ب ـ در این صورت مدار به شکل زیر خواهد بود.



$$\frac{I_3}{I_1}=-\frac{n_1}{n_2}=-\frac{1}{2}\ \rightarrow I_3=-\frac{I_1}{2}\ \rightarrow\ I_2=I_1+I_3=I_1-\frac{I_1}{2}=\frac{I_1}{2}$$

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ V_2=2V_1$$

$$\begin{cases} KVL \text{ برای مش ۱} \ \rightarrow\ -j+I_1+V_1-j\left(\frac{I_1}{2}\right)=0\ \rightarrow\ (2-j)I_1+2V_1=2j \\ KVL \text{ برای مش ۲} \ \rightarrow\ j\left(\frac{I_1}{2}\right)-2V_1-2\left(-\frac{I_1}{2}\right)-j2\left(-\frac{I_1}{2}\right)=0\ \rightarrow\ (2+3j)I_1-4V_1=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow\ I_1=\frac{\begin{vmatrix} 2j & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2-j & 2 \\ 2+3j & -4 \end{vmatrix}}=\frac{-8j}{-16-2j}=\frac{8\angle 90^\circ}{16/12\angle -172/9}=0/5\ \angle 82/9^\circ$$

$$I_2=\frac{I_1}{2}\ \rightarrow\ V_C=-jI_2=-j\left(\frac{I_1}{2}\right)=\frac{-j}{2}I_1=(0/5\angle -90)(0/5\angle 82/9^\circ)=0/25\angle -7/1^\circ$$

$$\rightarrow\ v_C(t)=0/25\cos(2t-7/1^\circ)$$

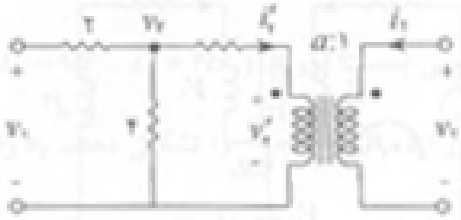
مسئله ۱۴

نسبت انتقال $\frac{V_2}{V_1}$ را تعیین کنید.

مقادیر R_1 و R_2 و n را چنان تعیین کنید که مدارهای (الف) و (ب) با هم معادل باشند.

(ب) شکل مسئله ۱۴ (الف)

حل : شکل (الف) را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



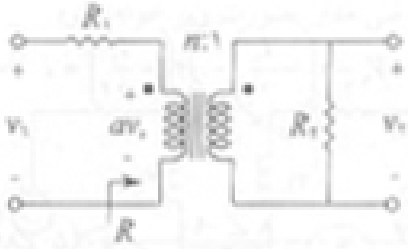
از آنجا که v_1 مدار باز است لذا $i_1 = 0$ بوده و خواهیم داشت.

$$\frac{v_2'}{v_1} = \frac{a}{1} \rightarrow v_2' = av_1 \ , \ \frac{i_2'}{i_1} = \frac{-1}{a} \rightarrow i_2' = -\frac{1}{a} i_1 \rightarrow v_2 = v_2' = av_1$$

و در نهایت بنا بر قاعده تقسیم ولتاژ خواهیم داشت.

$$v_2 = \frac{2}{2+2} v_1 \rightarrow av_1 = \frac{2}{2+2} v_1 \rightarrow \frac{v_1}{v_1} = \frac{2}{2a}$$

برای شکل (ب) خواهیم داشت.



با توجه به شکل فرق $R = a^2 R_1$ بوده و بنابر قاعده تقسیم ولتاژ خواهیم داشت.

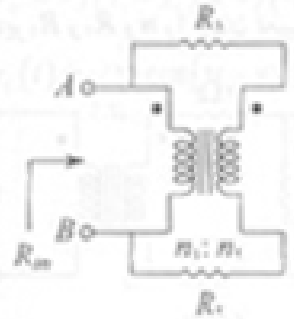
$$nv_1 = \frac{R}{R_1 + R} v_1 = \frac{n^2 R_1}{R_1 + n^2 R_1} v_1 \rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{nR_1}{R_1 + n^2 R_1}$$

شرط معادل بودن در مدار این است که نسبت $\frac{v_2}{v_1}$ هردو یکی باشد.

$$\frac{nR_1}{R_1 + n^2 R_1} = \frac{2}{2a} \begin{cases} nR_1 = 2 \rightarrow R_1 = \frac{2}{n} \\ R_1 + n^2 R_1 = 2a \end{cases} \rightarrow R_1 + 2n = 2a$$

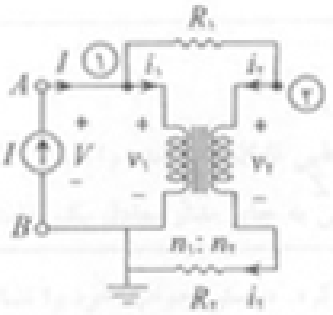
مسئله ۱۵

- $R_{in} = ?$
- اگر یکی از نقطه ها به سر دیگر برده شود، $R_{in} = ?$



شکل مسئله ۱۵

حل : بدین منظور منبع جریان آزمایشی I را به دو سر A و B وصل کرده و جریان آن را محاسبه می کنیم.



$$v_1 = V \quad \rightarrow \quad v_2 = \frac{n_2}{n_1} v_1 = \frac{n_2}{n_1} V$$

KCL برای گره ① $\rightarrow \quad I = i_1 + i_2 \;,\; i_2 = -\frac{n_1}{n_2} i_1 \quad \rightarrow \quad I = -\frac{n_1}{n_2} i_1 + i_1 \quad \rightarrow \quad i_1 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} I$

KVL برای حلقه سمت راست $\rightarrow \quad v_1 = R_1 i_1 + v_2 + R_2 i_2$

$$\rightarrow \quad V = R_1 \left(\frac{n_2}{n_2 - n_1} \right) I + \frac{n_2}{n_1} V + R_2 \left(\frac{n_2}{n_2 - n_1} \right) I$$

$$\rightarrow \quad V - \frac{n_2}{n_1} V = \left(\frac{n_2}{n_2 - n_1} \right) (R_1 + R_2) I \quad \rightarrow \quad V = \frac{n_2^2}{(n_2 - n_1)^2} (R_1 + R_2) I$$

در نهایت خواهیم داشت.

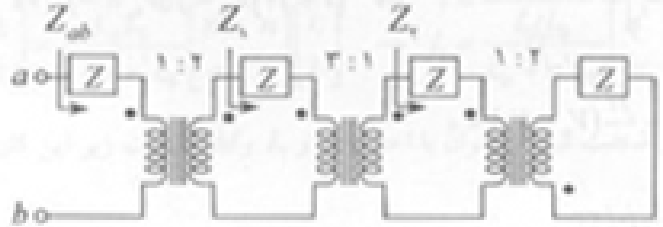
$$\rightarrow \quad R_{in} = \frac{V}{I} = \frac{n_2^2}{(n_2 - n_1)^2} (R_1 + R_2)$$

اگر یکی از نقطه ها به سر دیگر برده شود نسبت تبدیل $\frac{v_2}{v_1} = -\frac{n_2}{n_1}$ و $\frac{i_2}{i_1} = \frac{n_1}{n_2}$ خواهد شد که با جایگذاری متغیر فوق در پرسهٔ حل قبل خواهیم داشت.

$$R_{in} = \frac{n_1^2}{(n_1 + n_2)^2} (R_1 + R_2)$$

مسئله ۱۶

$Z_{ab} = ?$



شکل مسئله ۱۶

حل : بدین منظور امپدانس ها را مرحله به مرحله به طرف Z_{ab} انتقال می دهیم.

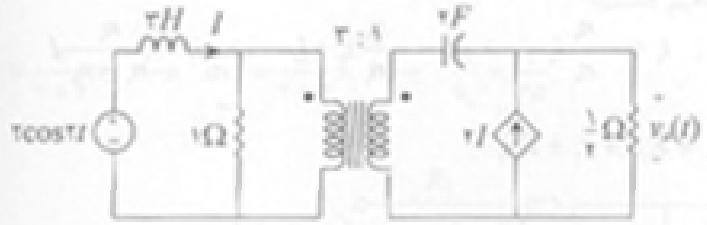
$$Z_1 = Z + \left(\frac{1}{2}\right)^2 Z = \frac{5}{4} Z$$

$$Z_2 = Z + (3)^2 (Z_1) = Z + 9\left(\frac{5}{4} Z\right) = \frac{49}{4} Z$$

$$Z_{ab} = Z + \left(\frac{1}{2}\right)^2 Z_2 = Z + \frac{1}{4}\left(\frac{5}{4} Z\right) = \frac{65}{16} Z$$

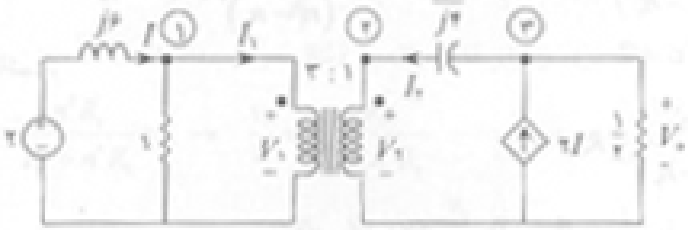
مسئله ۱۷

حالت دایمی سینوسی $v_x(t)$ را بدست آورید.



شکل مسئله ۱۷

حل : در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$V_1 = 3V_2 \quad , \quad I = \frac{2 - V_1}{j4} \rightarrow I = \frac{2 - 3V_2}{j4}$$

$$I_2 = \frac{V_o - V_2}{\frac{1}{j4}} = j4(V_o - V_2) \quad , \quad I_1 = -\frac{1}{3} I_2 \rightarrow I_1 = -\frac{j4}{3}(V_o - V_2)$$

KCL برای گره ② $\rightarrow \dfrac{V_o}{\frac{1}{2}} - 2\left(\dfrac{2 - 3V_2}{j4}\right) + \dfrac{(V_o - V_2)}{\frac{1}{j4}} = 0 \rightarrow (2 + j4)V_o - j5V_2 = -j0.66$

KCL برای گره ① $\rightarrow \dfrac{3V_2 - 2}{j4} + \dfrac{3V_2}{1} - \dfrac{j4}{3}(V_o - V_2) = 0$

$$\rightarrow \quad -j1.33V_o + (3 + j0.83)V_2 = -j0.33$$

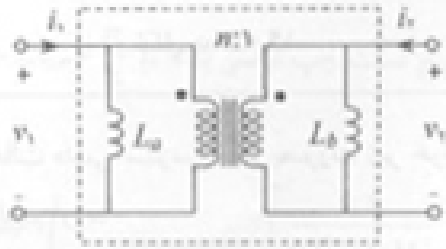
از حل دستگاه دو معادله دو مجهولی فوق داریم.

$$V_o = ۰/۱۸ \angle -۹۷/۶۴ \quad \rightarrow \quad v_o(t) = ۰/۱۸\cos\left(۲t - ۹۷/۶۴^\circ\right)$$

مسئله ۱۸

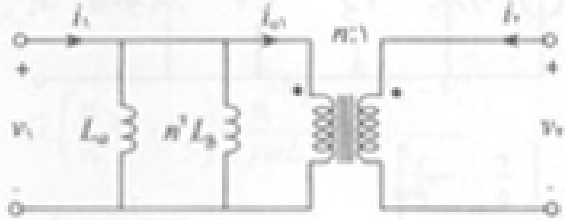
الف ـ ماتریس اندوکتانس دو قطبی نشان داده شده را حساب کنید.

ب ـ آیا می توان از این دو قطبی به جای مدار معادل یک جفت سلف تزویج شده با ماتریس اندوکتانس $\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}$ استفاده کرد. درستی جواب خود را نشان دهید.



شکل مسئله ۱۸

حل : الف ـ بدین منظور مطابق شکل زیر L_b را به طرف L_a انتقال می دهیم.



$$\frac{v_1}{v_2} = n \quad \rightarrow \quad v_2 = \frac{v_1}{n} \quad , \quad \frac{i_{a1}}{i_1} = -\frac{1}{n} \quad \rightarrow \quad i_{a1} = -\frac{i_1}{n}$$

$$\phi_1 = \left(L_a \parallel n^2 L_b\right)\left(i_1 - i_{a1}\right) = \frac{n^2 L_a L_b}{L_a + n^2 L_b}\left(i_1 + \frac{i_1}{n}\right) = \frac{L_a L_b}{L_a + n^2 L_b}\left(n^2 i_1 + n i_1\right)$$

$$v_2 = \frac{v_1}{n} \quad \rightarrow \quad \phi_2 = \frac{\phi_1}{n} = \frac{L_a L_b}{L_a + n^2 L_b}\left(n i_1 + i_1\right)$$

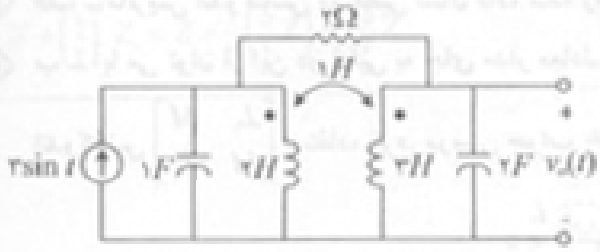
$$\rightarrow \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \frac{L_a L_b}{L_a + n^2 L_b}\begin{bmatrix} n^2 & n \\ n & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad L = \frac{L_a L_b}{L_a + n^2 L_b}\begin{bmatrix} n^2 & n \\ n & 1 \end{bmatrix}$$

ب ـ بله- با توجه به L بدست آمده در قسمت قبل می توان با اختیار L_1 و L_2 و M بصورت زیر این کار را انجام داد.

$$L_1 = \frac{n^2 L_a L_b}{L_a + n^2 L_a L_b} \quad , \quad L_2 = \frac{L_a L_b}{L_a + n^2 L_a L_b} \quad , \quad M = \frac{n L_a L_b}{L_a + n^2 L_a L_b}$$

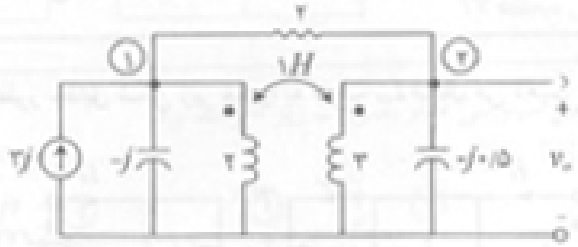
مسئله ۱۹

$v_o(t)$ را در حالت دایمی بدست آورید.



شکل مسئله ۱۹

حل: در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود. از تحلیل گره استفاده می کنیم ابتدا ماتریس Γ را بدست خواهیم آورد.



$$L = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \Gamma = L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

KCL برای گره ۱ $\rightarrow -3j + \frac{V_1}{-j} + \frac{V_1 - V_2}{2} + \frac{2}{5j}V_1 - \frac{1}{5j}V_2 = 0 \rightarrow (2 - j/5)V_1 + (2 + j/5) = 30$

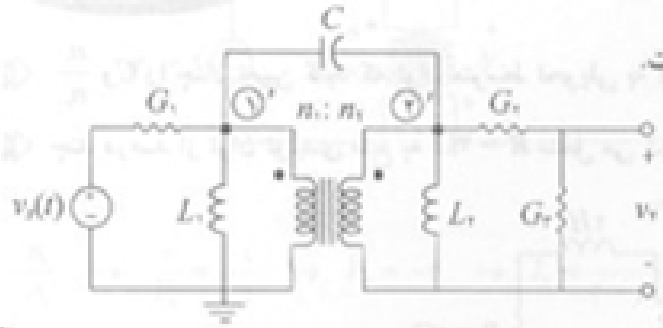
KCL برای گره ۲ $\rightarrow \frac{V_2}{-j0/5} + \frac{V_2 - V_1}{2} + \left(-\frac{1}{5j}V_1 + \frac{2}{j5}V_2\right) = 0 \rightarrow (-2 + j/5)V_1 + (16 - j/5)V_2 = 0$

$$\rightarrow V_o = V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 30 & 2 - j/5 \\ 0 & 2 + j/5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 - j/5 & 2 + j/5 \\ 2 + j/5 & 16 - j/5 \end{vmatrix}} = \frac{60 + j1/50}{60 - j120} = 1/2042\angle 131/63$$

$$\rightarrow v_o(t) = 1/2042\cos(2t + 131/63)$$

مسئله ۲۰

نسبت انتقال $\frac{V_2}{V_s}$ در فرکانس ω چیست.



شکل مسئله ۲۰

حل : با فرض اینکه L ضریب خود القایی سیم پیچ سمت چپ ترانس باشد $\frac{n_2}{n_1}L$ ضریب خودالقایی سیم پیچ سمت راست بوده و خواهیم داشت.

$$L=\begin{bmatrix} L & M \\ M & \frac{n_2}{n_1}L \end{bmatrix} \rightarrow \Gamma = L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{n_1 L}{n_1 L - n_2 M^2} & \frac{-n_2 M}{n_1 L - n_2 M^2} \\ \frac{-n_1 M}{n_1 L - n_2 M^2} & \frac{n_2 L}{n_1 L - n_2 M^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{V_1''}{V_1'} = \frac{n_1}{n_2} \rightarrow V_1'' = \frac{n_1}{n_2} V_1'$$

$$KCL \text{ برای گره } ① \rightarrow G_1\left(\frac{n_1}{n_2}V_1' - V_s\right) + \frac{\frac{n_1}{n_2}V_1'}{j\omega L_1} + \frac{\frac{n_1}{n_2}V_1' - V_1'}{\frac{1}{j\omega C}}$$

$$+\left(\frac{n_1 L}{(n_1 L - n_2 M^2)j}\frac{n_1}{n_2}V_1' - \frac{n_1 M}{(n_1 L - n_2 M^2)j}V_1'\right) = 0$$

$$\frac{n_1}{n_2}\left(G_1 + \frac{1}{j\omega L_1} + j\omega C\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) + \frac{n_1 L - n_2 M}{(n_1 L - n_2 M^2)j}\right)V_1' = G_1 V_s$$

از طرفی بنابر قاعده تقسیم ولتاژ داریم

$$V_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2}V_1' \rightarrow V_1' = \left(1 + \frac{G_2}{G_1}\right)V_1$$

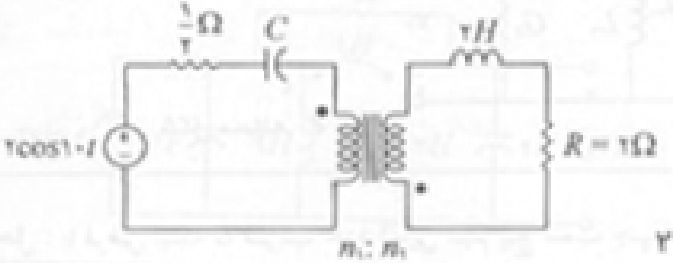
بنابراین خواهیم داشت.

$$\frac{V_2}{V_s} = \frac{G_1}{\frac{n_1}{n_2}\left(1 + \frac{G_2}{G_1}\right)\left(G_1 + \frac{1}{j\omega L_1} + j\omega C\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) + \frac{n_1(L - M)}{(n_1 L - n_2 M^2)j}\right)}$$

مسئله ۲۱

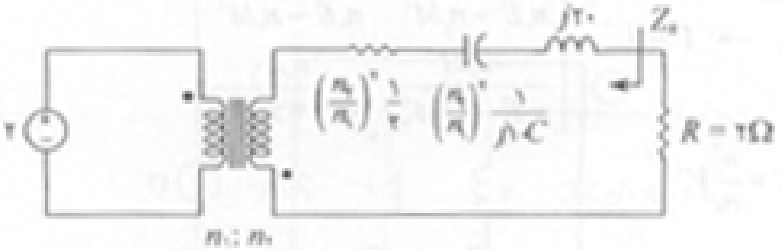
$\frac{n_1}{n_2}$ و C را چنان تعیین کنید که توان متوسط تحویلی به $R = 2\Omega$ حداکثر گردد.

چند درصد از توان تولیدی منبع به $R = 2\Omega$ منتقل می شود.



شکل مسئله ۲۱

حل : با انتقال امپدانس طرف اول به طرف دوم و در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود.



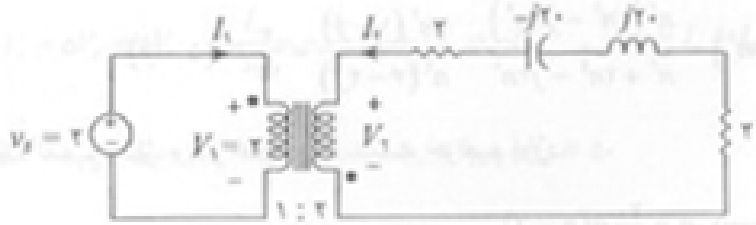
$$Z_e = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{1}{j10C} + j20 = \frac{1}{2}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 + j\left(20 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{1}{10C}\right)$$

شرط انتقال توان ماکزیمم عبارت است از :

$$R = \bar{Z}_e \quad \rightarrow \quad 2 = \frac{1}{2}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 + j\left(20 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{1}{10C}\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = 2 \quad \rightarrow \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{2} \\ 20 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{1}{10C} = 0 \quad \rightarrow \quad 20 - \frac{2}{10C} = 0 \quad \rightarrow \quad C = \frac{1}{50}F \end{cases}$$

در ادامه به محاسبه درصد توان منتقل خواهیم پرداخت بدین منظور شکل مسئله را با توجه به مقادیر بدست آمده در حالت دایمی سینوسی رسم می کنیم.



با توجه به سر نقطه دار سیم پیچی ها داریم.

$$\frac{V_1}{V_2} = -\frac{n_1}{n_2} \rightarrow \frac{۲}{V_2} = -\frac{۱}{۲} \rightarrow V_2 = -۴ \rightarrow I_2 = \frac{۴}{۲ - j۲۰ + j۲۰ + ۲} = ۱A$$

$$\rightarrow \text{توان متوسط انتقالی} = \frac{۱}{۲}R|I_2|^2 = \frac{۱}{۲}(۲)(۱)^2 = ۱W \ , \ \frac{I_1}{I_2} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \frac{I_1}{۱} = \frac{۲}{۱} \rightarrow I_1 = ۲$$

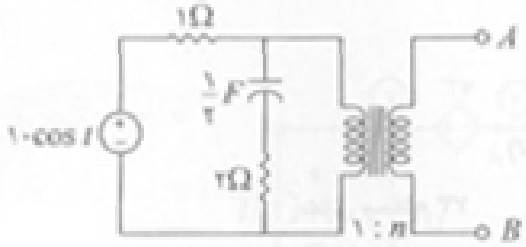
$$\rightarrow \text{توان متوسط تولیدی} = V_g I_1 = (۲)(۱) = ۲W$$

$$\rightarrow \text{درصد توان انتقالی} = \frac{\text{توان متوسط انتقالی}}{\text{توان متوسط تولیدی}} \times ۱۰۰ = \frac{۱}{۲} \times ۱۰۰ = ۵۰\%$$

مسئله ۲۲

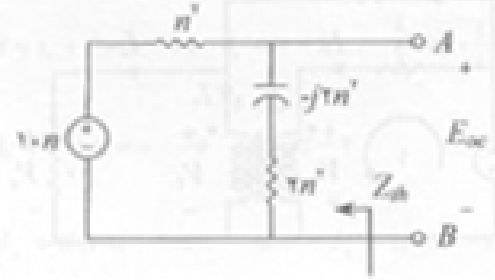
الف ـ معادل تونن دو سر A و B چیست.

ب ـ $R_L = ۸\sqrt{۲}$ را به دو سر A و B وصل می کنیم n را چنان تعیین کنید که حداکثر توان متوسط به R_L منتقل شود.



شکل مسئله ۲۲

حل: الف ـ با انتقال امپدانسهای طرف اول به طرف دوم ودرحالت دایمی سینوسی و به ازای $\omega = ۱$ مدار بصورت زیر خواهد شد.



بنابراین داریم.

$$Z_{th} = n^2 \parallel \left(2n^2 - j2n^2\right) = \frac{n^2\left(2n^2 - j2n^2\right)}{n^2 + 2n^2 - j2n^2} = \frac{2n^2(1-j)}{n^2(3-2j)} = \frac{2}{13}n^2(5-j)$$

و با استفاده از قاعده تقسیم ولتاژ، ولتاژ مدار باز را بدست خواهیم آورد.

$$E_{oc} = \frac{2n^2 - j2n^2}{n^2 + 2n^2 - j2n^2}10n = \frac{20}{13}n(5-j)$$

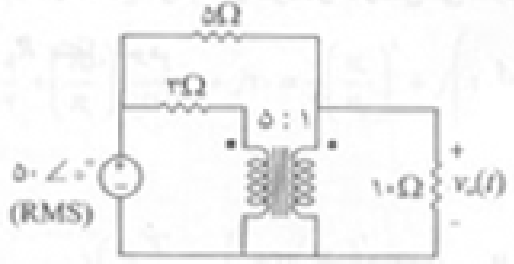
ب ـ با استفاده از شرط $\bar{Z}_s = R_L$ نمی توان n را بدست آورد زیرا به جواب $n = 0$ می رسیم. بنابراین به محاسبه توان متوسط انتقالی بر حسب n خواهیم پرداخت و برای محاسبه n مورد نظر از توان متوسط مشتق گرفته و برابر صفر قرار می دهیم.

$$I = \frac{E_{oc}}{Z_s + R_L} = \frac{\frac{20}{13}n(5-j)}{\frac{2}{13}n^2(5-j) + 8\sqrt{2}} = \frac{7/69n - j1/53n}{0/76n^2 + 11/3 - j0/15n^2}$$

$$P_{av} = \frac{1}{2}R_L|I|^2 = \frac{8\sqrt{2}}{2}\frac{(7/69n)^2 + (1/53n)^2}{(0/76n^2 + 11/3)^2 + (0/15n^2)^2} \quad , \quad \frac{dp_{av}}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad n = 3/8$$

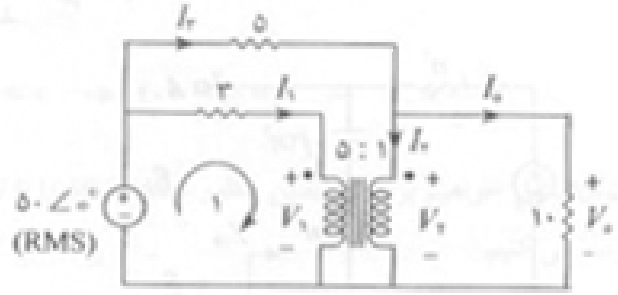
مسئله ۲۳

با استفاده از روش تحلیل مش، $v_o(t)$ را در حالت دایمی سینوسی تعیین کنید.



شکل مسئله ۲۳

حل : شکل مسئله را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



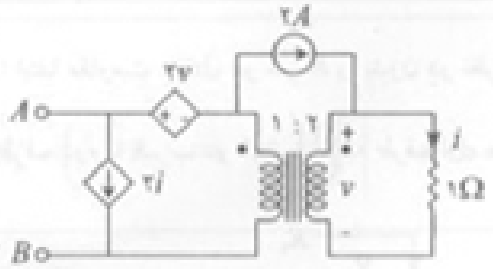
$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{1} \rightarrow V_1=5V_2=5V_o \ , \ \frac{I_1}{I_2}=-\frac{1}{5} \rightarrow I_1=-5I_2 \ , \ I_2=I_1+I_o=-5I_1+\frac{V_o}{10}$$

$$\begin{cases} KVL \text{ برای مش ۱} \rightarrow -50+3I_1+5V_o=0 \rightarrow 3I_1+5V_o=50 \\ KVL \text{ برای حلقه بیرونی} \rightarrow -50+5\left(-5I_1+\frac{V_o}{10}\right)+V_o=0 \rightarrow -50I_1+3V_o=100 \end{cases}$$

$$V_o=\frac{2800}{260}=10/8\angle 0 \rightarrow v_o(t)=10/8\cos 2t \ (RMS)$$

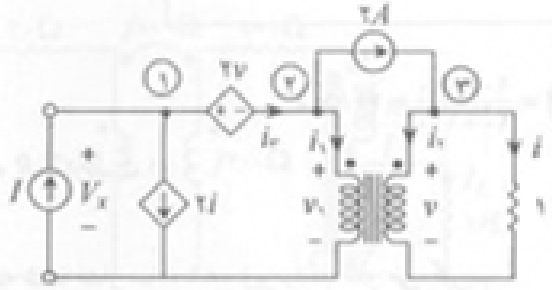
مسئله ۲۴

معادل تونن دو سر A و B را تعیین کنید.



شکل مسئله ۲۴

حل : بدین منظور منبع آزمایشی I_x را به دو سر A و B وصل کرده و ولتاژ دو سر آن را بدست می آوریم.



$$v=\frac{i}{1}=i \ , \ \frac{v_1}{v}=\frac{1}{2} \rightarrow v_1=\frac{1}{2}v=\frac{i}{2} \rightarrow V_x=2v+v_1=2i+\frac{i}{2}=\frac{5}{2}i \rightarrow i=\frac{2}{5}V_x$$

$$KCL \text{ برای گره ۳} \rightarrow -2+i_1+i=0 \rightarrow i_1=2-i \ , \ \frac{i_1}{i_2}=-\frac{2}{1} \rightarrow i_2=-2i_1=2i-4$$

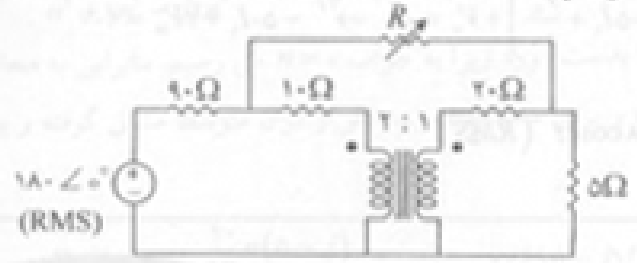
$$KCL \text{ برای گره ۲} \rightarrow -i_2+i_1+2=0 \rightarrow i_2=2i-2$$

$$KCL \text{ برای گره ۱} \rightarrow -I_x+2i+2i-2=0 \rightarrow -I_x+4i-2=0 \rightarrow -I_x+\frac{8}{5}V_x-2=0$$

$$\rightarrow V_x=\frac{5}{8}I_x+\frac{5}{4} \rightarrow R_{th}=\frac{5}{8}\Omega \ , \ e_{oc}=\frac{5}{4}V$$

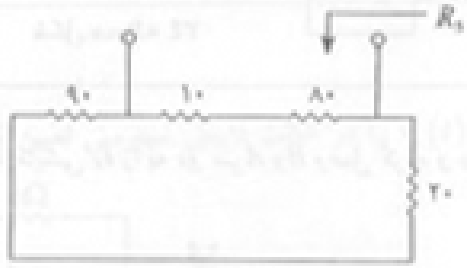
مسئله ۲۵

- مقدار R برای انتقال حداکثر توان متوسط به آن چقدر است.
- درصد توان انتقالی منبع به R در حالت فوق چیست.



شکل مسئله ۲۵

حل : ابتدا مقاومت معادل دو سر R را بدون در نظر گرفتن خود R بدست می آوریم. بدین منظور تمامی مقاومتهای طرف دوم با ضرب در $\left(\frac{۲}{۱}\right)^۲ = ۴$ به طرف اول منتقل می کنیم.

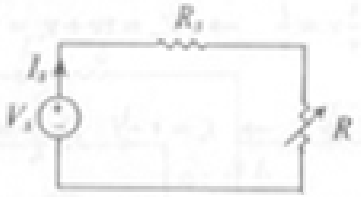


$$\rightarrow \quad R_s = (۱۰+۸۰) \parallel (۹۰+۲۰) = \frac{۹۰ \times ۱۱۰}{۹۰+۱۱۰} = ۴۹/۵\Omega$$

شرط انتقال توان حداکثر به R عبارتست از:

$$R = R_s \quad \rightarrow \quad R = ۴۹/۵\Omega$$

برای محاسبه درصد خواسته شده مدار ساده شده زیر را در نظر می گیریم.

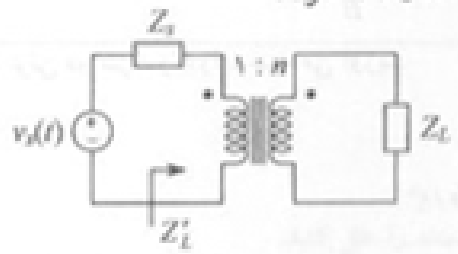


$$R = R_s \quad \rightarrow \quad I_s = \frac{V_s}{R_s + R} = \frac{V_s}{۲R} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} P_s = \frac{۱}{۲} V_s I_s = \frac{V_s^۲}{۴R} \\ P_R = \frac{۱}{۲} R (I_s)^۲ = \frac{(V_s)^۲}{۸R} \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{درصد توان انتقالی} = \frac{P_L}{R_s}\times 100 = \frac{1}{2}\times 100 = 50\%$$

مسئله ۲۶

n را چنان تعیین کنید که حداکثر توان به بار Z_L انتقال داده شود .



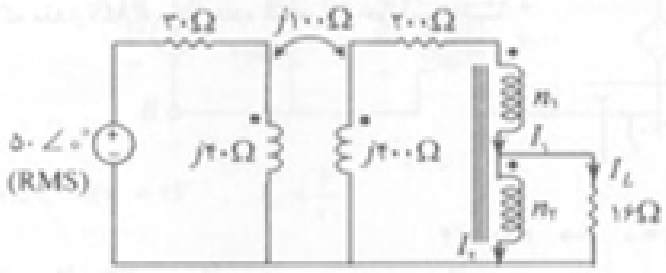
شکل مسئله ۲۶

حل : شرط انتقال توان ماکزیمم عبارت است از:

$$\bar{Z}_s = Z'_L = \left(\frac{1}{n}\right)^2 Z_L \quad \rightarrow \quad n^2 = \left|\frac{Z_L}{\bar{Z}_s}\right| \quad \rightarrow \quad n = \sqrt{\left|\frac{Z_L}{\bar{Z}_s}\right|}$$

مسئله ۲۷

n_2 را چنان تعیین کنید که حداکثر توان متوسط به مقاومت 16Ω انتقال داده شود. توان ماکزیمم ودرصد آن از توان تولیدی را تعیین کنید. ($n_1 = 500$)

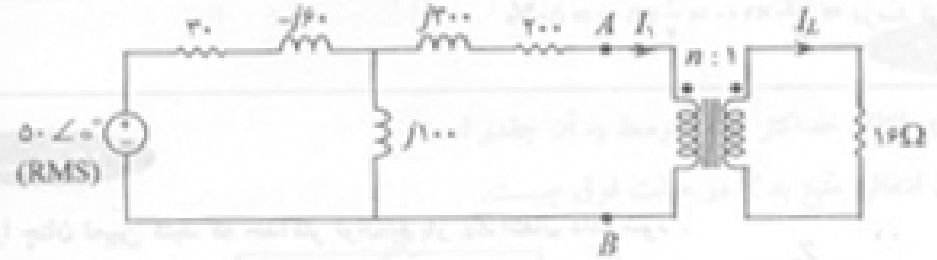


شکل مسئله ۲۷

حل : با توجه به شکل داریم .

$$\begin{cases} \dfrac{I_1}{I_2} = -\dfrac{n_2}{n_1} \quad \rightarrow \quad I_2 = -\dfrac{n_1}{n_2} I_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \rightarrow \quad I_L = I_1 + \dfrac{n_1}{n_2} I_1 = \dfrac{n_1 + n_2}{n_2} I_1 \\ I_L = I_1 - I_2 \end{cases}$$

بنابراین با فرض $n = \dfrac{n_1 + n_2}{n_2}$ و با بکارگیری مدار معادل T شکل مسئله را می توان بصورت زیر رسم کرد.

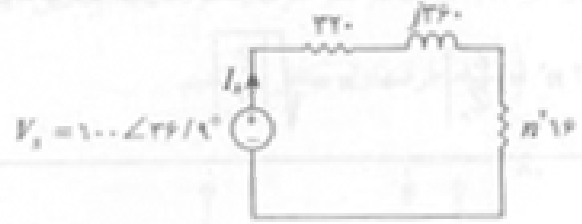


حال معادل تونن دو سر A و B را بدست می آوریم.

$$Z_{th} = (۳۰ - j۶۰ \parallel j۱۰۰) + ۲۰۰ + j۳۰۰ = ۳۲۰ + j۳۶۰$$

$$E_{oc} = \frac{j۱۰۰}{۳۰ - j۶۰ + j۱۰۰} ۵۰\angle ۰ = ۸۰ + j۶۰ = ۱۰۰\angle ۳۶/۹^\circ$$

بنابراین مدار را می توان بصورت زیر ساده کرد.



$$I_o = \frac{۱۰۰\angle ۳۶/۹^\circ}{۱۶n^2 + ۳۲۰ + j۳۶۰} \rightarrow |I_o|^2 = \frac{۱۰۰۰۰}{(۱۶n^2 + ۳۲۰)^2 + (۳۶۰)^2}$$

از آنجا که مقدار RMS ولتاژ داده شده، لذا خواهیم داشت:

$$P_{av} = R|I_o|^2 = \frac{۱۶۰۰۰۰n^2}{\left[(۱۶n^2 + ۳۲۰)^2 + (۳۶۰)^2\right]}$$

$$\frac{dP_{av}}{dn} = ۰ \rightarrow -۲۵۶n^2 + ۲۳۲۰۹۰ = ۰ \rightarrow n = ۵/۲$$

n باید صحیح باشد لذا $n = ۵$ انتخاب می شود و خواهیم داشت.

$$n = ۵ \rightarrow \frac{R_1 + R_2}{R_2} = ۵ \rightarrow \frac{۵۰۰ + R_2}{R_2} = ۵ \rightarrow R_2 = ۱۲۵$$

در ادامه با توجه به $n = ۵$ به محاسبه درصد توان ماکزیمم خواهیم پرداخت.

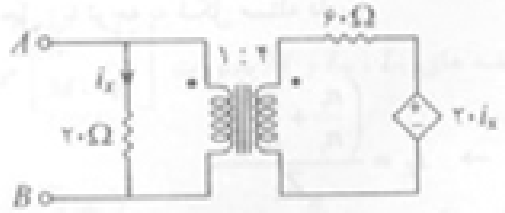
$$\text{توان ماکزیمم انتقالی} = P_{av,max} = R|I_o|^2 = \frac{۱۶۰۰۰۰(۵)^2}{\left(۱۶(۵)^2 + ۳۲۰\right)^2 + (۳۶۰)^2} = ۹/۱۷\ W$$

$$\text{توان تولیدی} = P_{av} = |V_s||I_s| = (۱۰۰)\left(\frac{۱۰۰۰۰}{\left(۱۶(۵)^۲ + ۳۲۰\right)^۲ + (۳۶۰)^۲}\right) = ۵۷/۳۱\ W$$

$$\text{درصد توان ماکزیمم انتقالی} = \frac{۹/۱۷}{۵۷/۳۱} \times ۱۰۰ = ۱۶\%$$

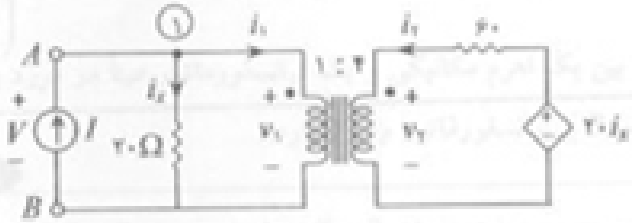
مسئله ۲۸

- معادل تونن دو سر A و B را بدست آورید.
- اگر محل یکی از نقاط تغییر کند بار دیگر مسئله را حل کنید.



شکل مسئله ۲۸

حل : بدین منظور منبع جریان آزمایشی I را به دو سر A و B وصل کرده و ولتاژ دو سر آن را بدست می آوریم.



$$v_1 = V \quad \rightarrow \quad v_2 = ۲v_1 = ۲V \quad , \quad i_x = \frac{V}{۲۰}$$

$$i_2 = \frac{۲۰i_x - v_2}{۶۰} = \frac{V - ۲V}{۶۰} = -\frac{V}{۲۰} \quad , \quad i_1 = -۲i_2 = \frac{V}{۵}$$

$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow -I + \frac{V}{۲۰} + \frac{V}{۵} = ۰ \rightarrow V = ۲I \rightarrow R_{th} = ۲ \ , \ e_{oc} = ۰$$

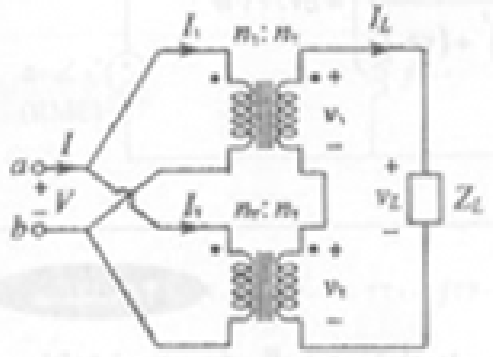
با تغییر سر نقطه دار یکی از سیم پیچ ها داریم.

$$v_2 = -۲v_1 = -۲V \quad \rightarrow \quad i_2 = \frac{V + ۲V}{۶۰} = \frac{V}{۱۲} \quad , \quad i_1 = ۲i_2 = \frac{V}{۳}$$

$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow -I + \frac{V}{۲۰} + \frac{V}{۳} = ۰ \rightarrow V = \frac{۶۰}{۲۳}I \rightarrow R_{th} = \frac{۶۰}{۲۳} \ , \ e_{oc} = ۰$$

مسئله ۲۹

امپدانس دو سر a و b را حساب کنید.



شکل مسئله ۲۹

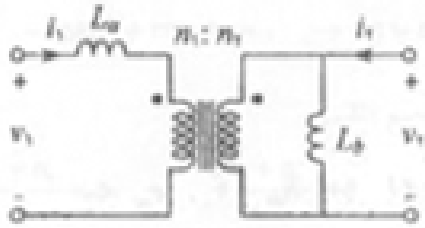
حل : با توجه به شکل مسئله داریم.

$$v_L = v_1 + v_1 = \left(\frac{n_1}{n_1}\right)V + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)V = \left(\frac{n_1}{n_1} + \frac{n_1}{n_2}\right)V \quad \rightarrow \quad I_L = \frac{\left(\frac{n_1}{n_1} + \frac{n_1}{n_2}\right)V}{Z_L}$$

$$I = I_1 + I_1 = \frac{n_1}{n_1} I_L + \frac{n_1}{n_2} I_L = \left(\frac{n_1}{n_1} + \frac{n_1}{n_2}\right) V \frac{\left(\frac{n_1}{n_1} + \frac{n_1}{n_2}\right)V}{Z_L} \quad \rightarrow \quad Z_{ab} = \frac{V}{I} = \frac{Z_L}{\left(\frac{n_1}{n_1} + \frac{n_1}{n_2}\right)^2}$$

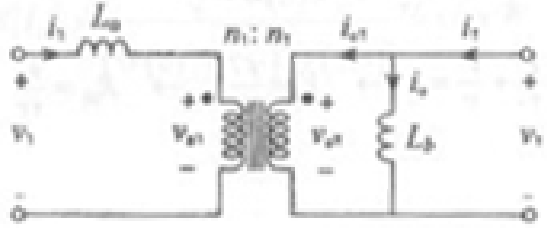
مسئله ۳۰

L_a و L_b و $\frac{n_1}{n_2}$ را چنان تعیین کنید که دو قطبی حاصل، معادل یک جفت سلف تزویج شده با L_1، L_2 و M گردد.



شکل مسئله ۳۰

حل : شکل مسئله را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



$$v_1 = v_{12} \rightarrow \phi_1 = \phi_{12} \;,\; v_{21} = \frac{n_2}{n_1} v_{12} \rightarrow \phi_{21} = \frac{n_2}{n_1}\phi_1$$

$$i_{12} = i_1 - i_b = i_1 - \frac{\phi_1}{L_b} \rightarrow i_1 = -\frac{n_2}{n_1} i_{12} = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{\phi_1}{L_b} - i_1\right) \rightarrow \phi_1 = \left(\frac{n_2}{n_1} L_b\right) i_1 + L_b i_1$$

$$\phi_1 = i_1 L_a + v_{21} = i_1 L_a + \frac{n_2}{n_1}\phi_1 = i_1 L_a + \frac{n_2}{n_1}\left[\left(\frac{n_2}{n_1} L_b\right) i_1 + L_b i_1\right]$$

$$\phi_1 = \left(L_a + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 L_b\right) i_1 + \frac{n_2}{n_1} L_b i_1 \rightarrow \begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_a + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 L_b & \frac{n_2}{n_1} L_b \\ \frac{n_2}{n_1} L_b & L_b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس اندوکتانس یک جفت سلف تزویج شده با مشخصه های L_1 ، L_2 و M بصورت $\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}$ می باشد بنابراین داریم

$$L_1 = L_a + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 L_b \;,\; M = \frac{n_2}{n_1} L_b \;,\; L_2 = L_b$$

مسئله ۳۱

نشان دهید که تشابه بین یک اهرم مکانیکی و یک ترانسفورماتور عیناً در مورد یک جفت چرخ دنده با شعاعهای R_1 و R_2 و ترانسفورماتور وجود دارد.

حل : برای یک جفت چرخ دنده با شعاعهای R_1 و R_2 و زاویه چرخش θ و گشتاور τ داریم.

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{n_1}{n_2} \;,\; \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

که متشابه $\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}$ و $\frac{i_1}{i_2} = -\frac{n_2}{n_1}$ در ترانسفورماتور است.

مسئله ۳۲

$Z_{AB}(j\omega) = ?$

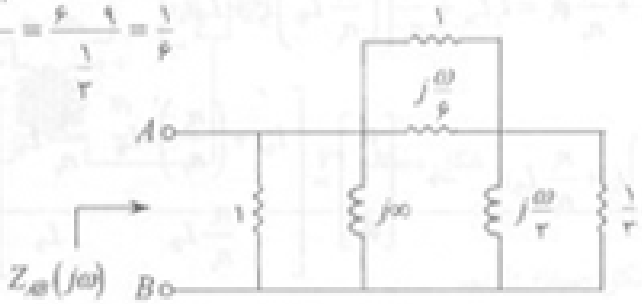
اگر جای نقطه ها عوض شود Z_{AB} را حساب کنید.

شکل مسئله ۳۲

حل : بدین منظور از مدار معادل π سلفهای تزویج شده استفاده می کنیم.

$$L_a = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_2 - M} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \infty \quad , \quad L_b = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 - M} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{9}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$L_c = -\frac{1}{6} \; L_c = \frac{L_1L_2 - M^2}{M} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$$

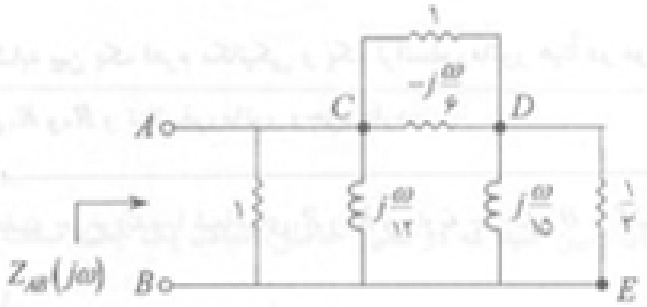


$$Z_{AB}(j\omega) = \left[\left(\frac{1}{3}\right) \| \left(j\frac{\omega}{3}\right) + (1) \| \left(j\frac{\omega}{6}\right)\right] \| (1) = \frac{-2\omega^2 + j7\omega}{-8\omega^2 + 36 + j29\omega}$$

با عوض کردن جای نقطه ها $M = -M = -\frac{1}{3}$ شده و خواهیم داشت.

$$L_a = \frac{1}{12} \quad , \quad L_b = \frac{1}{15} \quad , \quad L_c = -\frac{1}{6}$$

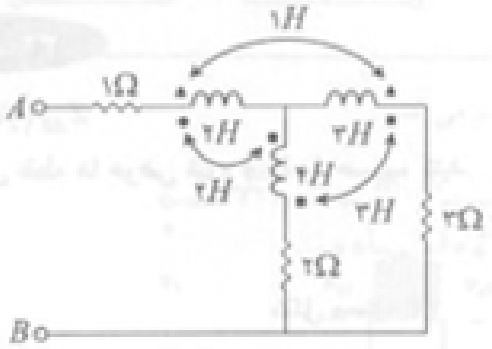
بنابراین در این حالت مدار بصورت زیر خواهد شد.



$$Z_{AB} = \left[\left(\frac{1}{3} \| \frac{j\omega}{15}\right) + \left(-\frac{j\omega}{6}\right) \| (1)\right] \| \left(\frac{j\omega}{12} \| (1)\right) = \frac{9\omega^2 + j4\omega^3}{\omega^2 - 18 + j\left(3\omega^3 + 33\omega\right)}$$

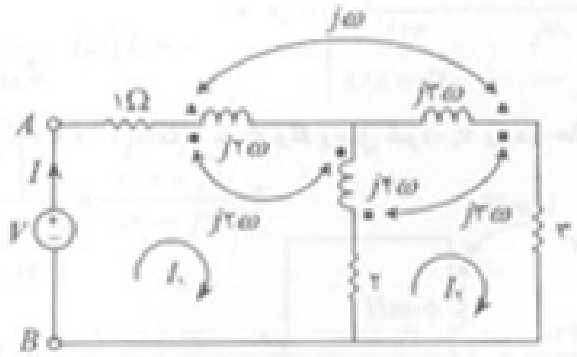
مسئله ۳۳

$Z_{AB}(j\omega) = ?$



شکل مسئله ۳۳

حل : بدین منظور منبع ولتاژ آزمایشی V را به دو سر A و B وصل کرده و جریان گذرنده از آن را بدست می آوریم.



$$\text{KVL برای مش ۱} \rightarrow -V + I_1 + \left(j2\omega I_1 + j2\omega(I_1 - I_2) - j\omega I_2\right)$$

$$+\left(j2\omega I_1 + j4\omega(I_1 - I_2) + j3\omega I_2\right) + 2(I_1 - I_2) = 0$$

$$\rightarrow (3 + j12\omega)I_1 + (-2 + j2\omega)I_2 = V$$

$$\text{KVL برای مش ۲} \rightarrow 2(I_2 - I_1) + \left(-j2\omega I_1 + j4\omega(I_2 - I_1) - j3\omega I_2\right)$$

$$+\left(-j\omega I_1 + j3\omega(I_2 - I_1) + j3\omega I_2\right) + 3I_2 = 0$$

$$\rightarrow (-2 - j3\omega)I_1 + (5 + j\omega)I_2 = 0$$

$$\rightarrow I = I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V & -2 + j4\omega \\ 0 & 5 + j\omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 + j12\omega & -2 + j4\omega \\ -2 - j3\omega & 5 + j\omega \end{vmatrix}} = \frac{(5 + j\omega)V}{(3 + j12\omega)(5 + j\omega) - (-2 - j3\omega)(-2 + j2\omega)}$$

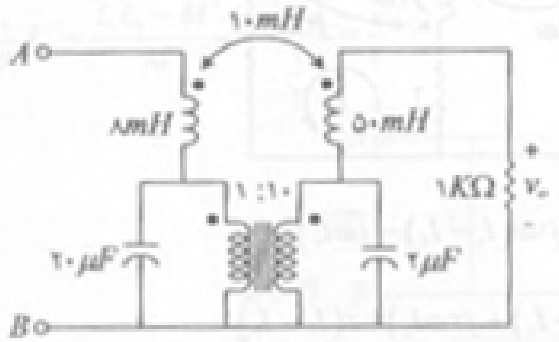
$$= \frac{5 + j\omega}{11 - 12\omega^2 + j65\omega}V$$

$$\rightarrow Z_{AB}(j\omega) = \frac{V}{I} = \frac{11 - 12\omega^2 + j65\omega}{5 + j\omega}$$

مسئله ۳۴

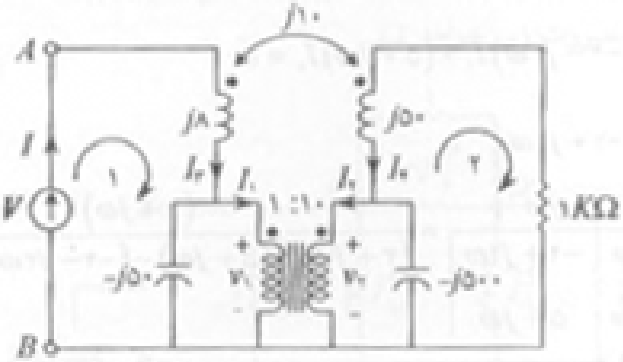
الف ـ $Z_{AB}(j1000) = ?$

ب ـ اگر منبع ولتاژ $10\cos(10^3 t + 30^\circ)$ به A و B وصل شود، v_o را در حالت دایمی سینوسی تعیین کنید.



شکل مسئله ۳۴

حل : الف ـ بدین منظور منبع ولتاژ آزمایشی V را به دو سر A و B متصل کرده و جریان گذرنده از آن را بدست می آوریم. در حالت دایمی سینوسی و $\omega = 1000$ مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$I_2 = \frac{v_1}{-j50} + I_1 = \frac{v_1}{-j50} - 10 I_3 \quad , \quad I_4 = \frac{v_2}{-j500} + I_3 = \frac{v_2}{-j50} + I_3$$

KVL برای مش ۱ $\rightarrow$ $-V + j8\left(\frac{v_1}{-j50} - 10 I_3\right) + j10\left(\frac{v_1}{-j50} + I_3\right) + v_1 = 0$

KVL برای مش ۲ $\rightarrow$ $-10 v_1 - j50\left(\frac{v_1}{-j50} + I_3\right) - j10\left(\frac{v_1}{-j50} - 10 I_3\right) - 1000\left(\frac{v_2}{-j50} + I_4\right) = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} 0/36V_1 + j70I_2 = -V \\ (8/8 + j20)V_1 + (1000 - j50)I_2 = 0 \end{cases} \rightarrow V_1 = \frac{\begin{vmatrix} -V & j70 \\ 0 & 1000 - j50 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0/36 & j70 \\ 8/8 + j20 & 1000 - j50 \end{vmatrix}} = -\frac{1000 - j50}{1760 - j734}V$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0/36 & -V \\ 8/8 + j20 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0/36 & j70 \\ 8/8 + j20 & 1000 - j50 \end{vmatrix}} = \frac{8/8 + j20}{1760 - j734}V$$

$$\rightarrow I = I_2 = \frac{V_1}{-j50} - 10I_2 = \frac{1000 - j50}{j50(1760 - j734)}V - \frac{88 + j200}{1760 - j734}V = \frac{-3400 - j1050}{j50(1760 - j734)}V$$

$$\rightarrow Z_{AB} = \frac{V}{I} = \frac{j50(1760 - j734)}{-3400 - j1050} = \frac{(50\angle 90)(1106\angle -22/6)}{(1060\angle -108/7)} = 8/98\angle 176/1$$

ب ـ در این حالت با جایگذاری $V = 10\angle 30^\circ$ خواهیم داشت.

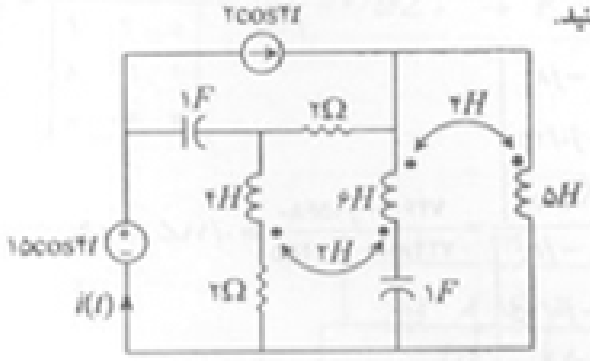
$$V_o = 1000I_o = 1000\left(\frac{V_1}{-j50} + I_2\right) = j20V_1 + 1000I_2$$

$$\rightarrow V_o = j20\left(-\frac{1000 - j50}{1760 - j734}10\angle 30^\circ\right) + 1000\frac{8/8 + j20}{1760 - j734}10\angle 30^\circ = 48\angle 78$$

$$\rightarrow v_o(t) = 48\cos(10^3 t + 78^\circ)$$

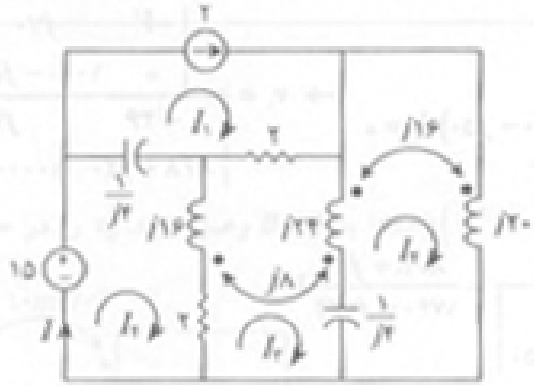
مسئله ۳۵

$i(t)$ را در حالت دایمی سینوسی تعیین کنید.



شکل مسئله ۳۵

حل : در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود.



$I_1 = 1$

KVL برای مش ۲ $\rightarrow$ $-15 + \frac{1}{j4}(I_2 - 2) + j16(I_2 - I_3) + j8(I_2 - I_4) + 2(I_2 - I_4) = 0$

KVL برای مش ۳ $\rightarrow$ $2(I_3 - I_2) + j16(I_3 - I_2) - j8(I_3 - I_4) + 2(I_3 - 1) + 24j(I_3 - I_4)$

$$- j8(I_3 - I_4) + j16 I_3 + \frac{1}{j4}(I_3 - I_4) = 0$$

KVL برای مش ۴ $\rightarrow$ $\frac{1}{j4}(I_4 - I_3) + j24(I_4 - I_3) + j8(I_4 - I_2) - j16 I_4 + j20 I_4$

$$+ 16j(I_4 - I_3) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} (2 + j15/75) I_2 + (-2 + j8) I_3 - j8 I_4 = 15 - j0/5 \\ (-2 - j8) I_2 + (2 - j13/25) I_3 - j0/25 I_4 = 2 \\ -j8 I_2 + j0/25 I_3 + j11/75 I_4 = 0 \end{cases}$$

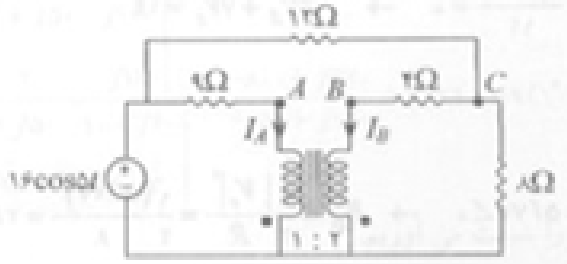
$$\rightarrow I = I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 15 + j0/5 & -2 + j8 & -j8 \\ 2 & 2 - j13/25 & -j0/25 \\ 0 & j0/25 & j11/75 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 + j15/75 & -2 + j2 & -j8 \\ -2 - j8 & 2 - j13/25 & -j0/25 \\ -j8 & j0/25 & j11/75 \end{vmatrix}} = \frac{7260 - j15680}{72480 + j15455} = 0/11\angle -130^\circ$$

$$\rightarrow i(t) = 0/11\cos(2t - 130^\circ)$$

مسئله ۳۶

الف ـ توان متوسط تحویلی به مقاومت 8Ω را تعیین کنید.

ب ـ اگر یک مقاومت 8Ω به دو سر A و B وصل شود بار دیگر مسئله را حل کنید.



شکل مسئله ۳۶

حل : الف ـ با توجه به شکل مسئله $V_A = 2V_B$ و $I_B = -2I_A$ بوده و خواهیم داشت.

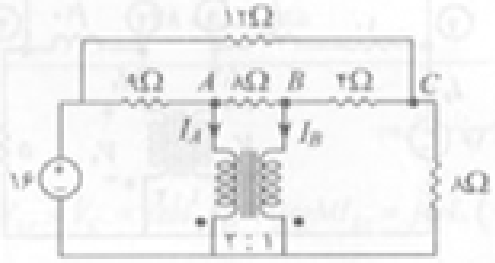
$$\text{KCL برای گره } A \rightarrow I_A + \frac{2V_B - 16}{9} = 0 \rightarrow 9I_A + 2V_B = 16$$

$$\text{KCL برای گره } B \rightarrow -2I_A + \frac{V_B - V_C}{2} = 0 \rightarrow 8I_A - V_B + V_C = 0$$

$$\text{KCL برای گره } C \rightarrow \frac{V_C - V_B}{2} + \frac{V_C}{8} + \frac{V_C - 16}{16} = 0 \rightarrow -2V_B + 7V_C = 16$$

$$\rightarrow V_C = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 2 & 16 \\ 8 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 8 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-912}{-139} = 6/56\angle 0 \rightarrow P_{av} = \frac{1}{2}\frac{|V_C|^2}{R} = \frac{1}{2}\frac{(6/56)^2}{8} = 2/68\ W$$

ب ـ در این حالت مدار بصورت زیر خواهد شد.



با توجه به شکل $V_A = 2V_B$ و $I_B = -2I_A$ بوده و خواهیم داشت.

KCL برای گره Ⓐ $\rightarrow \frac{2V_B-16}{9}+I_x+\frac{2V_B-V_B}{8}=0 \rightarrow 72I_x+25V_B=128$

KCL برای گره Ⓑ $\rightarrow \frac{V_B-2V_B}{8}-2I_x+\frac{V_B-V_C}{2}=0 \rightarrow 16I_x-V_B+2V_C=0$

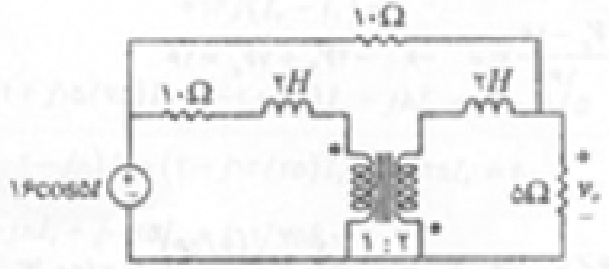
KCL برای گره Ⓒ $\rightarrow \frac{V_C-V_B}{2}+\frac{V_C}{8}+\frac{V_C-16}{12}=0 \rightarrow -4V_B+7V_C=16$

$$\rightarrow V_C=\frac{\begin{vmatrix}72 & 25 & 128\\ 16 & -1 & 0\\ 0 & -4 & 16\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}72 & 25 & 0\\ 16 & -1 & 2\\ 0 & -4 & 7\end{vmatrix}}=\frac{-15744}{-2728}=5/77\angle 0 \rightarrow P_{av}=\frac{1}{2}\frac{|V_C|^2}{R}=\frac{1}{2}\frac{(5/77)^2}{8}=2/08\ W$$

مسئله ۳۷

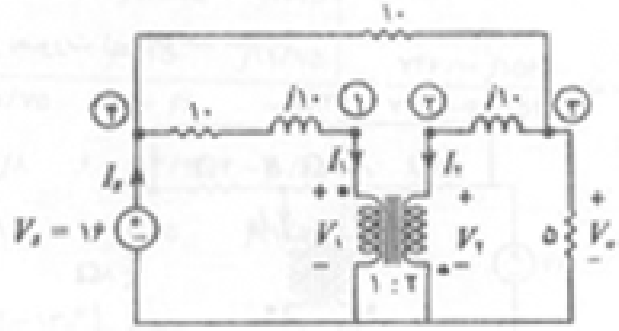
الف ـ v_o را در حالت دایمی سینوسی بدست آورید.

ب ـ امپدانس دیده شده در دو سر منبع ولتاژ را حساب کنید.



شکل مسئله ۳۷

حل : الف ـ در حالت دایمی سینوسی شکل مسئله بصورت زیر خواهد شد.



$$\frac{V_1}{V_2}=-\frac{1}{2} \rightarrow V_2=-2V_1 \ ,\ I_1=\frac{16-V_1}{10+j10} \ ,\ \frac{I_1}{I_2}=\frac{2}{1} \rightarrow I_2=\frac{1}{2}I_1=\frac{16-V_1}{20+j20}$$

KCL برای گره ۲ $\rightarrow \dfrac{16-V_1}{20+j20}+\dfrac{-2V_1-V_2}{j10}=0 \rightarrow (20+j50)V_1+(20+j20)V_2=j160$

KCL برای گره ۳ $\rightarrow \dfrac{V_2}{5}+\dfrac{V_2-(-2V_1)}{j10}+\dfrac{V_2-16}{10}=0 \rightarrow 2V_1+(1+j3)V_2=j16$

$$V_2=\frac{\begin{vmatrix}20+j50 & j160\\ 2 & j16\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}20+j50 & 20+j20\\ 2 & 1+j3\end{vmatrix}}=\frac{-800+j3200}{-150+j130}=4/34\angle 19/1^\circ \rightarrow V_2(t)=4/34\cos(5t+19/1^\circ)$$

ب ـ ابتدا با استفاده از دستگاه معادله فوق، V_1 را بدست می آوریم.

$$V_1=\frac{\begin{vmatrix}j160 & 20+j20\\ j16 & 1+j3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}20+j50 & 20+j20\\ 2 & 1+j3\end{vmatrix}}=\frac{-2560-j160}{-150+j130}=\frac{3/05\angle -3^\circ}{198\angle 139}=1/54\angle -170^\circ$$

KCL برای گره ۲ $\rightarrow -I_s+\dfrac{16-4/34\angle 19/1^\circ}{10}+\dfrac{16-1/54\angle -170^\circ}{10+j10}=0$

$\rightarrow I_s=2/97\angle -19/6^\circ$

$$\rightarrow Z_s=\frac{V_s}{I_s}=\frac{16\angle 0}{2/97\angle -19/6^\circ}=5/4\angle 19/6^\circ=5/09+j1/81$$

مسئله ۳۸

$i_s(t)=?$

شکل مسئله ۳۸

حل : با توجه به شکل مسئله داریم.

$$I_{L_2}=-I_C=-j\omega CV_c \quad , \quad V_{L_2}=V_C=j\omega L_2I_{L_2}+j\omega MI_{L_1}=j\omega L_2(-j\omega CV_C)+j\omega MI_s$$

$$j\omega MI_s=V_C-\omega^2cL_2V_C \rightarrow I_s=\frac{1-\omega^2cL_2}{j\omega M}V_c$$

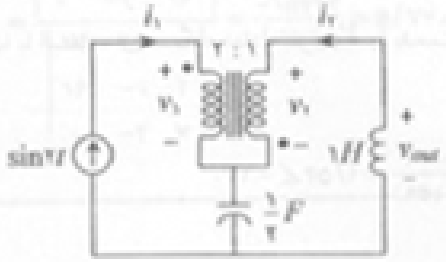
$$V_{c1} = -j \ , \ \omega = 2\pi\times10^{6} \ \rightarrow \ I_{c1} = \frac{1-\left(2\pi\times10^{6}\right)\times25\times10^{-12}\times10^{-3}}{j2\pi\times10^{6}\times10^{-3}}(-j) = -2/07\times10^{-3}$$

$$V_{c2} = -j10^{-3} \ , \ \omega = 2\pi\times10^{6} \ \rightarrow \ I_{c2} = \frac{1-\left(2\pi\times10^{6}\right)^{2}\times25\times10^{-12}\times10^{-3}}{j2\pi\times10^{6}\times10^{-3}} = -1/59\times10^{-3}$$

$$i_s(t) = -2/07\times10^{-3}\cos\left(2\pi\times10^{6}t\right) - 1/59\times10^{-3}\cos\left(2\pi\times10^{6}t\right)$$

مسئله ۳۹

$v_{out} = ?$



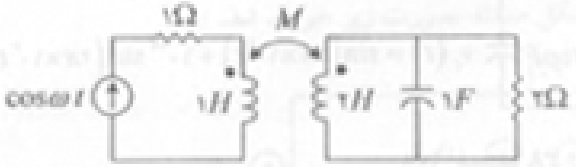
شکل مسئله ۳۹

حل : از آنجا که به حالت دایمی سینوسی اشاره نشده است لذا پاسخ کامل v_{out} را بدست خواهیم آورد.

$$i_1 = \sin 2t \ , \ \frac{i_1}{i_2} = \frac{1}{2} \ \rightarrow \ i_2 = 2i_1 = 2\sin 2t \qquad , \qquad v_{out} = -\frac{di_2}{dt} = 4\cos 2t$$

مسئله ۴۰

M را چنان تعیین کنید که حداکثر توان متوسط به بار 2Ω منتقل شود.



شکل مسئله ۴۰

حل : مدار را در حالت دایمی سینوسی رسم می کنیم.

KCL برای گره ① $\rightarrow I_1 + \dfrac{V_1}{\frac{1}{j\omega}} + \dfrac{V_1}{2} = 0 \rightarrow I_1 = -\left(\frac{1}{2} + j\omega\right)V_1$

از طرفی با توجه به سلفهای تزویج شده می توان نوشت.

$$V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 = j\omega M - j\omega\left(\frac{1}{2} + j\omega\right)V_1$$

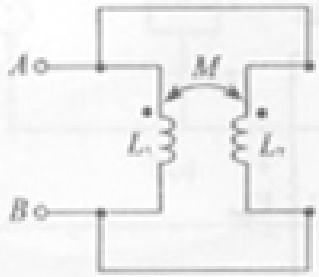
$$\rightarrow V_1 = \frac{j\omega M}{1 - \omega^2 + j\frac{\omega}{2}} \rightarrow P_{av} = \frac{1}{2}\frac{|V_1|^2}{R} = \frac{M^2\omega^2}{4\left(\left(1-\omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2\right)}$$

واضح است که P_{av} ماکزیمم به ازای M ماکزیمم حاصل خواهد شد که برابر است با

$$M = \sqrt{L_1 L_2} = 1H$$

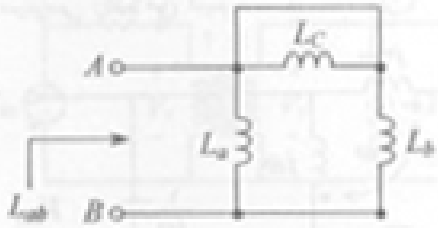
مسئله ۴۱

$L_{AB} = ?$



شکل مسئله ٤١

حل : با استفاده از مدار معادل ۳ سلفهای تزویج شده شکل مدار بصورت زیر خواهد شد.

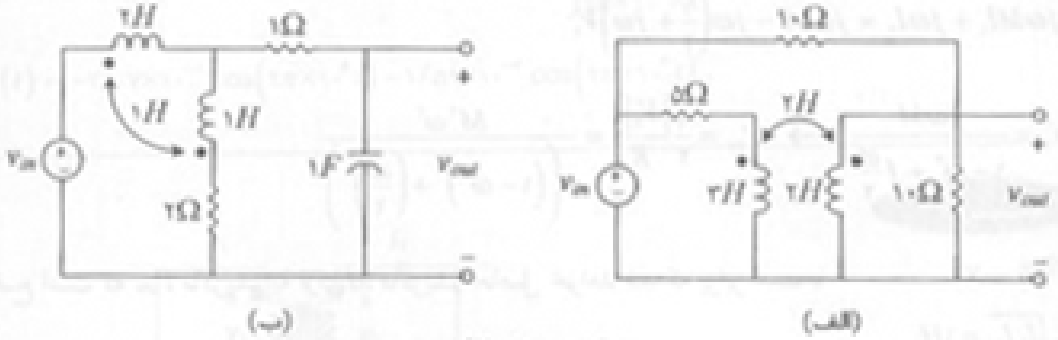


$$L_a = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 - M} \;,\; L_b = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - M} \rightarrow L_{AB} = L_a \parallel L_b = \frac{L_a L_b}{L_a + L_b}$$

$$\rightarrow L_{AB} = \frac{\left(\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 - M}\right)\left(\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - M}\right)}{\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 - M} + \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - M}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

مسئله ۴۲

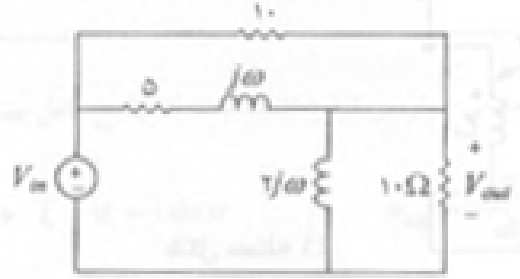
تابع شبکه انتقال ولتاژ را در دو مدار زیر بدست آورید.



(ب) (الف)

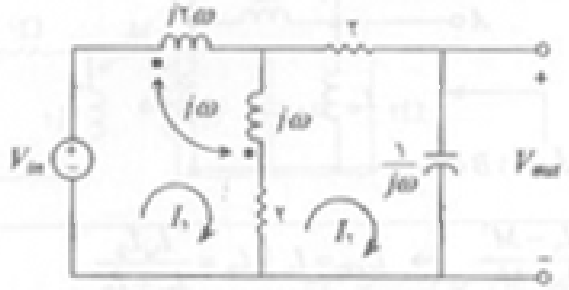
شکل مسئله ۴۲

حل: الف ـ با استفاده از مدار معادل T برای سلفهای تزویج، مدار را در حالت دایمی سینوسی رسم می کنیم.



$$V_{out} = \frac{10 \| 2j\omega}{10 \| 2j\omega + 10 \| (5 + j\omega)} = \frac{-\omega^2 + j15\omega}{25 - 2\omega^2 + j25\omega} V_{in} \rightarrow H(j\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{-\omega^2 + j15\omega}{25 - 2\omega^2 + j25\omega}$$

ب ـ مدار را در حالت دایمی سینوسی رسم می کنیم.



KVL برای مش ۱ $\rightarrow$ $-V_{in} + \left[j2\omega I_1 - j\omega(I_1 - I_2)\right] + \left[j\omega(I_1 - I_2) - j2\omega I_2\right] + 2(I_1 - I_2) = 0$

$$\rightarrow (2 + j\omega) I_1 - 2I_2 = V_{in} \quad (1)$$

KVL برای مش ۲ $\rightarrow$ $2(I_2 - I_1) + \left[j\omega(I_2 - I_1) + j\omega I_2\right] + 2I_2 + \frac{1}{j\omega} I_2 = 0$

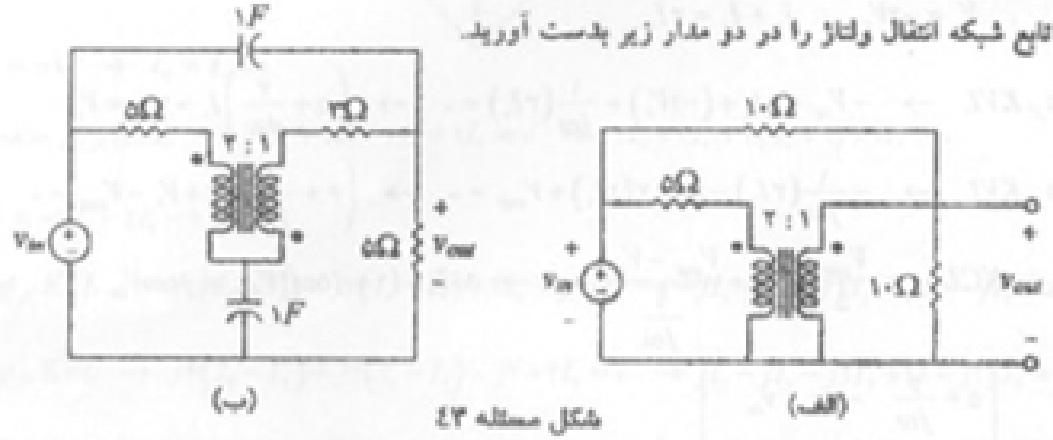
$$\rightarrow\ -2I_1+\left(4+j\omega+\frac{1}{j\omega}\right)I_1=0\ \rightarrow\ I_1=\left(2+\frac{j\omega}{2}+\frac{1}{2j\omega}\right)I_2$$

با توجه به شکل مسئله $I_2=j\omega V_{out}$ می باشد. با جایگذاری I_1 و I_2 بدست آمده در معادله(I) خواهیم داشت.

$$(4+j\omega)\left(2+\frac{j\omega}{2}+\frac{1}{j2\omega}\right)(j\omega V_{out})-2(j\omega V_{out})=V_{in}\ \rightarrow\ \frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{2}{2-5\omega^2+j\left(3\omega-\omega^3\right)}$$

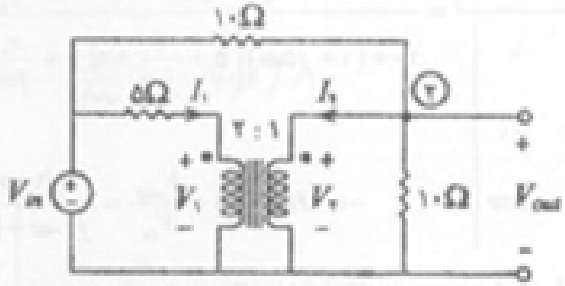
مسئله ۴۳

تابع شبکه انتقال ولتاژ را در دو مدار زیر بدست آورید.



شکل مسئله ۴۳

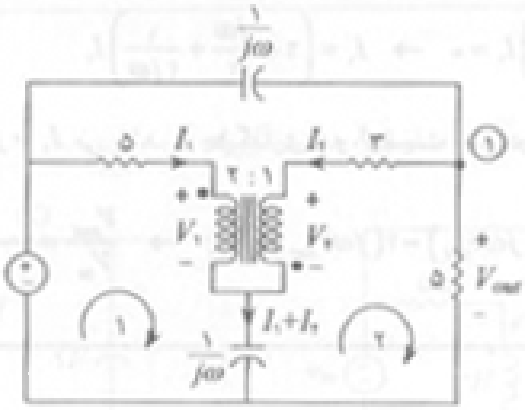
حل : الف ـ شکل مسئله را در حالت دایمی سینوسی رسم می کنیم.



$$V_1=2V_2\ \rightarrow\ I_1=\frac{V_{in}-V_1}{5}=\frac{V_{in}-2V_2}{5}\ ,\ I_2=-2I_1=\frac{2V_2-2V_{in}}{5}=\frac{2V_{out}-2V_{in}}{5}$$

$$KCL\ \text{برای گره}\ 2\ \rightarrow\ \frac{V_{out}}{10}+\frac{V_{out}-V_{in}}{10}+\frac{2V_{out}-2V_{in}}{5}=0\ \rightarrow\ H(j\omega)=\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{1}{2}$$

ب ـ مدار را در حالت دایمی سینوسی رسم می کنیم.



$$I_2 = 2I_1 \quad , \quad V_1 = -2V_2 \quad , \quad I_1 + I_2 = 3I_1$$

$$KVL \text{ برای مش ۱} \rightarrow -V_{in} + 5I_1 + (-2V_2) + \frac{1}{j\omega}(3I_1) = 0 \rightarrow \left(5 + \frac{3}{j\omega}\right)I_1 - 2V_2 = V_{in}$$

$$KVL \text{ برای مش ۲} \rightarrow -\frac{1}{j\omega}(3I_1) - V_2 - 3(2I_1) + V_{out} = 0 \rightarrow \left(6 + \frac{3}{j\omega}\right)I_1 + V_2 - V_{out} = 0$$

$$KCL \text{ برای گره ۱} \rightarrow \frac{V_{out}}{5} + 2I_1 + \frac{V_{out} - V_{in}}{\frac{1}{j\omega}} = 0 \rightarrow 10I_1 + (1 + j5\omega)V_{out} = j5\omega V_{in}$$

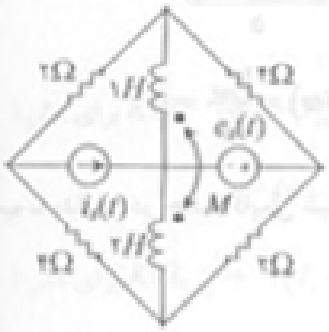
$$\rightarrow V_{out} = \frac{\begin{vmatrix} 5 + \frac{3}{j\omega} & -2 & V_{in} \\ 6 + \frac{3}{j\omega} & 1 & 0 \\ 10 & 0 & j5\omega V_{in} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 + \frac{3}{j\omega} & -2 & 0 \\ 6 + \frac{3}{j\omega} & 1 & -1 \\ 10 & 0 & j5\omega \end{vmatrix}} = \frac{10 + j5\omega\left(5 + \frac{3}{j\omega} + 2\left(6 + \frac{3}{j\omega}\right)\right)}{20 + (1 + j5\omega)\left(5 + \frac{3}{j\omega} + 2\left(6 + \frac{3}{j\omega}\right)\right)}V_{in}$$

$$\rightarrow H(j\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{j10\omega + j5\omega(9 + j17\omega)}{j20\omega + (1 + j5\omega)(9 + j17\omega)}$$

مسئله ۴۴

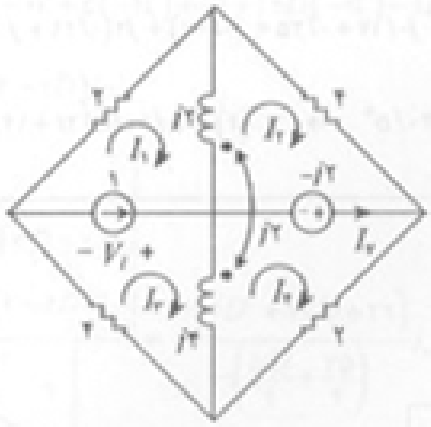
جریان گذرنده از منبع ولتاژ و ولتاژ دو سر منبع جریان را تعیین کنید.

$$(M = 1H \ , \ e_s(t) = 2\sin 2t \ , \ i_s(t) = \cos 2t)$$



شکل مسئله ٤٤

حل : شکل مسئله را در حالت دایمی سینوسی رسم می کنیم.



$I_1 - I_5 = -1 \rightarrow I_5 = I_1 + 1$

برای حلقه بیرونی $KVL \rightarrow 2I_1 + 2I_2 + 2I_3 + 2I_4 = 0 \rightarrow 2I_1 + 2I_3 + 2(I_1+1) + 2I_4 = 0$

$\rightarrow I_4 = -3I_1 - 2I_3 - 2$

برای مش ۲ $KVL \rightarrow j2(I_1 - I_2) + j2(I_4 - I_2) + 2I_1 + j2 = 0 \rightarrow -jI_1 + (2+j)I_2 + jI_4 - jI_5 = -j$

برای مش ۴ $KVL \rightarrow j2(I_5 - I_4) + j2(I_1 - I_4) - j2 + 2I_4 = 0 \rightarrow jI_1 - jI_4 - j2I_5 + (1+j2)I_4 = j$

$$\begin{cases} -jI_1 + (2+j)I_2 + j(I_1+1) - j(-3I_1 - 2I_3 - 2) = -j \\ jI_1 - jI_5 - j2(I_1+1) + (1+j2)(-3I_1 - 2I_3 - 2) = j \end{cases} \rightarrow \begin{cases} j3I_1 + (2+j3)I_3 = -j2 \\ (3+j7)I_1 + (2+j5)I_5 = -2 - j7 \end{cases}$$

$$\rightarrow I_1 = \frac{\begin{vmatrix} -j2 & 2+j3 \\ -2-j7 & 2+j5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j3 & 2+j3 \\ 3+j7 & 2+j5 \end{vmatrix}} = \frac{3+j12}{-j17} = -0/71 + j0/17$$

$$\rightarrow I_3 = \frac{\begin{vmatrix} j3 & -j2 \\ 3+j7 & -2-j7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j3 & 2+j3 \\ 3+j7 & 2+j5 \end{vmatrix}} = \frac{-7+j6}{-j17} = -0/35 + j0/47 \quad , \quad I_4 = I_1 + 1 = 0/29 + j0/17$$

$I_3 = -3I_1 - 2I_4 - 2 = -3(0/29 + j0/17) - 2(-0/35 + j0/47) - 2 = -2/2 - j0/25$

با توجه به شکل مسئله داریم.

$I_5 = I_3 - I_1 = (-2/2 - j0/25) - (-0/35 + j0/47) = -1/85 - j1/92 = 2/67\angle -133/9$

$\rightarrow i_5(t) = 2/67\cos(2t - 133/9^\circ)$

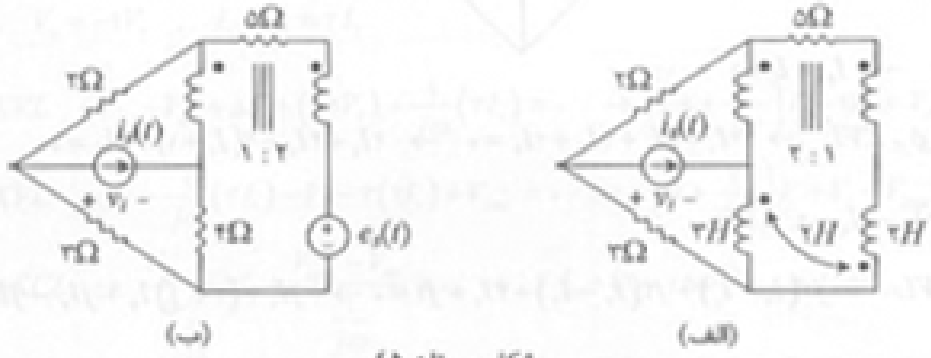
KVL برای مش ۱ $\rightarrow \; V_1 + 2I_1 + j2(I_1 - I_2) + j2(I_1 - I_3) = 0$

$$V_1 + 2(-0/71 + j0/17) + j2(-0/71 + j0/17 + 0/25 - j0/47) + j2(-0/29 + j0/17 + 2/2 + j1/45) = 0$$

$$\rightarrow \; V_1 = -4/06 + j3/3 = 5/2\angle 140/5^\circ \; \rightarrow \; v_1(t) = 5/2\cos(2t + 140/5^\circ)$$

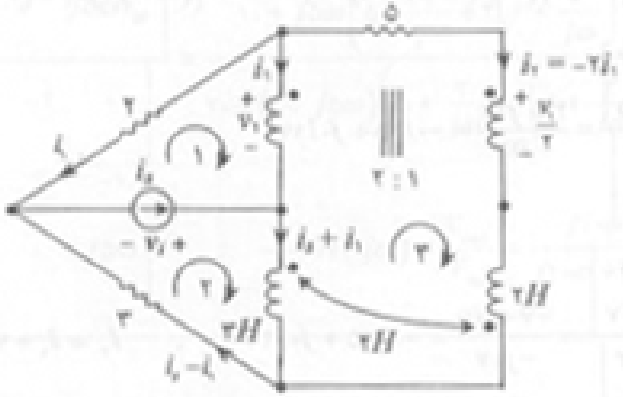
مسئله ۴۵

$v_1(t) = ?$



شکل مسئله ۴۵

حل: الف ـ ازآنجا که به حالت دایمی سینوسی اشاره ای نشده است ومنابع ثابته موجود درمدارنامعلوم اند لذا به محاسبه معادله دیفرانسیل v_1 بر حسب منابع ثابته اکتفا خواهیم کرد.



همانطورکه ملاحظه می شود جریان تمامی شاخه ها رامی توان برحسب جریان طرف اول ترانسفورماتور ایده آل (i_1) و منبع جریان بدست آورد. در ادامه با بکارگیری روش تحلیل مش و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

KVL برای مش ۱ $\rightarrow \; -2i_1 + v_1 + v_2 = 0$

KVL برای مش ۲ $\rightarrow \; -v_2 + \left[3D(i_3 + i_1) - 2D(-2i_1)\right] + 2(i_3 - i_1) = 0$

$$\rightarrow \quad (7D-3)i_1 + v_1 = -(3D+3)i_2$$

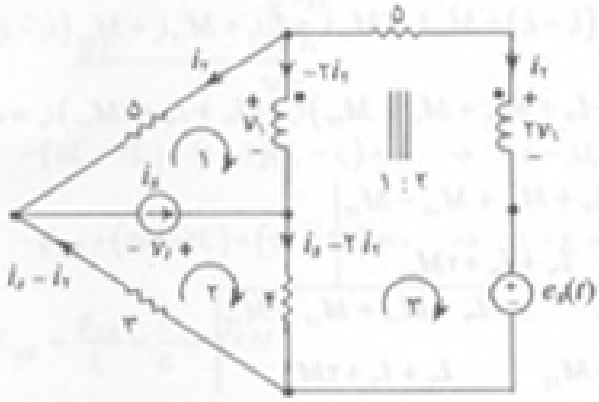
KVL برای حلقه بیرونی $\rightarrow \quad -2i_1 + 5(-2i_1) + \frac{v_1}{2} + \left[2D(-2i_1) - 2D(i_2 + i_1)\right] + 3(i_2 - i_1) = 0$

$$\rightarrow \quad (6D+15)i_1 + \frac{v_1}{2} = -(3-2D)i_2$$

$$\rightarrow \quad v_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 7D-3 & 0 & -(3D+3)i_2 \\ 6D+15 & \frac{1}{2} & (3-2D)i_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 7D-3 & 0 & -1 \\ 6D+15 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-\left(2D^2 + 13D + 39\right)}{-\left(\frac{5D}{2} + \frac{35}{2}\right)} i_2$$

$$\rightarrow \quad \frac{5}{2}\frac{dv_1}{dt} + \frac{35}{2}v_1 = 2\frac{d^2 i_2}{dt^2} + 13\frac{di_2}{dt} + 39 i_2$$

ب ـ همانند قسمت (الف) عمل می کنیم.



KVL برای مش ۱ $\rightarrow \quad -5i_1 + v_1 + v_1 = 0$

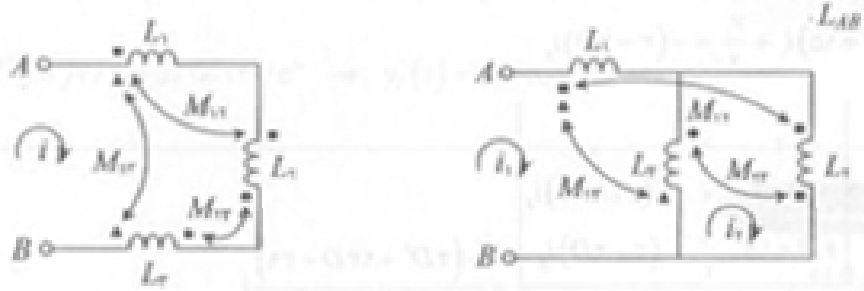
KVL برای مش ۲ $\rightarrow \quad 3(i_2 - i_1) - v_1 + 2(i_2 - 2i_1) = 0 \quad \rightarrow \quad 11i_1 + v_1 = 7i_2$

KVL برای مش ۳ $\rightarrow \quad -2(i_2 - 2i_1) - v_1 + 5i_1 + 2v_1 + e_2 = 0 \quad \rightarrow \quad 13i_1 + v_1 = 4i_2 - e_2$

$$\rightarrow \quad v_1 = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 11 & 0 & 7i_2 \\ 13 & 1 & 4i_2 - e_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 11 & 0 & 1 \\ 13 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{27i_2 + 11e_2}{29} \quad \rightarrow \quad v_1 = \frac{82}{29}i_2 + \frac{11}{29}e_2$$

مسئله ۴۶

$L_{AB} = ?$



(ب) شکل مسئله ۴۶ (الف)

حل : الف ـ با نوشتن KVL برای هر دو حلقه مدار داریم.

$$KVL \text{ برای مش ۱} \rightarrow -\phi_{AB} + L_1 i_1 + M_{13} i_1 - M_{12}(i_1 - i_2) + L_2(i_1 - i_2) - M_{23} i_2 - M_{13} i_1 = 0$$

$$\rightarrow (L_1 + L_2 - 2M_{12}) i_1 + (-L_2 + M_{13} + M_{12} - M_{23}) i_2 = \phi_{AB}$$

$$KVL \text{ برای مش ۲} \rightarrow L_2(i_2 - i_1) + M_{23} i_2 + M_{12} i_1 + L_3 i_2 + M_{13} i_1 + M_{23}(i_2 - i_1) = 0$$

$$\rightarrow (-L_2 + M_{12} + M_{13} - M_{23}) i_1 + (L_2 + L_3 + 2M_{23}) i_2 = 0$$

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} \phi_{AB} & -L_2 + M_{13} + M_{12} - M_{23} \\ 0 & L_2 + L_3 + 2M_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1 + L_2 - 2M_{12} & -L_2 + M_{13} + M_{12} - M_{23} \\ -L_2 + M_{13} + M_{12} - M_{23} & L_2 + L_3 + 2M_{23} \end{vmatrix}}$$

$$\rightarrow L_{AB} = \frac{\phi_{AB}}{i_1} = \frac{(L_1 + L_2 - 2M_{12})(L_2 + L_3 + 2M_{23}) - (-L_2 + M_{13} + M_{12} - M_{23})^2}{L_2 + L_3 + 2M_{23}}$$

ب ـ همانند قسمت (الف) عمل می کنیم.

$$\phi_{AB} = (L_1 i + M_{13} i - M_{12} i) + (L_2 i + M_{12} i - M_{23} i) + (L_3 i - M_{13} i - M_{23} i)$$

$$= (L_1 + L_2 + L_3 + 2M_{13} - 2M_{12} - 2M_{23}) i$$

$$\rightarrow L_{AB} = \frac{\phi_{AB}}{i} = L_1 + L_2 + L_3 + 2(M_{13} - M_{12} - M_{23})$$

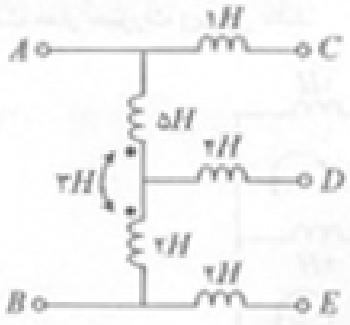
مسئله ۴۷

$L_{AB} = ?$ به شرط اتصالهای زیر.

الف ـ C به D.

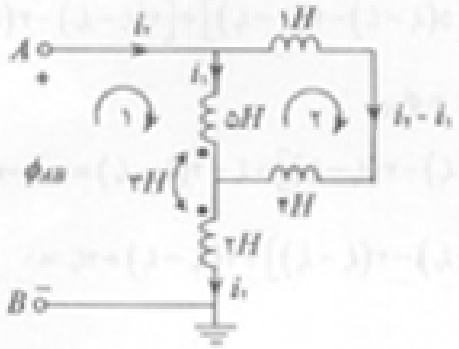
ب ـ D به E.

پ ـ C و E به D



شکل مسئله ۴۷

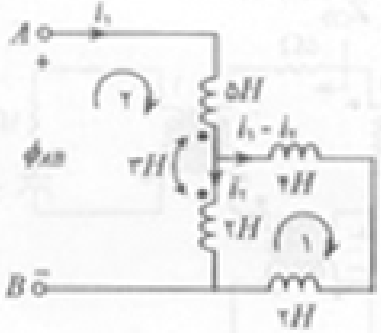
حل : الف ـ در این حالت مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$\begin{cases} KVL \text{ برای مش ۱} \rightarrow -(5i_1 - 2i_2) + (1+4)(i_1 - i_2) = 0 \rightarrow 10i_1 - 8i_2 = 0 \\ KVL \text{ برای مش ۲} \rightarrow -\phi_{AB} + (5i_2 - 2i_1) + (2i_2 - 2i_1) = 0 \rightarrow 2i_2 - i_1 = \phi_{AB} \end{cases}$$

$$\rightarrow i_1 = \frac{5}{3}\phi_{AB} \rightarrow L_{AB} = \frac{\phi_{AB}}{i_1} = \frac{3}{5} = 0/6H$$

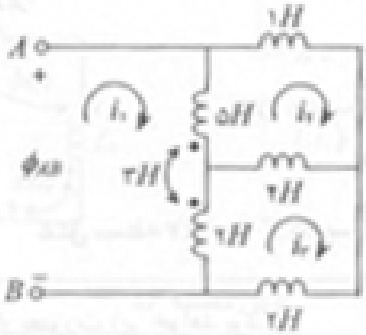
ب ـ در این حالت مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$\begin{cases} KVL \text{ برای مش ۱} \rightarrow -(2i_1 - 2i_2) + (2+4)(i_1 - i_2) = 0 \rightarrow 4i_1 - 8i_2 = 0 \\ KVL \text{ برای مش ۲} \rightarrow -\phi_{AB} + (5i_2 - 2i_1) + (2i_2 - 2i_1) = 0 \rightarrow 2i_2 - i_1 = \phi_{AB} \end{cases}$$

$$\rightarrow\ i_1=\frac{8}{7}\phi_{AB}\ \rightarrow\ L=\frac{\phi_{AB}}{i_1}=\frac{7}{8}H$$

پ ـ در این حالت مدار بصورت زیر می باشد.



KVL برای مش ۱ $\rightarrow\ -\phi_{AB}+\left[5(i_1-i_2)-3(i_1-i_3)\right]+\left[2(i_1-i_2)-3(i_1-i_3)\right]=0$

$$\rightarrow\ i_1-2i_2+i_3=\phi_{AB}$$

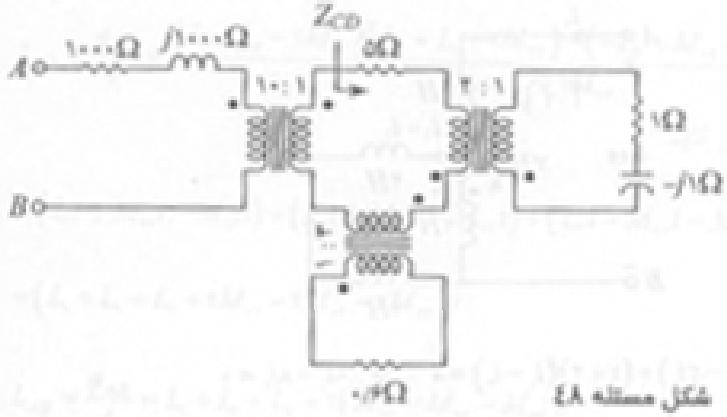
KVL برای مش ۲ $\rightarrow\ -\left[5(i_1-i_2)-3(i_1-i_3)\right]+i_2+2(i_2-i_3)=0\ \rightarrow\ -2i_1+10i_2-7i_3=0$

KVL برای مش ۳ $\rightarrow\ -\left[2(i_1-i_2)-3(i_1-i_3)\right]+2(i_3-i_2)+2i_3=0\ \rightarrow\ i_1-7i_2+8i_3=0$

$$\rightarrow\ i_1=\frac{\begin{vmatrix}\phi_{AB} & -2 & 1\\ 0 & 10 & -7\\ 0 & -7 & 8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 10 & -7\\ 1 & -7 & 8\end{vmatrix}}=\frac{37\phi_{AB}}{17}\ \rightarrow\ L_{AB}=\frac{\phi_{AB}}{i_1}=\frac{17}{37}H$$

مسئله ۴۸

$Z_{AB}=?$



شکل مسئله ۴۸

حل : با توجه به شکل مسئله و نسبت تبدیل ترانسفورماتورها داریم:

$$Z_{CD} = ۵ + (۲)^۲ (۱ - j۱) + (۳)^۲ (۰/۶) = ۱۴/۴ - j۲$$

و در نهایت خواهیم داشت:

$$Z_{AB} = ۱۰۰۰ + j۱۰۰۰ + (۱۰)^۲ Z_{CD} = ۱۰۰۰ + j۱۰۰۰ + ۱۴۴۰ - j۲۰۰ = ۲۴۴۰ + j۶۰۰\ \Omega$$