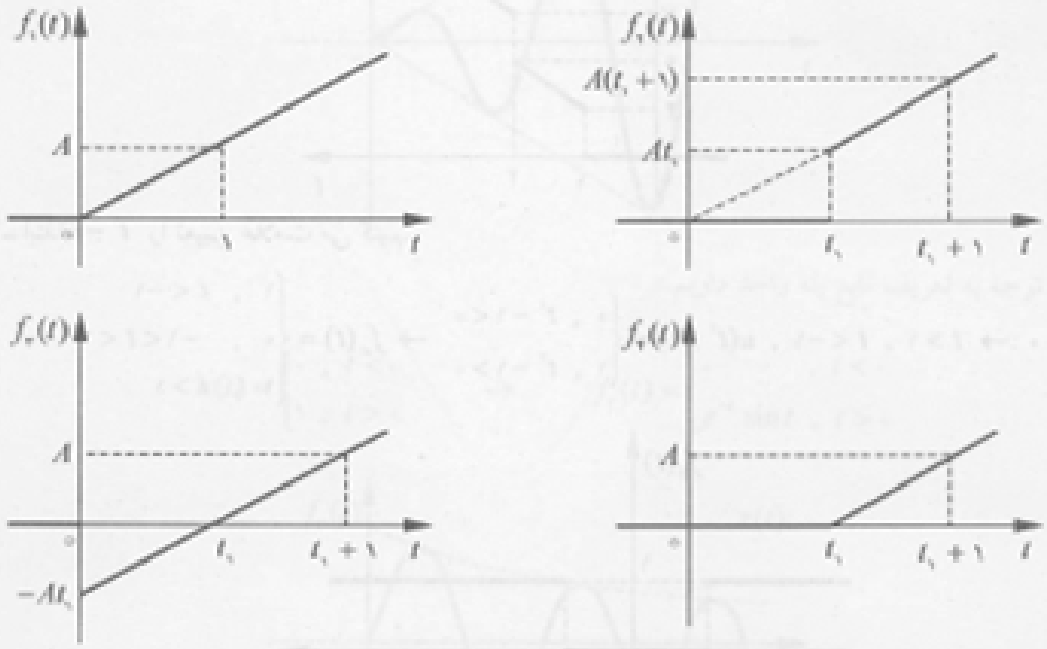
مسئله ۱

شکل موجهای $f_1(t) = Atu(t)$ ، $f_2(t) = Atu(t-t_1)$ ، $f_3(t) = A(t-t_1)u(t)$ ، $f_4(t) = A(t-t_1)u(t-t_1)$ را رسم کنید.

ارتباط بین آنها را توضیح دهید.

حل :



نمودار $f_3(t)$ همان نمودار $f_1(t)$ به ازای $t > t_1$ می باشد. نمودار $f_4(t)$ همان نمودار $f_2(t)$ است با این تفاوت که به اندازه $-At_1$ به سمت پایین جابجا شده است و نمودار $f_2(t)$ نمودار جابجا شده $f_1(t)$ به سمت راست به اندازه t_1 می باشد.

مسئله ۲

شکل موجهای زیر را رسم کنید.

الف) $f_a(t) = u(t-2) + 2(t+1)u(t-1)$

ب) $f_b(t) = u(t^2-1)$

پ) $f_c(t) = (t-1)u(t+1) + (t+1)u(t-1)$

ت) $f_d(t) = r(t)\sin t$

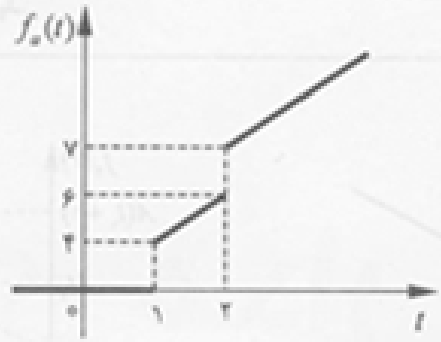
ث) $f_e(t) = e^{-t}\sin t\,u(t)$

ج) $f_g(t) = u(1-t^2)$

حل: الف ـ می توان نوشت:

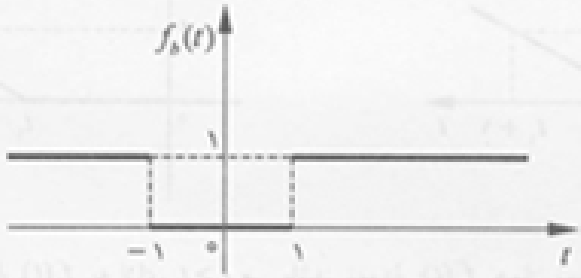
$$u(t-2)=\begin{cases}0 \ , \ t<2\\ 1 \ , \ t>2\end{cases} \quad , \quad u(t-1)=\begin{cases}0 \ , \ t<1\\ 1 \ , \ t>1\end{cases}$$

$$\rightarrow f_a(t)=\begin{cases}0+2(t+1)(0) \ , \ t<1\\ 0+2(t+1)(1) \ , \ 1<t<2\\ 1+2(t+1)(1) \ , \ t>2\end{cases} \quad \rightarrow f_a(t)=\begin{cases}0 \ , \ t<1\\ 2t+2 \ , \ 1<t<2\\ 2t+3 \ , \ t>2\end{cases}$$



ب ـ ابتدا $t'-1$ را تعیین علامت می کنیم.

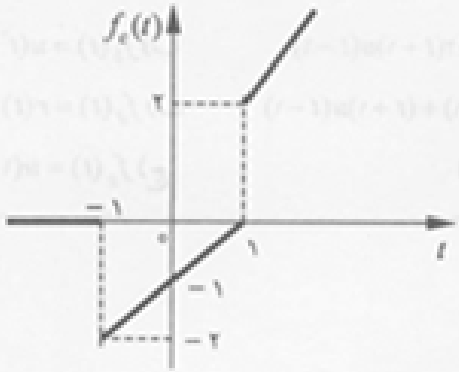
$$t'-1>0 \rightarrow t>1 \ , \ t<-1 \ , \ u(t'-1)=\begin{cases}0 \ , \ t'-1<0\\ 1 \ , \ t'-1>0\end{cases} \rightarrow f_b(t)=\begin{cases}1 \ , \ t<-1\\ 0 \ , \ -1<t<1\\ 1 \ , \ t>1\end{cases}$$



پ ـ می توان نوشت.

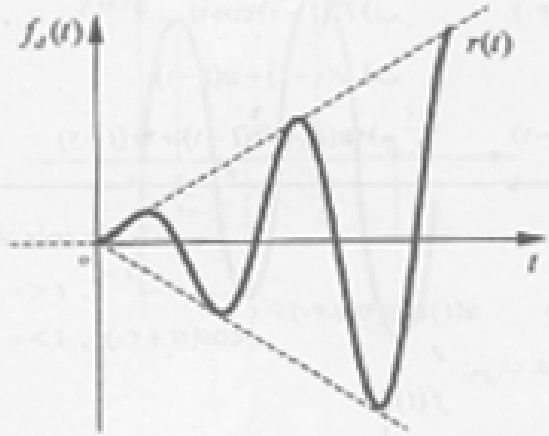
$$u(t-1)=\begin{cases}0 \ , \ t<1\\ 1 \ , \ t>1\end{cases} \quad , \quad u(t+1)=\begin{cases}0 \ , \ t<-1\\ 1 \ , \ t>-1\end{cases}$$

$$\rightarrow f_c(t)=\begin{cases}(t-1)(0)+(t+1)(0) \ , \ t<-1\\ (t-1)(1)+(t+1)(0) \ , \ -1<t<1\\ (t-1)(1)+(t+1)(1) \ , \ t>1\end{cases} \quad \rightarrow f_c(t)=\begin{cases}0 \ , \ t<-1\\ t-1 \ , \ -1<t<1\\ 2t \ , \ t>1\end{cases}$$



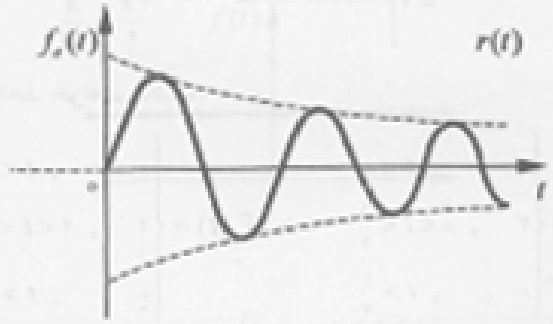
ث ـ با توجه به تعریف تابع شیب واحد داریم:

$$r(t)=\begin{cases}0 & , t<0\\ t & , t>0\end{cases} \quad \rightarrow \quad f_d(t)=\begin{cases}0 & , t<0\\ t\sin t & , t>0\end{cases}$$



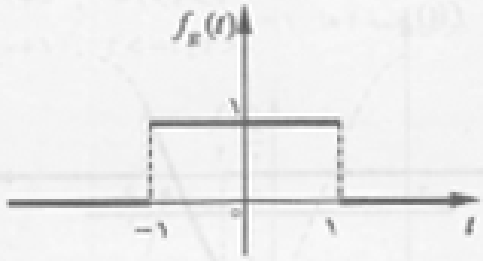
ث ـ با توجه به تعریف تابع پله واحد داریم

$$u(t)=\begin{cases}0 & , t<0\\ 1 & , t>0\end{cases} \quad \rightarrow \quad f_e(t)=\begin{cases}0 & , t<0\\ e^{-t}\sin t & , t>0\end{cases}$$



ج ـ ابتدا $1-t^2$ را تعیین علامت می کنیم

$$1-t^2>0 \rightarrow -1<t<1 \ , \ f_g(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<-1\\ 1 & , \ -1<t<1\\ 0 & , \quad t>1\end{cases}$$



مسئله ۳

شکل موجهای زیر را رسم کنید.

الف) $u(t)\cos(2t+30)$

ب) $P_{\frac{1}{2}}(t-2)\cos 2t$

پ) $e^{-2t}\sin t\,u(t)$

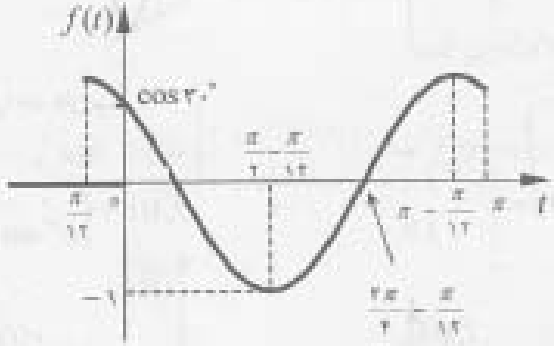
ت) $u(1-t)+u(t-1)$

ث) $u(1-t^2)+u(t^2-1)$

ج) $2u(t)-2r(t-1)+4r(t-2)$

حل: الف ـ بنابر تعریف تابع پله واحد داریم:

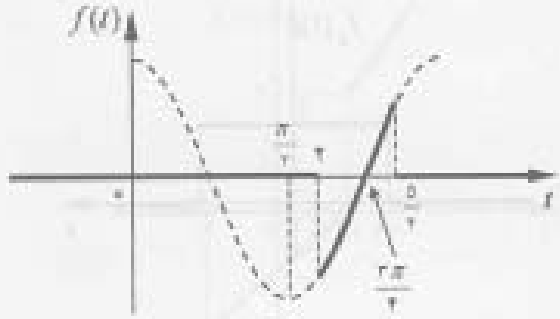
$$u(t)=\begin{cases}0 & , t<0\\ 1 & , t>0\end{cases} \rightarrow u(t)\cos(2t+30)=\begin{cases}0 & , t<0\\ \cos(2t+30) & , t\geq 0\end{cases}$$



ب ـ بنابر تعریف تابع پالس واحد خواهیم داشت:

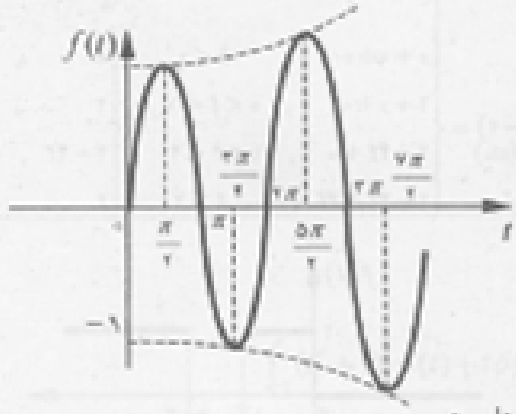
$$P_{\frac{1}{2}}(t)=\begin{cases}0 & , t<0\\ 2 & , 0<t<\frac{1}{2}\\ 0 & , t>\frac{1}{2}\end{cases} \rightarrow P_{\frac{1}{2}}(t)=\begin{cases}0 & , t<2\\ 2 & , 2<t<2+\frac{1}{2}\\ 0 & , t>2+\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\rightarrow P_{\frac{1}{2}}(t-2)\cos 2t=\begin{cases}0 & , t<2\\ 2\cos 2t & , 2<t<\frac{5}{2}\\ 0 & , t>\frac{5}{2}\end{cases}$$



پ ـ بنابر تعریف تابع پله واحد داریم:

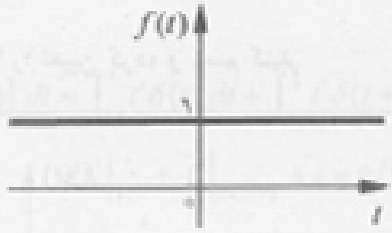
$$e^{t}\sin t\,u(t)=\begin{cases}0 & , t<0\\ e^{t}\sin t & , t>0\end{cases}$$



ت ـ بنابر تعریف تابع پله واحد داریم:

$$1-t>0 \rightarrow t<1 \rightarrow u(1-t)=\begin{cases}1 & , t<1\\ 0 & , t>1\end{cases} \quad , \quad t-1>0 \rightarrow t>1 \rightarrow u(t-1)=\begin{cases}0 & , t<1\\ 1 & , t>1\end{cases}$$

$$\rightarrow u(1-t)+u(t-1)=\begin{cases}1+0 & , t<1\\ 0+1 & , t>1\end{cases} \rightarrow u(1-t)+u(t-1)=1$$ برای همه t ها



ث ـ همانند قسمت (پ) داریم:

$$1-t^{2}>0 \rightarrow -1<t<1 \rightarrow u(1-t^{2})=\begin{cases}1 & , -1<t<1\\ 0 & , t<-1 , t>1\end{cases}$$

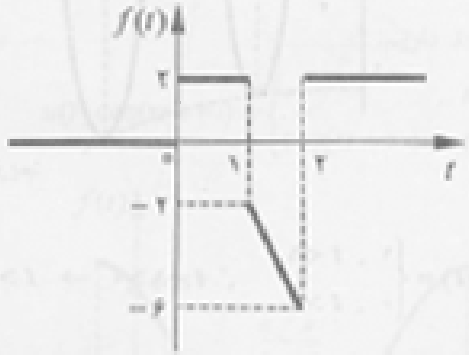
$$t^{2}-1>0 \rightarrow t<-1 , t>1 \rightarrow u(t^{2}-1)=\begin{cases}0 & , -1<t<1\\ 1 & , t<-1 , t>1\end{cases}$$

$$\rightarrow u(1-t^{2})+u(t^{2}-1)=\begin{cases}1+0 & , -1<t<1\\ 0+1 & , t<-1 , t>1\end{cases}=1$$ برای همه t ها

ج ـ با استفاده از تعریف توابع پله و شیب واحد خواهیم داشت:

$$u(t)=\begin{cases}0 & , t<0\\ 1 & , t>0\end{cases} \quad , \quad r(t-1)=\begin{cases}0 & , t<1\\ t & , t>1\end{cases} \quad , \quad r(t-2)=\begin{cases}0 & , t<2\\ t & , t>2\end{cases}$$

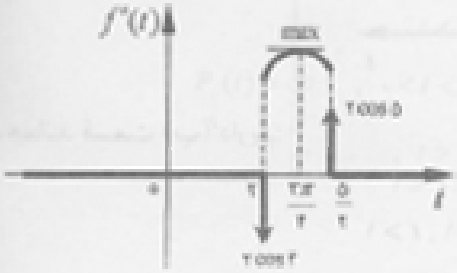
$$\rightarrow 2u(t)-2r(t-1)+2r(t-2)=\begin{cases}0+0+0 & , t<0\\ 2+0+0 & , 0<t<1\\ 2-2t+0 & , 1<t<2\\ 2-2t+2t & , t>2\end{cases}=\begin{cases}0 & , t<0\\ 2 & , 0<t<1\\ 2-2t & , 1<t<2\\ 2 & , t>2\end{cases}$$



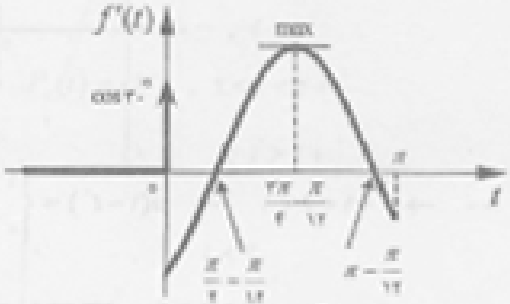
مسئله ۴

مشتق شکل موجهای مسئله ۳ را تعیین کرده و رسم کنید.

حل:

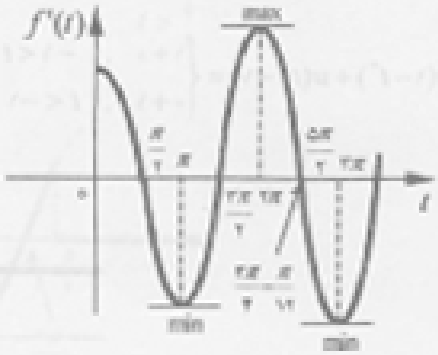


(ب)

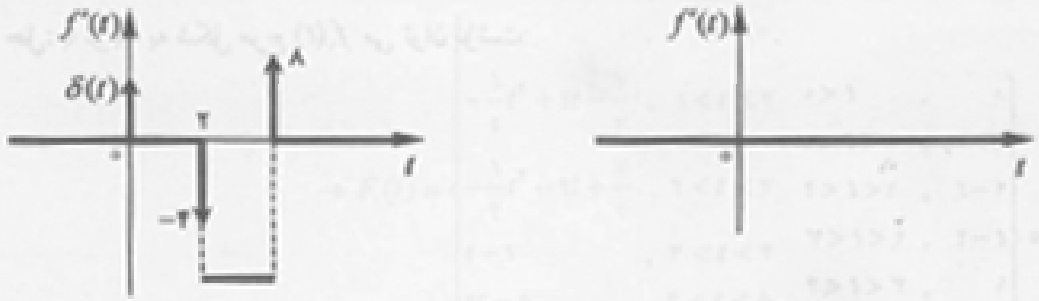


(الف)

(ت)



(پ)



(ج) (ث)

مسئله ۵

الف) $\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+4)[\delta(t)+2\delta(t-2)]\,dt = ?$

ب) $\int_{-\infty}^{\infty}t^2[\delta(t)+\delta(t+2/5)+\delta(t-5)]\,dt = ?$

حل: الف)

$$\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+4)[\delta(t)+2\delta(t-2)]\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}(t^2+4)\delta(t)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty}(t^2+4)\delta(t-2)\,dt$$

$$= (t^2+4)\Big|_{t=0} + 2(t^2+4)\Big|_{t=2} = 52$$

ب)

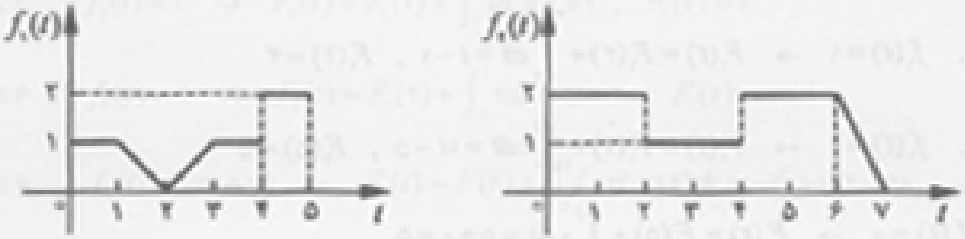
$$\int_{-\infty}^{\infty}t^2[\delta(t)+\delta(t+2/5)+\delta(t-5)]\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}t^2\delta(t)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty}t^2\delta(t+2/5)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty}t^2\delta(t-5)\,dt$$

$$= t^2\Big|_{t=0} + t^2\Big|_{t=-2/5} + 0 = 6/25$$

مسئله ۶

شکل موجهای زیر را بر حسب توابع ویژه بنویسید.

مشتق و انتگرال آنها را تعیین کنید.



شکل مسئلهٔ ۶

حل: با توجه به شکل موج $f_1(t)$ می توان نوشت:

$$f_1(t)=\begin{cases} ۰ & , \quad t<۰ \\ ۱ & , \quad ۰<t<۱ \\ ۲-t & , \quad ۱<t<۲ \\ t-۲ & , \quad ۲<t<۳ \\ ۱ & , \quad ۳<t<۴ \\ ۲ & , \quad ۴<t<۵ \\ ۰ & , \quad t>۵ \end{cases}$$

$$\rightarrow f_1(t)=(۱)\left[u(t)-u(t-۱)\right]+(۲-t)\left[u(t-۱)-u(t-۲)+u(t-۲)\right]+(t-۲)\left[u(t-۲)-u(t-۳)\right]$$

$$+(۱)\left[u(t-۳)-u(t-۴)\right]+(۲)\left[u(t-۴)-u(t-۵)\right]$$

$$=\left[u(t)-u(t-۱)\right]+\left[-(t-۱)u(t-۱)+u(t-۱)+(t-۲)u(t-۲)\right]$$

$$+\left[(t-۲)u(t-۲)-(t-۳)u(t-۳)-u(t-۳)\right]$$

$$+\left[u(t-۳)-u(t-۴)\right]+\left[۲u(t-۴)-۲u(t-۵)\right]$$

$$=u(t)-(t-۱)u(t-۱)+۲(t-۲)u(t-۲)-(t-۳)u(t-۳)+u(t-۴)-۲u(t-۵)$$

$$\rightarrow f_1(t)=u(t)-r(t-۱)+۲r(t-۲)-r(t-۳)+u(t-۴)-۲u(t-۵)$$

$$\rightarrow f_1'(t)=\delta(t)-u(t-۱)+۲u(t-۲)-u(t-۳)+\delta(t-۴)-۲\delta(t-۵)$$

برای محاسبه انتگرال $f_1(t)$، باید از $f_1(t)$ در ازای تک تک بازه ها انتگرالگیری کنیم.

$$t<۰ \ , \quad f_1(t)=۰ \quad \rightarrow \quad F_1(t)=۰ \ , \quad F_1(۰)=۰$$

$$۰<t<۱ \ , \quad f_1(t)=۰ \quad \rightarrow \quad F_1(t)=F_1(۰)+\int_۰^t dt=t \ , \quad F_1(۱)=۱$$

$$۱<t<۲ \ , \quad f_1(t)=۲-t \quad \rightarrow \quad F_1(t)=F_1(۱)+\int_۱^t (۲-t)dt=-\frac{t^۲}{۲}+۲t-\frac{۱}{۲} \ , \quad F_1(۲)=\frac{۳}{۲}$$

$$۲<t<۳ \ , \quad f_1(t)=t-۲ \quad \rightarrow \quad F_1(t)=F_1(۲)+\int_۲^t (t-۲)dt=\frac{t^۲}{۲}-۲t+\frac{۷}{۲} \ , \quad F_1(۳)=۲$$

$$۳<t<۴ \ , \quad f_1(t)=۱ \quad \rightarrow \quad F_1(t)=F_1(۳)+\int_۳^t dt=t-۱ \ , \quad F_1(۴)=۳$$

$$۴<t<۵ \ , \quad f_1(t)=۲ \quad \rightarrow \quad F_1(t)=F_1(۴)+\int_۴^t ۲dt=۲t-۵ \ , \quad F_1(۵)=۵$$

$$t>۵ \ , \quad f_1(t)=۰ \quad \rightarrow \quad F_1(t)=F_1(۵)+\int_۵^t ۰\, dt=۵+۰=۵$$

$$\rightarrow F_1(t)=\begin{cases} t & , \quad t<0 \\ -\frac{1}{2}t^2+2t-\frac{1}{2} & , \ 1<t<2 \\ -\frac{1}{2}t^2-2t+\frac{7}{2} & , \ 2<t<3 \\ t-1 & , \ 3<t<4 \\ 2t-5 & , \ 4<t<5 \\ 5 & , \quad t>5 \end{cases}$$

حال به شکل موج $f_1(t)$ توجه کنید. می توان نوشت:

$$f_1(t)=\begin{cases} 0 & , \quad t<0 \\ 2 & , \ 0<t<2 \\ 1 & , \ 2<t<4 \\ 2 & , \ 4<t<6 \\ -2t+14 & , \ 6<t<7 \\ 0 & , \quad t>7 \end{cases}$$

$$\rightarrow f_1(t)=(2)\left[u(t)-u(t-2)\right]+(1)\left[u(t-2)-u(t-4)\right]+(2)\left[u(t-4)-u(t-6)\right]$$

$$+(-2t+14)\left[u(t-6)-u(t-7)\right]$$

$$=2u(t)-u(t-2)+u(t-4)-2(t-6)u(t-6)+2(t-7)u(t-7)$$

$$=2u(t)-u(t-2)+u(t-4)-2r(t-6)+2r(t-7)$$

$$\rightarrow f_1'(t)=2\delta(t)-\delta(t-2)+\delta(t-4)-2u(t-6)+2u(t-7)$$

در ادامه انتگرال $f_1(t)$ را بدست خواهیم آورد.

$$t<0 \ , \quad f_1(t)=0 \quad \rightarrow \quad F_1(t)=0 \ , \quad F_1(0)=0$$

$$0<t<2 \ , \quad f_1(t)=2 \quad \rightarrow \quad F_1(t)=F_1(0)+\int_0^t 2dt=2t \ , \quad F_1(2)=4$$

$$2<t<4 \ , \quad f_1(t)=1 \quad \rightarrow \quad F_1(t)=F_1(2)+\int_2^t dt=t+2 \ , \quad F_1(4)=6$$

$$4<t<6 \ , \quad f_1(t)=2 \quad \rightarrow \quad F_1(t)=F_1(4)+\int_4^t 2dt=2t-2 \ , \quad F_1(6)=10$$

$$6<t<7 \ , \quad f_1(t)=-2t+14 \quad \rightarrow \quad F_1(t)=F(6)+\int_6^t(-2t+14)dt=-t^2+14t-28 \ , \quad F_1(7)=11$$

$$t>7 \ , \quad f_1(t)=0 \quad \rightarrow \quad F_1(t)=F_1(7)+\int_7^t 0\,dt=11$$

$$\rightarrow F_1(t)=\begin{cases} 0 & , \quad t<0 \\ 2t & , \quad 0<t<2 \\ t+2 & , \quad 2<t<4 \\ 2t-2 & , \quad 4<t<6 \\ -t^2+14t-38 & , \quad 6<t<7 \\ 11 & , \quad t>7 \end{cases}$$

مسئله ۷

نشان دهید $\delta(2t)=\frac{1}{2}\delta(t)$

حل: بنا بر تعریف تابع ضربه واحد داریم :

$$\int_{-2}^{2}\delta(2t)d(2t)=1$$

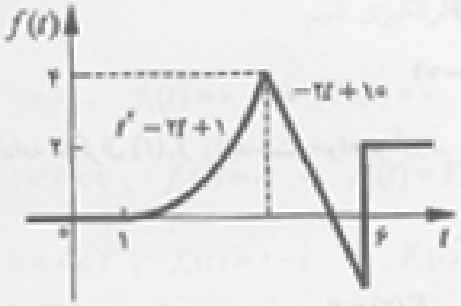
$$\rightarrow \quad \int_{-2}^{2}2\delta(2t)dt=\int_{-2}^{2}\delta(t)dt$$

$$\int_{-2}^{2}\delta(t)dt=1$$

$$\rightarrow \quad 2\delta(2t)=\delta(t) \quad \rightarrow \quad \delta(2t)=\frac{1}{2}\delta(t)$$

مسئله ۸

شکل موج نشان داده شده را برحسب ترکیب خطی از توابع پله، شیب و سهمی واحد بیان کنید.



شکل مسئلهٔ ۸

حل: می توان نوشت:

$$f(t)=(t^2-2t+1)\left[u(t-1)-u(t-3)\right]+(-2t+10)\left[u(t-3)-u(t-6)\right]+(2)u(t-6)$$

$$=\left[(t-1)^2u(t-1)-(t-3)^2u(t-3)+(-2t+8)u(t-3)\right]$$

$$=(t-1)^2u(t-1)-(t-3)^2u(t-3)-4(t-3)u(t-3)-2(t-6)u(t-6)$$

$$=2p(t-1)-2p(t-3)-4r(t-3)-2r(t-6)$$

مسئله ۹

مشتق توابع زیر را بیابید.

الف- $\left(1-te^{-t}\right)u(t)$ ب- $\cos 2\pi t\,u(t)$ ج- $e^{-t}u(t)$

حل:

الف) $f(t)=\left(1-te^{-t}\right)u(t) \rightarrow f'(t)=\left(1-te^{-t}\right)'u(t)+\left(1-te^{-t}\right)u'(t)$

$$=(t-1)e^{-t}u(t)+\left(1-te^{-t}\right)\delta(t)$$

$$=(t-1)e^{-t}u(t)+\left(1-te^{-t}\right)\Big|_{t=0}\delta(t)$$

$$=(t-1)e^{-t}u(t)+\delta(t)$$

ب) $f(t)=\cos 2\pi t\,u(t) \rightarrow f'(t)=-2\sin 2\pi t\,u(t)+\cos 2\pi t\,\delta(t)$

$$=-2\sin 2\pi t\,u(t)+\cos 2\pi t\Big|_{t=0}\delta(t)$$

$$=-2\sin 2\pi t\,u(t)+\delta(t)$$

ج) $f(t)=e^{-t}u(t) \rightarrow f'(t)=-e^{-t}u(t)+e^{-t}\delta(t)$

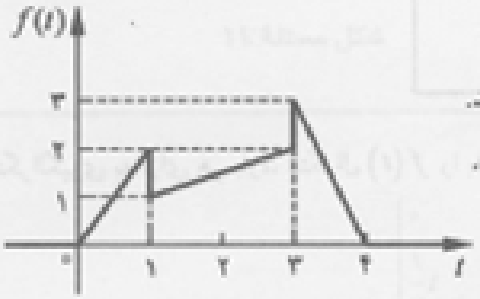
$$=-e^{-t}u(t)+e^{-t}\Big|_{t=0}\delta(t)$$

$$=-e^{-t}u(t)+\delta(t)$$

مسئله ۱۰

شکل موج $f(t)$ را بر حسب توابع پله و شیب بنویسید.

شکل موج مشتق و انتگرال $f(t)$ را تعیین و رسم کنید.



شکل مسئلهٔ ۱۰

حل: با توجه به شکل مسئله می توان نوشت :

$$f(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ 2t & , \quad 0<t<1\\ \frac{1}{2}t+\frac{1}{2} & , \quad 1<t<3\\ -3t+12 & , \quad 3<t<4\\ 0 & , \quad t>4\end{cases}$$

$$\rightarrow f(t)=\left[u(t)-u(t-1)\right]+\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)\left[u(t-1)-u(t-3)\right]+(-3t+12)\left[u(t-3)-u(t-4)\right]$$

$$=\left[2tu(t)-2(t-1)u(t-1)-2u(t-1)\right]$$

$$+\left[\frac{1}{2}(t-1)u(t-1)+u(t-1)-\frac{1}{2}(t-3)u(t-3)-2u(t-3)\right]$$

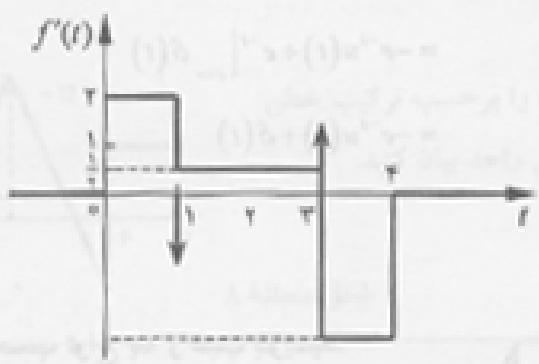
$$+\left[-3(t-3)u(t-3)+3u(t-3)-3(t-4)u(t-4)\right]$$

$$=2tu(t)-\frac{3}{2}(t-1)u(t-1)-u(t-1)-\frac{7}{2}(t-3)u(t-3)+u(t-3)-3(t-4)u(t-4)$$

$$=2r(t)-\frac{3}{2}r(t-1)-u(t-1)-\frac{7}{2}r(t-3)+u(t-3)-3r(t-4)$$

حال مشتق $f(t)$ را بدست آورده و آن را رسم می کنیم.

$$f'(t)=2u(t)-\frac{3}{2}u(t-1)-\delta(t-1)-\frac{7}{2}u(t-3)+\delta(t-3)-3u(t-4)$$



با انتگرالگیری به ازای هر بازه، انتگرال $f(t)$ را بدست آورده و رسم خواهیم کرد.

$$t<0 \ , \quad f_1(t)=0 \quad \rightarrow \quad F(t)=0 \quad , \quad F(0)=0$$

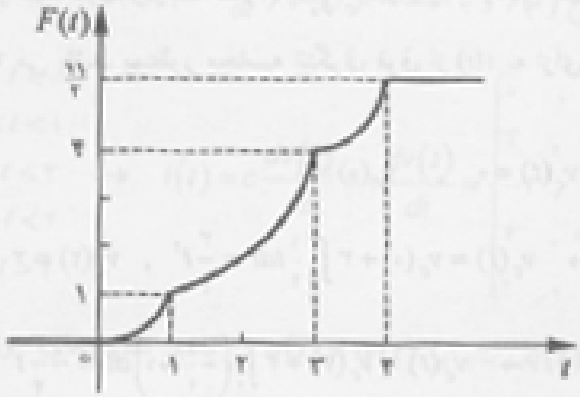
$$0<t<1 \ , \quad f(t)=2t \quad \rightarrow \quad F(t)=F(0)+\int_0^t 2t\,dt=t^2 \ , \quad F(1)=1$$

$$1<t<3 \ , \quad f(t)=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad F(t)=F(1)+\int_1^t\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)dt=\frac{t^2}{4}+\frac{t}{2}+\frac{1}{4} \ , \quad F(3)=4$$

$$3<t<4 \ , \quad f(t)=-3t+12 \quad \rightarrow \quad F(t)=F(3)+\int_3^t(-3t+12)dt=-\frac{3}{2}t^2+12t-\frac{27}{2} \ , \quad F(4)=\frac{11}{2}$$

$$t>4\ ,\quad f(t)=0 \quad\rightarrow\quad F(t)=F(4)+\int_4^t 0\,dt=\frac{11}{2}$$

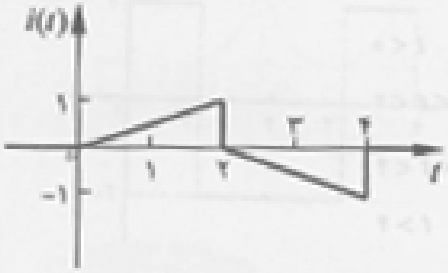
$$F(t)=\begin{cases}0 & ,\quad t<0\\ t^2 & ,\quad 0<t<1\\ \frac{t^2}{2}+\frac{t}{2}+\frac{1}{4} & ,\quad 1<t<3\\ -\frac{3}{2}t^2+17t-\frac{37}{2} & ,\quad 3<t<4\\ \frac{11}{2} & ,\quad t>4\end{cases}$$



مسئله ۱۱

الف- شکل موج نشان داده شده را توسط توابع پله و شیب بنویسید.

ب- اگر $i(t)$ جریان خازنی به ظرفیت $\frac{1}{4}F$ و ولتاژ اولیه صفر باشد، شکل موج ولتاژ دو سر خازن و معادلهٔ ریاضی آن را بدست آورید.



شکل مسئلهٔ ۱۱

حل: الف ـ می توان نوشت :

$$i(t)=\begin{cases}0 & ,\quad t<0\\ \frac{1}{2}t & ,\quad 0<t<2\\ -\frac{1}{2}t+1 & ,\quad 2<t<4\\ 0 & ,\quad t>4\end{cases}$$

$$\rightarrow i(t)=\frac{1}{2}t\left[u(t)-u(t-2)\right]+\left(-\frac{1}{2}t+1\right)\left[u(t-2)-u(t-4)\right]$$

$$=\left[\frac{1}{2}tu(t)-\frac{1}{2}(t-2)u(t-2)-u(t-2)\right]+\left[-\frac{1}{2}(t-2)u(t-2)+\frac{1}{2}(t-4)u(t-4)+u(t-4)\right]$$

$$=\frac{1}{2}tu(t)-(t-2)u(t-2)-u(t-2)+\frac{1}{2}(t-4)u(t-4)+u(t-4)$$

$$=\frac{1}{2}r(t)-r(t-2)-u(t-2)+\frac{1}{2}r(t-4)+u(t-4)$$

ب ـ برای محاسبه ولتاژ دو سر خازن از رابطه $v_c(t)=v_c(0)+\frac{1}{c}\int_0^t i_c(t)dt$ استفاده خواهیم کرد. با توجه به مسئله، $c=\frac{1}{3}$ و $v_c(0)=0$ می باشد. بمنظور محاسبه انتگرال فوق از $i(t)$ به ازای تک تک بازه ها انتگرالگیری خواهیم کرد.

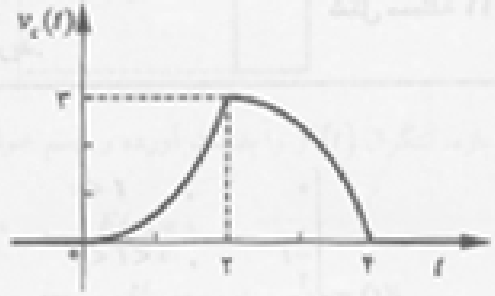
$$t<0\ ,\quad i(t)=0\ \rightarrow\ v_c(t)=0\ ,\quad v_c(0)=0$$

$$0<t<2\ ,\quad i(t)=\frac{1}{2}t\ \rightarrow\ v_c(t)=v_c(0)+3\int_0^t\frac{1}{2}tdt=\frac{3}{4}t^2\ ,\quad v_c(2)=3$$

$$2<t<4\ ,\quad i(t)=-\frac{1}{2}t+1\ \rightarrow\ v_c(t)=v_c(2)+3\int_2^t\left(-\frac{1}{2}t+1\right)dt=-\frac{3}{4}t^2+3t\ ,\quad v_c(4)=0$$

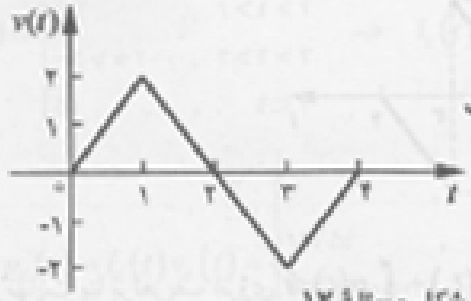
$$t>4\ ,\quad i(t)=0\ \rightarrow\ v_c(t)=v_c(4)+0=0$$

$$\rightarrow v_c(t)=\begin{cases}0 & ,\quad t<0\\ \frac{3}{4}t^2 & ,\quad 0<t<2\\ -\frac{3}{4}t^2+3t & ,\quad 2<t<4\\ 0 & ,\quad t>4\end{cases}$$



مسئله ۱۲

شکل موج ولتاژ یک خازن ۲ فارادی نشان داده شده است شکل موج جریان، بار، توان و انرژی را رسم کنید.

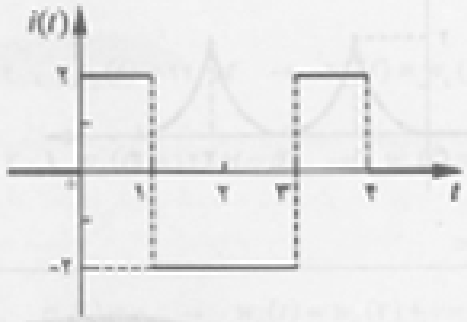


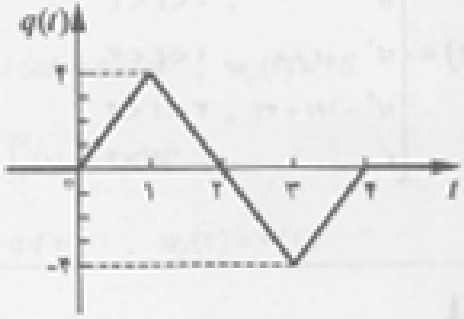
شکل مسئلهٔ ۱۲

حل: با توجه به شکل موج $v(t)$ و با استفاده از رابطه $i_c(t)=c\frac{dv_c(t)}{dt}$ داریم:

$$v(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ 2t & , \quad 0<t<1\\ -2t+4 & , \quad 1<t<3\\ 2t-8 & , \quad 3<t<4\\ 0 & , \quad t>4\end{cases} \rightarrow \quad i(t)=c\frac{dv(t)}{dt}=2\frac{dv(t)}{dt}=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ 4 & , \quad 0<t<1\\ -4 & , \quad 1<t<3\\ 4 & , \quad 0<t<4\\ 0 & , \quad t>4\end{cases}$$

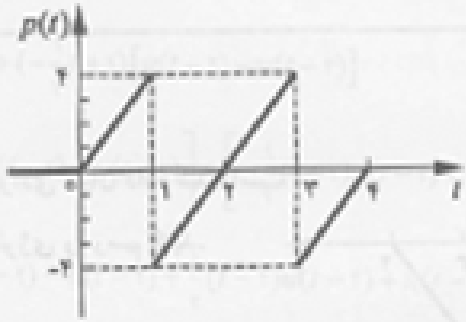
همچنین می دانیم که $q(t)=cv(t)$ ، بنابراین $q(t)=2v(t)$ می باشد. نمودارهای جریان و بار خازن در شکل زیر رسم شده اند.





در ادامه با استفاده از رابطه $p(t)=i(t)v(t)$ نمودار توان را رسم خواهیم کرد.

$$p(t)=i(t)v(t)=\begin{cases}(0)(0) & , \quad t<0\\ (2t)(4) & , \quad 0<t<1\\ (-2t+4)(4) & , \quad 1<t<3\\ (2t-8)(4) & , \quad 3<t<4\\ (0)(0) & , \quad t>4\end{cases}=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ 8t & , \quad 0<t<1\\ 8t-8 & , \quad 1<t<3\\ 8t-16 & , \quad 3<t<4\\ 0 & , \quad t>4\end{cases}$$



در نهایت بنا برتعریف انرژی $w(t)=w(t_0)+\int_{t_0}^{t}p(t)dt$ نمودار انرژی را رسم می کنیم.

$t<0\ ,\quad p(t)=0\ \rightarrow\ w(t)=0\ ,\quad w(0)=0$

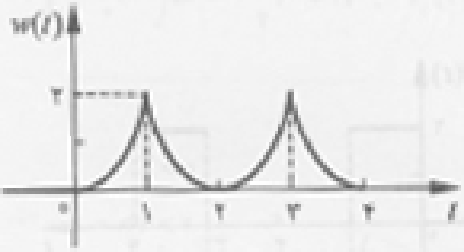
$0<t<1\ ,\quad p(t)=4t\ \rightarrow\ w(t)=w(0)+\int_0^t 4t\,dt=2t^2\ ,\quad w(1)=2$

$1<t<3\ ,\quad p(t)=4t-8\ \rightarrow\ w(t)=w(1)+\int_1^t(4t-8)dt=2t^2-8t+8\ ,\quad w(3)=2$

$3<t<4\ ,\quad p(t)=4t-16\ \rightarrow\ w(t)=w(3)+\int_3^t(4t-16)dt=2t^2-16t+32\ ,\quad w(4)=0$

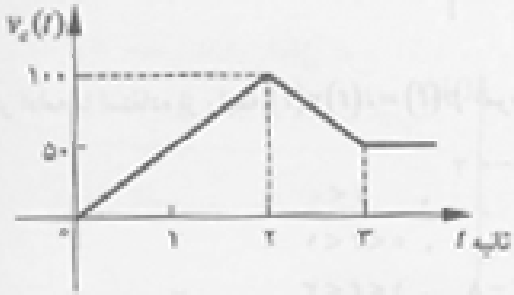
$t>4\ ,\quad p(t)=0\ \rightarrow\ w(t)=w(0)=0$

$$\rightarrow w(t)=\begin{cases}0 & ,\ t<0\\ 2t^2 & ,\ 0<t<3\\ 2t^2-8t+8 & ,\ 1<t<3\\ 2t^2-16t+32 & ,\ 3<t<4\\ 0 & ,\ t>4\end{cases}$$



مسئله ۱۳

شکل موج ولتاژ دو سر یک خازن $5\ mF$ نشان داده شده است. توان و انرژی ذخیره شده خازن را تعیین و شکل موج آنها را رسم کنید.

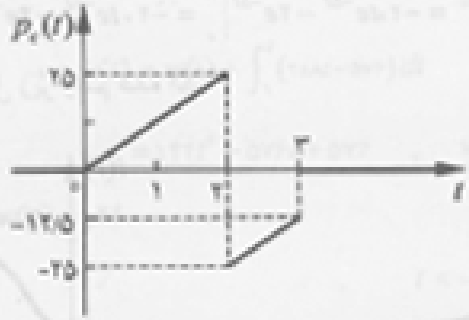


شکل مسئلهٔ ۱۳

حل: با استفاده از رابطه $i_c(t)=c\frac{dv_c(t)}{dt}$ و $p(t)=i(t)v(t)$ و با توجه به شکل مسئله داریم :

$$v_c(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ 5t & , \quad 1<t<2\\ -5t+200 & , \quad 2<t<3\\ 50 & , \quad t>3\end{cases} \rightarrow \quad i_c(t)=5\times10^{-4}\frac{dv(t)}{dt}=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ 0/25 & , \quad 1<t<2\\ -0/25 & , \quad 2<t<3\\ 0 & , \quad t>3\end{cases}$$

$$\rightarrow \quad p_c(t)=i_c(t)v_c(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ 12/5t & , \quad 0<t<2\\ 12/5t-50 & , \quad 2<t<3\\ 0 & , \quad t>3\end{cases}$$



برای محاسبه انرژی از رابطه $w(t)=w(t_0)+\int_{t_0}^{t}p(t)dt$ استفاده خواهیم کرد.

$$t<0 \ , \quad p_c(t)=0 \quad \rightarrow \quad w_c(t)=0 \ , \quad w_c(0)=0$$

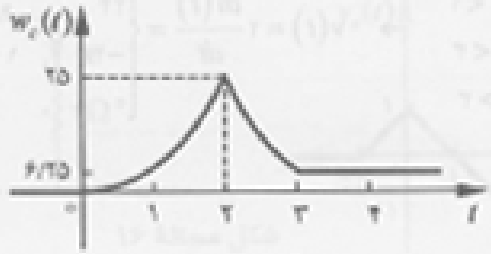
$$0<t<2 \ , \quad p_c(t)=12/5t \quad \rightarrow \quad w_c(t)=w_c(0)+\int_0^t 12/5t\,dt=6/25t^2 \ , \quad w_c(2)=25$$

$$2<t<3 \ , \quad p_c(t)=12/5t-50 \quad \rightarrow \quad w_c(t)=w_c(2)+\int_2^t(12/5t-50)dt$$

$$=6/25t^2-50t+100 \ , \quad w_c(3)=6/25$$

$$t>3 \ , \quad p_c(t)=0 \quad \rightarrow \quad w_c(t)=w_c(3)+0=6/25$$

$$\rightarrow \quad w_c(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ 6/25t^2 & , \quad 0<t<2\\ 6/25t^2-50t+100 & , \quad 2<t<3\\ 6/25 & , \quad t>3\end{cases}$$



مسئله ۱۴

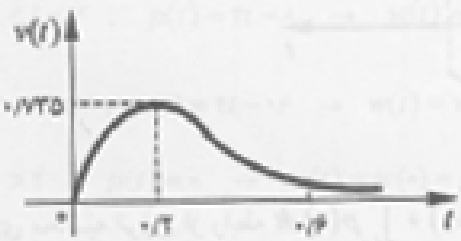
در یک سلف $L = 0/1\ H$ و $v(t) = 10te^{-5t}$ و $i(t) = 0\ (t \le 0)$

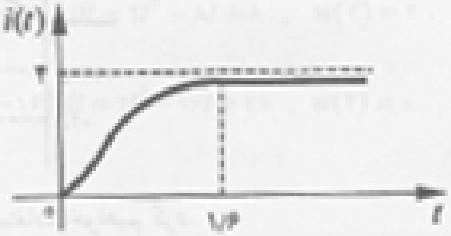
شکل موج ولتاژ و جریان گذرنده از سلف را رسم کنید.

حل: برای $t \le 0$ ، $i(t) = 0$ می باشد بنابراین $i(0) = 0$ بوده و برای $t > 0$ ، با استفاده از رابطه $i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)dt$ جریان را محاسبه می کنیم.

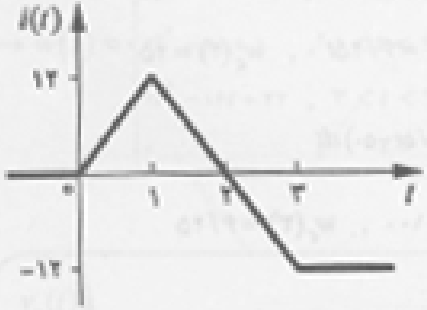
$$i(t) = i(0) + \frac{1}{0/1}\int_0^t 10te^{-5t} = -20te^{-5t} - 4e^{-5t}\Big|_0^t = -20te^{-5t} - 4e^{-5t} + 4$$

شکل موجهای جریان و ولتاژ در شکل زیر رسم شده اند.





مسئله ۱۵



شکل مسئلهٔ ۱۵

جریان یک سلف با $L = 2\ H$ و $i(0) = 0$ داده شده است.

توان تحویل داده شده به سلف و انرژی ذخیره شده در آن را برای $t > 0$ تعیین و رسم کنید.

شکل موج کشش و انتگرال $i(t)$ را تعیین و رسم کنید.

حل: با استفاده از رابطه $v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$ و با توجه به شکل موج $i(t)$ داریم.

$$i(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ 12t & , \quad 0 < t < 1 \\ -12t + 24 & , \quad 1 < t < 3 \\ -12 & , \quad t > 3 \end{cases} \rightarrow v(t) = 2\frac{di(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ 24 & , \quad 0 < t < 1 \\ -24 & , \quad 1 < t < 3 \\ 0 & , \quad t > 3 \end{cases}$$

$$p(t)=v(t)i(t) \quad \rightarrow \quad p(t)=\begin{cases} ۰ & , \quad t<۰ \\ ۲۸۸t & , \quad ۰<t<۱ \\ ۲۸۸t-۵۷۶ & , \quad ۱<t<۳ \\ ۰ & , \quad t>۳ \end{cases}$$

در نهایت با استفاده از رابطه $w(t)=w(t_0)+\int_{t_0}^{t} p(t)dt$ داریم:

$$t<۰ \ , \quad p(t)=۰ \quad \rightarrow \quad w(t)=۰ \quad , \quad w(۰)=۰$$

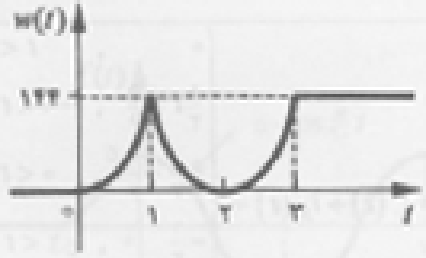
$$۰<t<۱ \ , \quad p(t)=۲۸۸t \quad \rightarrow \quad w(t)=w(۰)+\int_{۰}^{t} ۲۸۸t\,dt=۱۴۴t^{۲} \quad , \quad w(۱)=۱۴۴$$

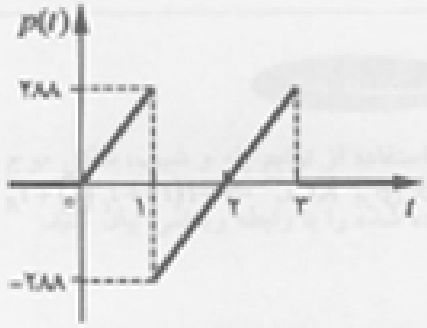
$$۱<t<۳ \ , \quad p(t)=۲۸۸t-۵۷۶ \quad \rightarrow \quad w(t)=w(۱)+\int_{۱}^{t}(۲۸۸t-۵۷۶)dt$$

$$=۱۴۴t^{۲}-۵۷۶t+۵۷۶ \quad , \quad w(۳)=۱۴۴$$

$$t>۳ \ , \quad p(t)=۰ \quad \rightarrow \quad w(t)=w(۳)=۱۴۴$$

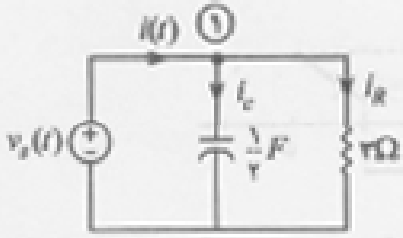
$$\rightarrow \quad w(t)=\begin{cases} ۰ & , \quad t<۰ \\ ۱۴۴t^{۲} & , \quad ۰<t<۱ \\ ۱۴۴t^{۲}-۵۷۶t+۵۷۶ & , \quad ۱<t<۳ \\ ۱۴۴ & , \quad t>۳ \end{cases}$$

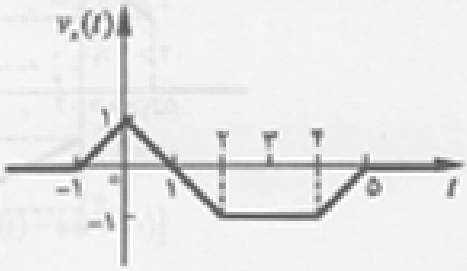




مسئله ۱۶

شکل موج $i(t)$ را رسم کنید.





شکل مسئلهٔ ۱۶

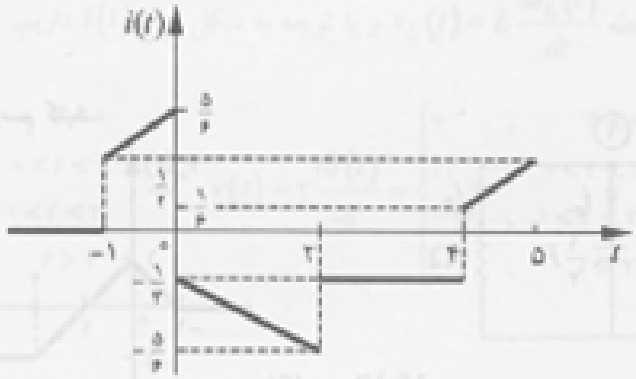
حل: با توجه به شکل موج منبع ولتاژ داریم:

$$v_s(t)=\begin{cases}0 & , t<-1\\ t+1 & , -1<t<0\\ -t+1 & , 1<t<2\\ -1 & , 2<t<4\\ t-5 & , 4<t<5\\ 0 & , t>5\end{cases} \rightarrow i_R(t)=\frac{v_R(t)}{R}=\frac{v_s(t)}{3}=\begin{cases}0 & , t<-1\\ \frac{1}{3}(t+1) & , -1<t<0\\ \frac{1}{3}(-t+1) & , 0<t<2\\ -\frac{1}{3} & , 2<t<4\\ \frac{1}{3}(t-5) & , 4<t<5\\ 0 & , t>5\end{cases}$$

$$i_c(t)=c\frac{dv_c(t)}{dt}=\frac{1}{2}\frac{dv_s(t)}{dt}=\begin{cases}0 & , t<-1\\ \frac{1}{2} & , -1<t<0\\ -\frac{1}{2} & , 0<t<2\\ 0 & , 2<t<4\\ \frac{1}{2} & , 4<t<5\\ 0 & , t>5\end{cases}$$

در نهایت با استفاده از KCL خواهیم داشت:

$$\text{KCL برای گره ①} \rightarrow -i(t)+i_c(t)+i_R(t)=0 \rightarrow i(t)=i_c(t)+i_R(t)=\begin{cases}0 & , t<-1\\ \frac{1}{3}t+\frac{5}{6} & , -1<t<0\\ -\frac{t}{3}-\frac{1}{6} & , 0<t<2\\ -\frac{1}{3} & , 2<t<4\\ \frac{t}{3}-\frac{4}{6} & , 4<t<5\\ 0 & , t>5\end{cases}$$



مسئله ۱۷

مقاومت غیرخطی با مشخصه $i = e^{2v} - 1$ به دوسرش یک منبع ولتاژ $v_s(t) = \cos\omega t$ وصل شده است. چه فرکانس هایی در جریان گذرنده از مقاومت وجود دارد.

حل: ابتدا جریان گذرنده از مقاومت را بدست می آوریم.

$$i = e^{2v} - 1 = e^{2\cos\omega t} - 1$$

حال با استفاده از بسط $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad , \quad |x| \le 1$ داریم:

$$i = \left(1 + 2\cos\omega t + 2\cos^2\omega t + \frac{4}{3}\cos^3\omega t + \frac{2}{3}\cos^4\omega t + \dots\right) - 1$$

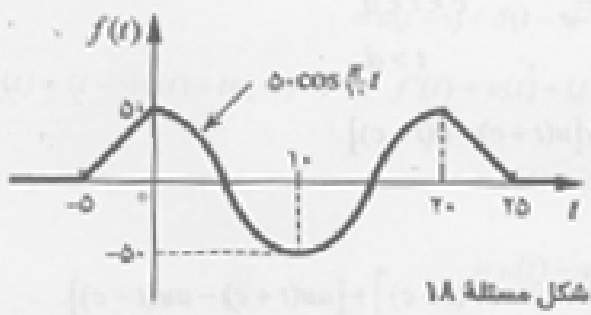
حال با استفاده از روابط تبدیل حاصلضرب به مجموع در مثلثات داریم:

$$i = \left[1 + 2\cos\omega t + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega t\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos 3\omega t\right)\right.$$
$$\left. + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{8}\cos 2\omega t + \frac{1}{2}\cos 3\omega t + \frac{1}{8}\cos 4\omega t\right) + \dots\right] - 1$$

بنابراین همه فرکانسهایی که مضرب صحیح و مثبتی از ω اند در جریان گذرنده از مقاومت وجود دارد.

مسئله ۱۸

با استفاده از توابع پله و شیب، شکل موج نشان داده شده را با رابطه ریاضی بیان کنید.



شکل مسئلهٔ ۱۸

حل: با توجه به شکل موج نشان داده شده داریم:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < -5 \\ 10t + 50 & , \quad -5 < t < 0 \\ 50\cos\frac{\pi}{10}t & , \quad 0 < t < 20 \\ -10t + 250 & , \quad 20 < t < 25 \\ 0 & , \quad t > 25 \end{cases}$$

$$\rightarrow f(t) = (10t + 50)\left[u(t+5) - u(t)\right] + 50\cos\frac{\pi}{10}t\left[u(t) - u(t-20)\right]$$

$$+(-10t+250)\left[u(t-20)-u(t-25)\right]$$

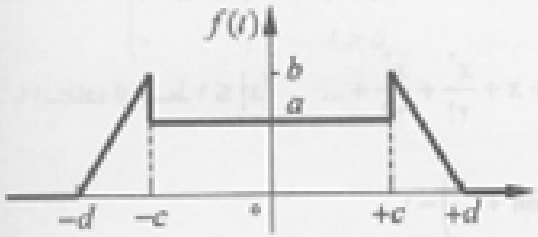
$$=\left[10(t+5)u(t+5)-10tu(t)-5tu(t)\right]+\left[\left(5\cos\frac{\pi}{10}t\right)u(t)-\left(5\cos\frac{\pi}{10}t\right)u(t-20)\right]$$

$$+\left[-10(t-20)u(t-20)+5u(t-20)+10(t-25)u(t-25)\right]$$

$$\rightarrow f(t)=10r(t+5)-10r(t)+5(-1+\cos\frac{\pi}{10}t)\left[u(t)-u(t-20)\right]-10r(t-20)+10r(t-25)$$

مسئله ۱۹

شکل موج نشان داده شده را بر حسب توابع پله و شیب بیان کنید.



شکل مسئلهٔ ۱۹

حل: با توجه به شکل موج نشان داده شده می توان نوشت:

$$f(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<-d\\ \frac{b}{d-c}t+\frac{db}{d-c} & , \quad -d<t<-c\\ a & , \quad -c<t<c\\ -\frac{b}{d-c}t+\frac{db}{d-c} & , \quad c<t<d\\ 0 & , \quad t>d\end{cases}$$

$$\rightarrow f(t)=\left(\frac{b}{d-c}t+\frac{db}{d-c}\right)\left[u(t+d)-u(t+c)\right]+q\left[u(t+c)-u(t-c)\right]$$

$$+\left(-\frac{b}{d-c}t+\frac{db}{d-c}\right)\left[u(t-c)-u(t-d)\right]$$

$$=\left[\frac{b}{d-c}(t+d)u(t+d)-\frac{b}{d-c}(t+c)u(t+c)-bu(t+c)\right]+\left[au(t+c)-au(t-c)\right]$$

$$+\left[-\frac{b}{d-c}(t-c)u(t-c)+bu(t-c)+\frac{b}{d-c}(t-d)u(t-d)\right]$$

$$\rightarrow f(t)=\frac{b}{d-c}r(t+d)-\frac{b}{d-c}r(t+c)+(a-b)u(t+c)+(b-a)u(t-c)$$

$$-\frac{b}{d-c}r(t-c)+\frac{b}{d-c}r(t-d)$$

مسئله ۲۰

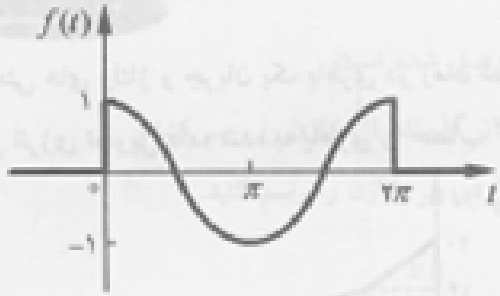
مشتق شکل موجهای زیر را تعیین کنید.

الف- $(t-2)u(t-1)$

ب- $tu(t-1)$

پ- $(t-1)u(t)-tu(-t)$

ث- $f(t)$



شکل مسئلهٔ ۲۰

حل:

الف) $f(t)=(t-2)u(t-1) \quad \rightarrow \quad f'(t)=u(t-1)+(t-2)\delta(t-1)$

$$=u(t-1)+(t-2)\big|_{t=1}\delta(t-1)$$

$$=u(t-1)-\delta(t-1)$$

ب) $f(t)=tu(t-1) \quad \rightarrow \quad f'(t)=u(t-1)+t\delta(t-1)$

$$=u(t-1)+t\big|_{t=1}\delta(t-1)$$

$$=u(t-1)+\delta(t-1)$$

ج) $f(t)=(t-1)u(t)-tu(-t) \quad \rightarrow \quad f'(t)=u(t)+(t-1)\delta(t)-u(-t)-t\delta(-t)$

$$=u(t)+(t-1)\big|_{t=0}\delta(t)-u(-t)-t\big|_{t=0}\delta(-t)$$

$$=u(t)-u(-t)-\delta(t)$$

ث) $f(t)=\cos t\left[u(t)-u(t-2\pi)\right]$

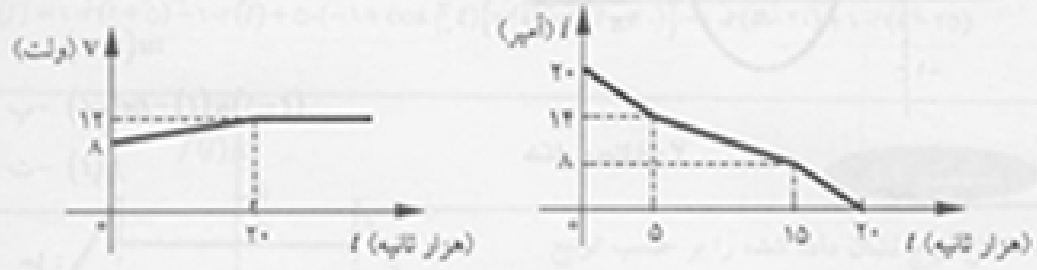
$$\rightarrow \quad f'(t)=-\sin t\left[u(t)-u(t-2\pi)\right]+\cos t\left[\delta(t)-\delta(t-2\pi)\right]$$

$$=-\sin t\left[u(t)-u(t-2\pi)\right]+\cos t\big|_{t=0}\delta(t)-\cos t\big|_{t=2\pi}\delta(t-2\pi)$$

$$=-\sin t\left[u(t)-u(t-2\pi)\right]+\delta(t)-\delta(t-2\pi)$$

مسئله ۲۱

- منحنی های ولتاژ و جریان یک باطری در زمان شارژ شدن نشان داده شده است.
- کل انرژی تحویل داده شده به باطری را حساب کنید.



شکل مسئلهٔ ۲۱

حل: با توجه به نمودارهای داده شده داریم:

$$v(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ \frac{t}{5000}+8 & , \quad 0<t<20000\\ 12 & , \quad t>20000\end{cases} \quad , \quad i(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ \frac{-6}{5000}t+20 & , \quad 0<t<5000\\ \frac{-6}{10000}t+17 & , \quad 5000<t<15000\\ \frac{-8}{5000}t+32 & , \quad 15000<t<20000\\ 0 & , \quad t>20000\end{cases}$$

بنابر تعریف توان خواهیم داشت:

$$p(t)=v(t)i(t)=\begin{cases}\left(\frac{t}{5000}+8\right)i(t) & , \quad 0<t<20000\\ 0 & , \quad \text{سایر زمانها}\end{cases}$$

و در نهایت با استفاده از رابطه $w(t_0,t)=\int_{t_0}^{t}p(t)dt$ داریم:

$$\text{کل}\quad w=w(0,20000)=\int_0^{20000}\left(\frac{t}{5000}+8\right)i(t)dt$$

$$=\int_0^{5000}\left(\frac{t}{5000}+8\right)\left(\frac{-6}{5000}t+20\right)dt+\int_{5000}^{15000}\left(\frac{t}{5000}+8\right)\left(\frac{-6}{10000}+17\right)dt$$

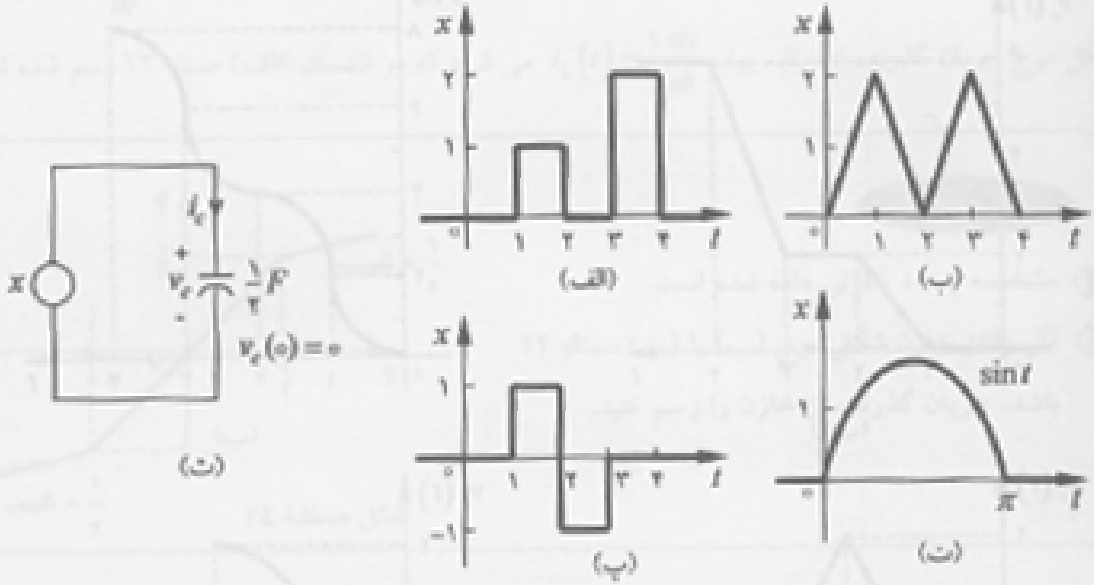
$$+\int_{15000}^{20000}\left(\frac{t}{5000}+8\right)\left(\frac{-8}{5000}+32\right)dt=2076/7\ KJ$$

مسئله ۲۲

خازنی با $v_c(0)=0$ و $C=\frac{1}{2}F$ به دو سر منبع x وصل شده است.

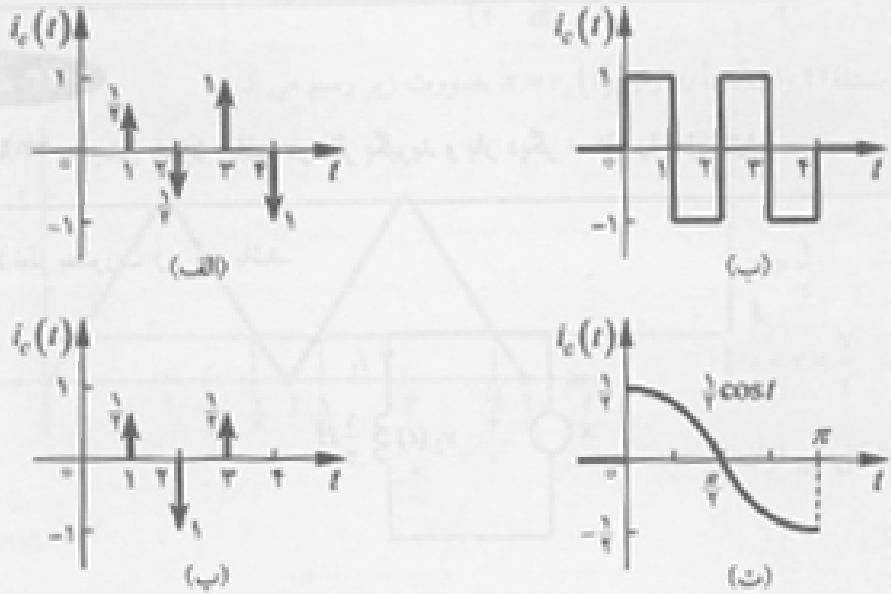
الف) اگر منبع از نوع ولتاژ باشد، شکل موج جریان گذرنده از خازن را رسم کنید.

ب) اگر منبع از نوع جریان باشد، شکل موج ولتاژ دو سر خازن را رسم کنید.



شکل مسئلهٔ ۲۲

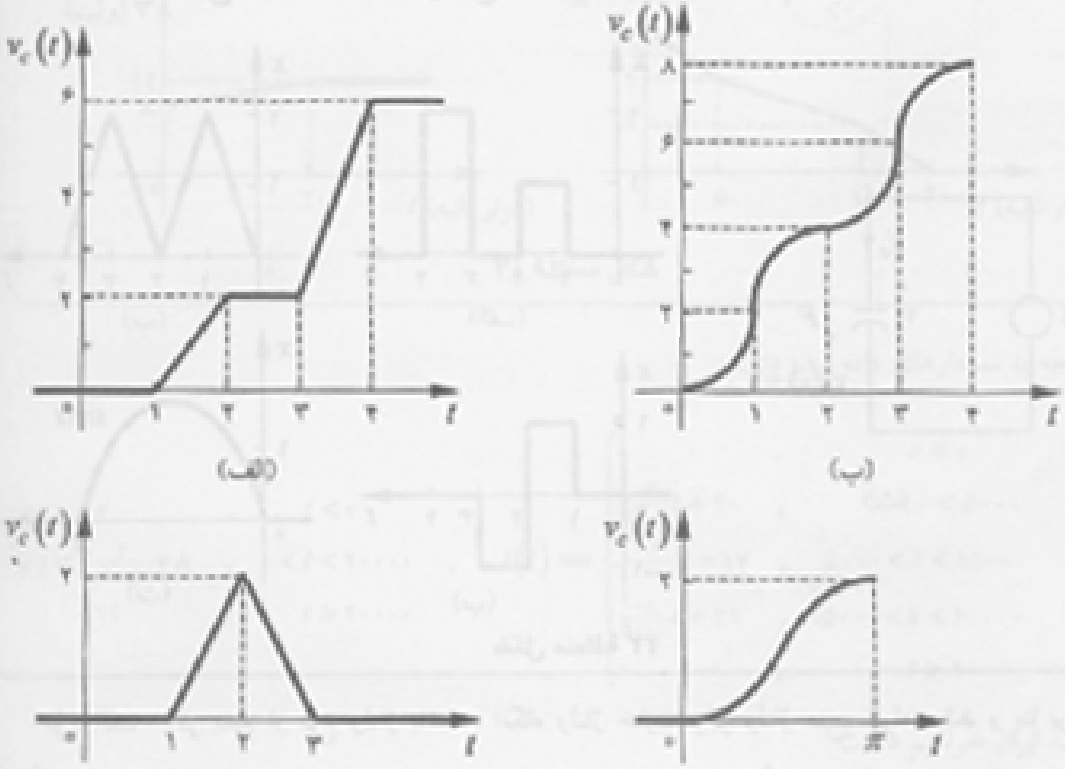
حل: الف- اگر منبع از نوع ولتاژ باشد ، آنگاه ولتاژ خازن برابر ولتاژ منبع خواهد شد و بنا بر رابطه $i_c(t)=c\frac{dv_c(t)}{dt}$ ، شکل موج جریان گذرنده از خازن با استفاده از رابطه $i_c(t)=\frac{1}{2}\frac{dx}{dt}$ بدست می آید.



ب ـ اگر منبع از نوع جریان باشد، آنگاه جریان خازن برابر جریان منبع خواهد شد و بنا بر رابطه

$$v_C(t) = v_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt$$

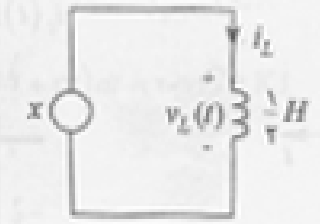
شکل موج ولتاژ دو سر خازن برابر $v_C(t) = 2\int_{t_0}^{t} x(t)\,dt$ یعنی اینکه دو برابر انتگرال شکل موج x خواهدشد.



مسئله ۲۳

در مسئلهٔ ۲۲ به جای خازن سلف در نظر بگیرید و بار دیگر مسئله را حل کنید.

حل: مدار مورد نظر بصورت زیر می باشد.



الف ـ اگر منبع از نوع ولتاژ باشد، آنگاه ولتاژ سلف برابر ولتاژ منبع خواهد شد و بنابر رابطهٔ

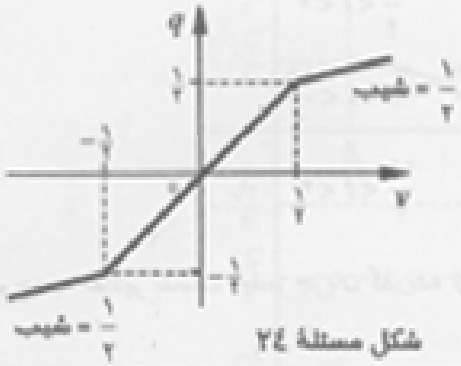
$$i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v_L(t)dt$$

شکل موج جریان گذرنده ازسلف برابر $i_L(t) = 2\int_{t_0}^{t} x(t)dt$ ، یعنی اینکه دو برابرانتگرال شکل موج x خواهد شد که در قسمت (ب) مسئله ۲۲ رسم شده اند.

ب ـ اگرمنبع از نوع جریان باشد،آنگاه جریان سلف برابر جریان منبع خواهد شدوبنابر رابطه $v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$ شکل موج جریان گذرنده از سلف برابر $i_L(t) = \frac{1}{2}\frac{dx}{dt}$ می شود که در قسمت (الف) مسئله ۲۲ رسم شده اند.

مسئله ۲۴

- مشخصه $v-q$ خازنی داده شده است.
- اگر ولتاژ خازن شکل موج (ب) یا (ت) مسئله ۲۲ باشد، جریان گذرنده از خازن را رسم کنید.

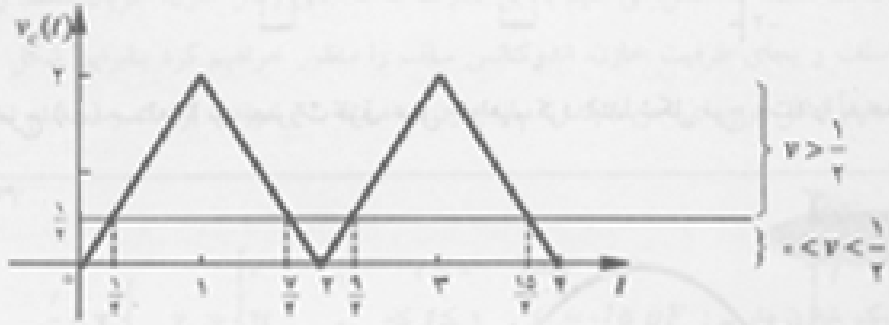


شکل مسئلهٔ ۲۴

حل: با توجه به مشخصهٔ $v-q$ داده شده داریم :

$$c = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < v < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & , \quad v > \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \quad i_c(t) = c\frac{dv(t)}{dt} = \begin{cases} \frac{dv_c(t)}{dt} & , \quad 0 < v < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\frac{dv_c(t)}{dt} & , \quad v > \frac{1}{2} \end{cases}$$

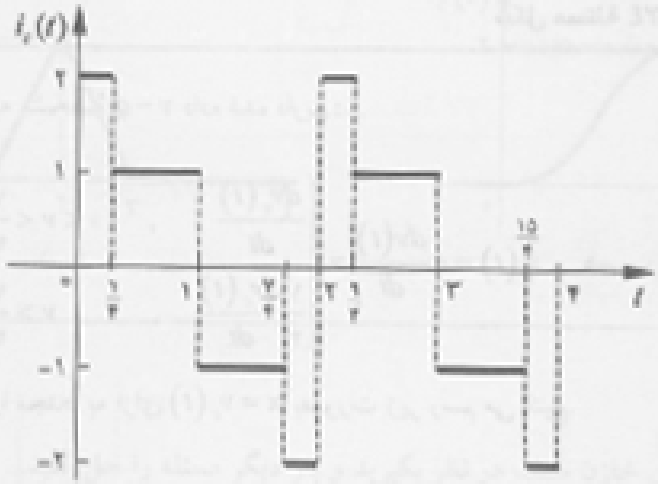
شکل(ب) مسئلهٔ۲۲ را مجدداً به ازای $x = v_c(t)$ بصورت زیر رسم می کنیم.



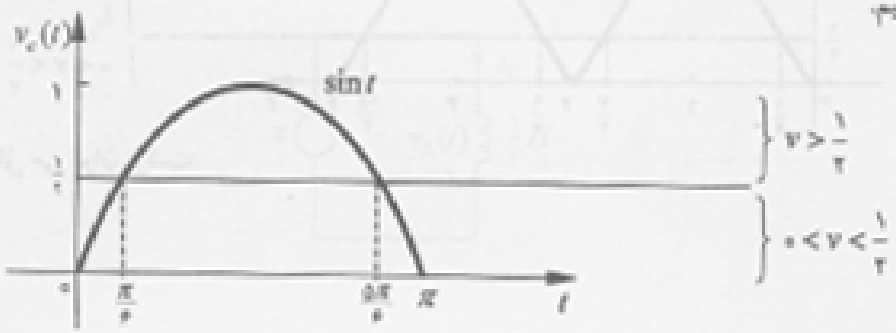
با توجه به شکل می توان نوشت:

$$i_c(t)=\begin{cases}\dfrac{dv_c(t)}{dt}=2 & , \quad 0<t<\dfrac{1}{4}\\[2mm] \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_c(t)}{dt}=1 & , \quad \dfrac{1}{4}<t<1\\[2mm] \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_c(t)}{dt}=-1 & , \quad 1<t<\dfrac{7}{4}\\[2mm] \dfrac{dv_c(t)}{dt}=-2 & , \quad \dfrac{7}{4}<t<2\\[2mm] \dfrac{dv_c(t)}{dt}=2 & , \quad 2<t<\dfrac{9}{4}\\[2mm] \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_c(t)}{dt}=1 & , \quad \dfrac{9}{4}<t<3\\[2mm] \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_c(t)}{dt}=-1 & , \quad 3<t<\dfrac{15}{4}\\[2mm] \dfrac{dv_c(t)}{dt}=-2 & , \quad \dfrac{15}{4}<t<4\end{cases}$$

با توجه به مقادیر بدست آمده، جریان گذرنده از خازن در این حالت در شکل زیر رسم شده است.

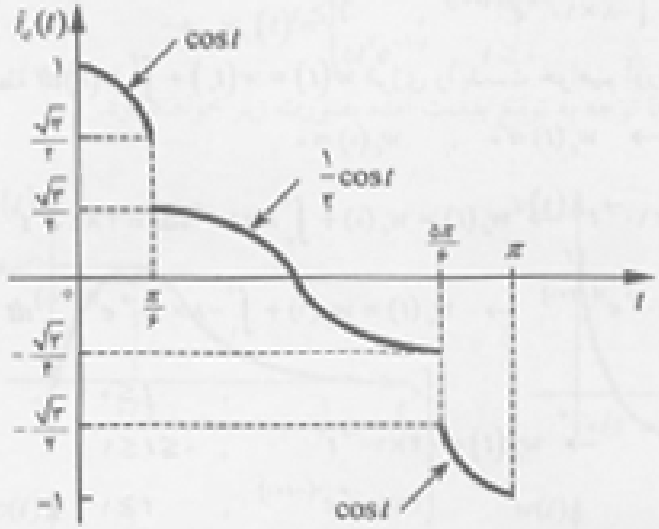


برای شکل موج (ت) مسئله۲۲ نیز بصورت فوق عمل خواهیم کرد. ابتدا شکل موج (ت) را به همراه خط $v=\frac{1}{2}$ رسم می کنیم.



$$i_c(t)=\begin{cases}\dfrac{dv_c(t)}{dt}=\cos t & , \quad 0<t<\dfrac{\pi}{6}\\[2mm] \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_c(t)}{dt}=\dfrac{1}{2}\cos t & , \quad \dfrac{\pi}{6}<t<\dfrac{5\pi}{6}\\[2mm] \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_c(t)}{dt}=\cos t & , \quad \dfrac{5\pi}{6}<t<\pi\end{cases}$$

بنابراین در این حالت شکل موج جریان گذرنده از خازن بصورت زیر خواهد بود.



مسئله ۲۵

- فرض کنید شکل مسئلهٔ ۲۴ مشخصه $i-\phi$ یک سلف است.
- اگر جریان گذرنده از سلف بصورت شکل موجهای شکل (ب)یا (ت) مسئلهٔ ۲۲ باشد ولتاژ دو سر سلف را رسم کنید.

حل: همانند مسئلهٔ ۲۴ عمل می کنیم با این تفاوت که به جای ولتاژ خازن، جریان سلف و بجای جریان خازن، ولتاژ سلف و بجای ظرفیت خازن اندوکتانس سلف را منظور خواهیم کرد بنابراین شکل موجهای ولتاژ دو سر سلف دقیقاً شکل موجهای جریان گذرنده از خازن در مسئلهٔ ۲۴ خواهند بود که رسم شده اند.

مسئله ۲۶

- برای یک خازن داریم: $C=015\ \mu F$ ، $v_c=\begin{cases}0 & , \quad t\le 0\\ 4t & , \quad 0\le t\le 1\\ 4e^{-4(t-1)} & , \quad t\ge 1\end{cases}$
- $i_c(t)$ و $p_c(t)$ و $w_c(t)$ را بدست آورید.
- در چه زمانهایی انرژی در خازن ذخیره و در چه زمانهایی انرژی از خازن گرفته می شود.

حل: با توجه به ولتاژ داده شده داریم:

$$i_c(t)=c\frac{dv_c(t)}{dt}=0/5\times10^{-4}\frac{dv_c(t)}{dt}=\begin{cases}0 & , \quad t\le 0\\ 2\times10^{-4} & , \quad 0\le t\le 1\\ -2\times10^{-4}e^{-2(t-1)} & , \quad t\ge 1\end{cases}$$

$$p_c(t)=v_c(t)i_c(t)=\begin{cases}0 & , \quad t\le 0\\ 8\times10^{-4}t & , \quad 0\le t\le 1\\ -8\times10^{-4}e^{2(-t+1)} & , \quad t\ge 1\end{cases}$$

در ادامه با استفاده از رابطهٔ $w(t)=w(t_0)+\int_{t_0}^{t}p(t)dt$ انرژی را بدست خواهیم آورد.

$$t\le 0\ ,\quad p_c(t)=0\ \rightarrow\ w_c(t)=0\ ,\quad w_c(0)=0$$

$$0\le t\le 1\ ,\ p_c(t)=8\times10^{-4}t\ \rightarrow\ w_c(t)=w_c(0)+\int_0^t 8\times10^{-4}t\,dt=4\times10^{-4}t^2\ ,\ w_c(1)=4\times10^{-4}$$

$$t\ge 1\ ,\quad p_c(t)=-8\times10^{-4}e^{2(-t+1)}\ \rightarrow\ w_c(t)=w_c(1)+\int_1^t -8\times10^{-4}e^{2(-t+1)}dt=4\times10^{-4}e^{2(-t+1)}$$

$$\rightarrow\ w_c(t)=\begin{cases}0 & , \quad t\le 0\\ 4\times10^{-4}t^2 & , \quad 0\le t\le 1\\ 4\times10^{-4}e^{2(-t+1)} & , \quad t\ge 1\end{cases}$$

در زمانهایی که $p_c(t)>0$ باشد یعنی در $0\le t\le 1$ خازن انرژی ذخیره کرده و در زمانهایی که $p_c(t)<0$ باشد یعنی به ازای $t\ge 1$ از خازن انرژی گرفته می شود.

مسئله ۲۷

- برای یک سلف داریم: $L=100\ mH$ ، $i(t)=\begin{cases}0 & , \quad t\le 0\\ 10te^{-5t} & , \quad t\ge 0\end{cases}$
- منحنی های i ، v ، p و w را رسم کنید.
- در چه زمانهایی انرژی در سلف ذخیره شده و در چه زمانهایی انرژی از آن گرفته می شود.
- حداکثر انرژی ذخیره شده در سلف چیست.

حل: ابتدا v ، p و w را بدست می آوریم.

$$v_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}\ \rightarrow\ v(t)=0/1\frac{di(t)}{dt}=\begin{cases}0 & , \quad t\le 0\\ e^{-5t}-5te^{-5t} & , \quad t\ge 0\end{cases}$$

$$p(t)=v(t)i(t)=\begin{cases}(0)(0) & , \quad t\le 0\\ \left(10te^{-5t}\right)\left(e^{-5t}-5te^{-5t}\right) & , \quad t\ge 0\end{cases}=\begin{cases}0 & , \quad t\le 0\\ 10te^{-10t}-50t^2e^{-10t} & , \quad t\ge 0\end{cases}$$

برای محاسبهٔ انرژی از رابطهٔ $w(t)=w(t_0)+\int_{t_0}^{t} p(t)dt$ استفاده خواهیم کرد.

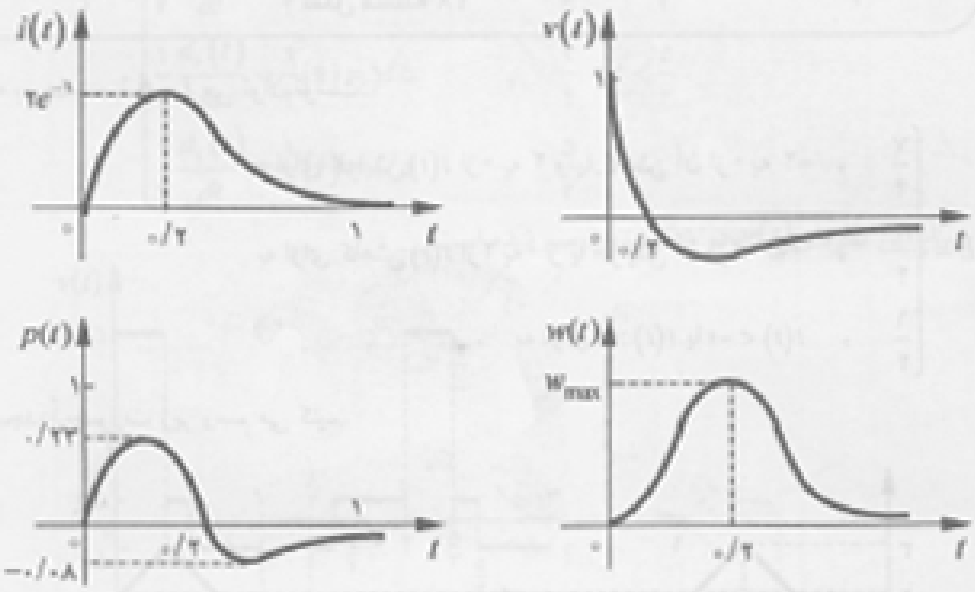
$$t\le 0\ ,\quad p(t)=0 \quad\rightarrow\quad w(t)=0\ ,\quad w(0)=0$$

$$t\ge 0\ ,\quad p(t)=10te^{-10t}-50t^2e^{-10t} \quad\rightarrow\quad w(t)=w(0)+\int_0^t\left(10te^{-10t}-50t^2e^{-10t}\right)dt$$

$$=-te^{-10t}-\frac{1}{10}e^{-10t}\Big|_0^t+5t^2e^{-10t}+te^{-10t}+\frac{1}{10}e^{-10t}\Big|_0^t=5t^2e^{-10t}\quad t\ge 0$$

$$\rightarrow\quad w_c(t)=\begin{cases}0 & ,\ t\le 0\\ 5t^2e^{-10t} & ,\ t\ge 0\end{cases}$$

نمودارهای i، v، p و w با توجه به توابع بدست آمده بصورت زیر خواهند بود.



از آنجا که $p(t)$ مشتق $w(t)$ است و در ۰/۲ برابر صفرند. لذا حداکثر مقدار $w(t)$ به ازای $t=0/2$ بدست خواهند آمد.

$$\frac{dw}{dt}=0\quad\rightarrow\quad 10te^{-10t}(1-5t)=0\quad\rightarrow\quad t=0/2$$

$$w_{max}=w(0/2)=5t^2e^{-10t}\Big|_{t=0/2}=0/027\ J$$

می دانیم که اگر $p(t)>0$ باشد انرژی در خازن ذخیره شده و اگر $p(t)<0$ باشد انرژی از خازن گرفته میشود. بنابراین به ازای $0<t<0/2$ انرژی در خازن ذخیره شده و به ازای $t>0/2$ انرژی از خازن گرفته می شود.

مسئله ۲۸

◀ مشخصهٔ $\phi - i$ و جریان $i(t)$ گذرندهٔ از یک سلف داده شده اند.

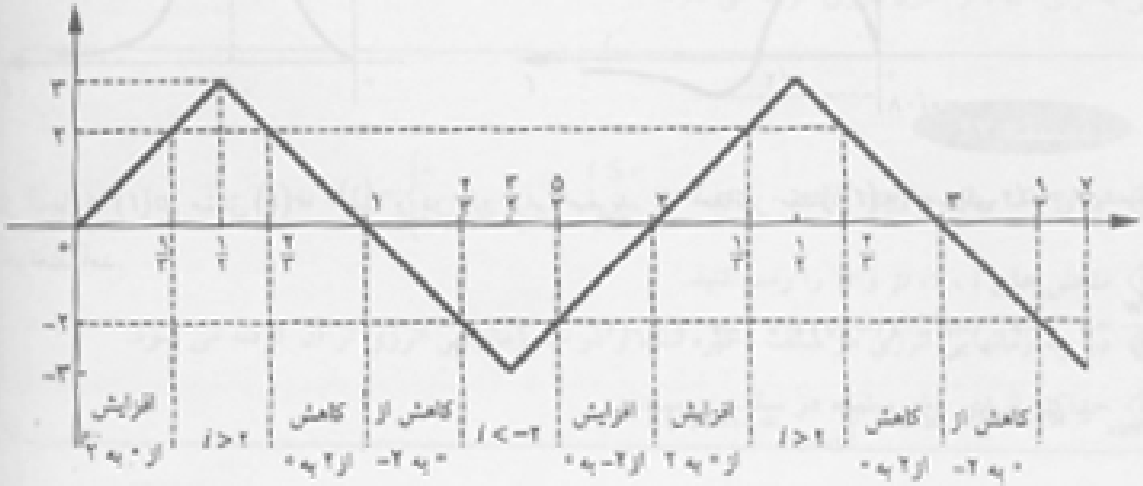
◀ $v(t)$ را تعیین و ترسیم کنید.

شکل مسئلهٔ ۲۸

حل: با توجه به مشخصهٔ $\phi - i$ می توان نوشت:

$$L = \begin{cases} \frac{7}{4} & \text{به ازای افزایش } i(t) \text{ از ۰ به ۲ و یا کاهش آن از ۰ به ۲-} \\ \frac{1}{4} & \text{به ازای کاهش } i(t) \text{ از ۲ به ۰ و یا افزایش آن از ۲- به ۰} \\ \frac{1}{4} & \text{به ازای } i(t) > 2 \text{ یا } i(t) < -2 \end{cases}$$

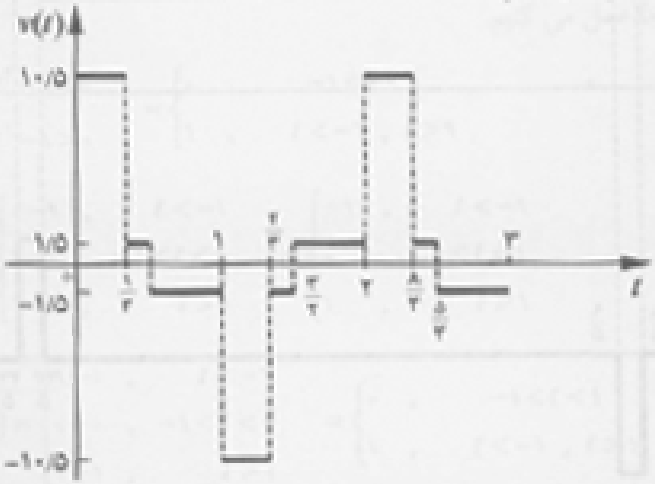
مشخصهٔ $\phi - i$ را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



بنابراین با استفاده از رابطهٔ $v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$ ، ولتاژ دو سر سلف بصورت زیر حاصل خواهد شد.

$$v(t)=\begin{cases}\frac{7}{4}\frac{di_L(t)}{dt}=\frac{7}{4}(6)=10/5 & , \quad 0<t<\frac{1}{3}\\ \frac{1}{4}\frac{di_L(t)}{dt}=\frac{1}{4}(6)=1/5 & , \quad \frac{1}{3}<t<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}\frac{di_L(t)}{dt}=\frac{1}{4}(-6)=-1/5 & , \quad \frac{1}{2}<t<\frac{2}{3}\\ \frac{1}{4}\frac{di_L(t)}{dt}=\frac{1}{4}(-6)=-1/5 & , \quad \frac{2}{3}<t<1\\ \frac{7}{4}\frac{di_L(t)}{dt}=\frac{7}{4}(-6)=-10/5 & , \quad 1<t<\frac{4}{3}\\ \frac{1}{4}\frac{di_L(t)}{dt}=\frac{1}{4}(-6)=-1/5 & , \quad \frac{4}{3}<t<\frac{3}{2}\\ \frac{1}{4}\frac{di_L(t)}{dt}=\frac{1}{4}(6)=1/5 & , \quad \frac{3}{2}<t<\frac{5}{3}\\ \frac{1}{4}\frac{di_L(t)}{dt}=\frac{1}{4}(6)=1/5 & , \quad \frac{5}{3}<t<2\end{cases}$$

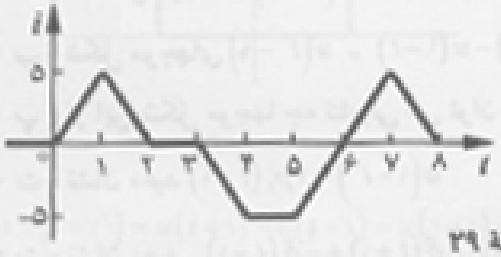
بنابراین نمودار $v(t)$ در شکل زیر رسم شده است.

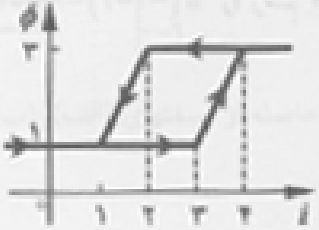


مسئله ۳۹

مشخصهٔ یک سلف و جریان آن نشان داده شده اند.

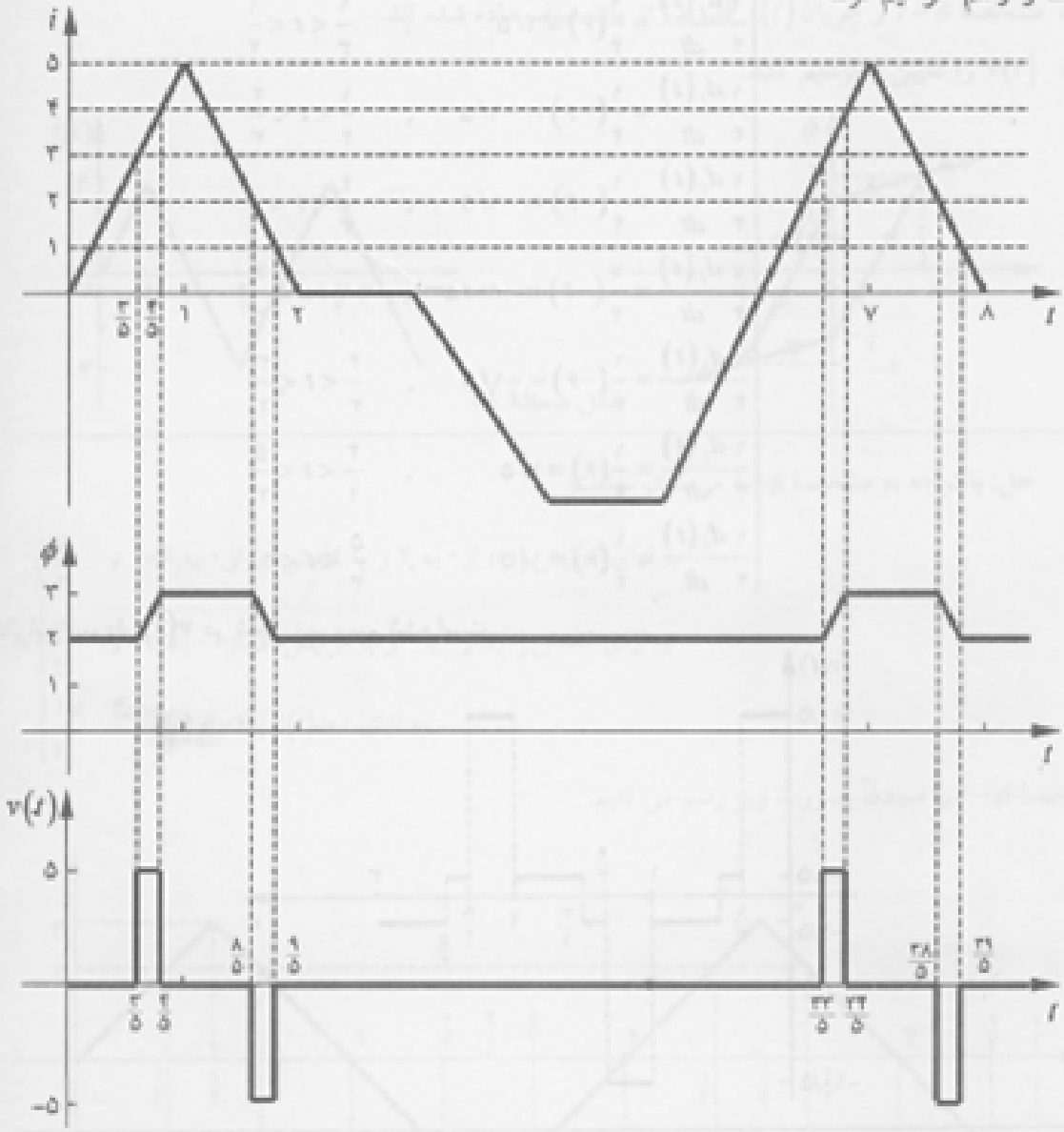
ولتاژ دو سر سلف را رسم کنید.





شکل مسئلهٔ ۳۹

حل: با توجه به نمودارهای داده شده ابتدا ϕ را رسم می کنیم،سپس با استفاده از رابطهٔ $v(t)=\frac{d\phi}{dt}$، ولتاژ دو سر سلف را رسم خواهیم کرد.



مسئله ۳۰

الف- شکل موجهای $u(1-t)$ ، $u(t+1)-u(t-1)$ و $u(1-t)-u(-1-t)$ را رسم کنید.

ب- شکل موجهای $u(t-1)$ ، $u(1+t)-u(1-t)$ و $u(-1-t)-u(-1+t)$ را رسم کنید.

پ- از این شکل موجها چه نتایجی می توان استخراج کرد.

ت- نشان دهید $u(1-t)=2p_1(t+1)$

ث- نشان دهید. $\delta(1-t)=\frac{1}{2}\delta(t+1)+\frac{1}{2}\delta(t-1)$

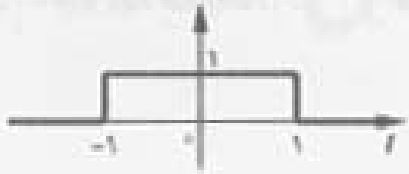
حل: الف ـ با توجه به تعریف تابع پله واحد می توان نوشت.

$$u(1-t^2)=\begin{cases}0 & , \quad 1-t^2<0\\ 1 & , \quad 1-t^2>0\end{cases}=\begin{cases}0 & , \quad t<-1\ ,\ t>1\\ 1 & , \quad -1<t<1\end{cases}$$

$$u(t+1)-u(t-1)=\begin{cases}0-0 & , \quad t<-1\\ 1-0 & , \quad -1<t<1\\ 1-1 & , \quad t>1\end{cases}=\begin{cases}0 & , \quad t<-1\ ,\ t>1\\ 1 & , \quad -1<t<1\end{cases}$$

$$u(1-t)-u(-1-t)=\begin{cases}1-1 & , \quad t<-1\\ 1-0 & , \quad -1<t<1\\ 0-0 & , \quad t>1\end{cases}=\begin{cases}0 & , \quad t<-1\ ,\ t>1\\ 1 & , \quad -1<t<1\end{cases}$$

بنابراین شکل موجهای هر سه یکسان بوده و بصورت زیر می باشد.



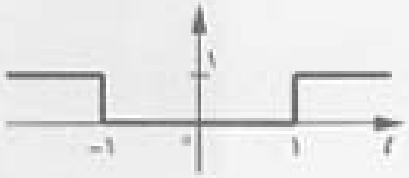
ب ـ همانند قسمت (الف) عمل می کنیم.

$$u(t^2-1)=\begin{cases}0 & , \quad t^2-1<0\\ 1 & , \quad t^2-1>0\end{cases}=\begin{cases}0 & , \quad -1<t<1\\ 1 & , \quad t<-1\ ,\ t>1\end{cases}$$

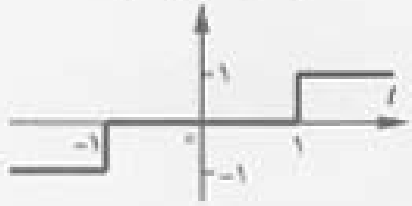
$$u(1+t)-u(1-t)=\begin{cases}0-1 & , \quad t<-1\\ 1-1 & , \quad -1<t<1\\ 1-0 & , \quad t>1\end{cases}=\begin{cases}-1 & , \quad t<-1\\ 0 & , \quad -1<t<1\\ 1 & , \quad t>1\end{cases}$$

$$u(-1-t)+u(-1+t)=\begin{cases}1+0 & , \quad t<-1\\ 0+0 & , \quad -1<t<1\\ 0+1 & , \quad t>1\end{cases}=\begin{cases}0 & , \quad -1<t<1\\ 1 & , \quad t<-1\ ,\ t>1\end{cases}$$

$u(t^2-1)\ ,\ u(-1-t)+u(-1+t)$



$u(1+t)-u(1-t)$



پ ـ نتایج حاصله از قسمتهای (الف)و(ب)عبارتند از:

الف) $u(1-t^2)=u(t+1)-u(t-1)=u(1-t)-u(-1-t)$